Lista trzecia* †
Metody probabilistyczne i statystyka
kierunek: Informatyka, studia I°

dr Jarosław Kotowicz

wersja z dnia 22 kwietnia 2022

Spis treści

1 Jednowymiarowa zmienna losowa

1.1 Wyznaczanie rozkładów

Zadanie 1. *Z kwadratu o boku a losowane są dwa wierzchołki. Wartością zmiennej losowej X jest długość odcinka łączącego te wierzchołki. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X.*

Zadanie 2. *Z sześcianu o krawędzi a losowane są trzy wierzchołki. Wartością zmiennej losowej X jest pole trójkąta wyznaczonego przez te wierzchołki, którego wierzchołkami są one. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X.*

Zadanie 3. *Z kwadratu o boku a losowany jest punkt. Wartością zmiennej losowej X jest odległość od najbliższego boku. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X.*

Zadanie 4. *Losujemy punkt z trójkąta równobocznego o boku a. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od najbliższego boku. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 5. *Dany jest prostokąt o bokach a, b, gdzie $a < b$. Z prostokąta losujemy punkt. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równy odległości punktu od najbliższego dłuższego boku. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 6. *Dany jest prostokąt $[0, 2] \times [0, 4]$. Z prostokąta losujemy punkt. zmienna losowa X przyjmuje wartości równe odległości punktu od najbliższego dłuższego boku. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 7. *Dane są dwa koła współśrodkowe o promieniach 1 i 2. Z większego koła losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od mniejszego z okręgów Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 8. *Z okręgu o promieniu 1 losujemy dwa punkty P, Q. Wartością zmiennej losowej jest długość mniejszego łuku. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X.*

---

†Zadania 85 –93, 94 –110, 111 –123 pochodzą od dr U. Ostaszewskiej ze strony znajdującej się pod adresem http://math.uwb.edu.pl/%7Euostasze/rachiie16.html.

Zadanie 9. *Z koła o promieniach 2 losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od brzegu koła. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 10. *A jest zdarzeniem losowym, które można zaobserwować w pojedynczym doświadczeniu* $P(A) = p > 0$*. Doświadczenia są w sposób niezależny wykonywane do tego momentu, kiedy A zostanie zaobserwowane po raz pierwszy. Wartością zmiennej losowej* X *jest numer tego doświadczenia kiedy A zostało zaobserwowane pierwszy raz (lub kiedy zostały przerwane próby). Wyznacz rozkład zmiennej losowej* X*.*

Zadanie 11. *Z pęku* n *kluczy wybierany jest jeden i pasowany do zamka. Klucz, który nie pasuje jest odkładany, a z pozostałych jest losowany kolejny klucz. Wartością zmiennej losowej* X *jest numer tej próby, w której klucz pasuje do zamka. Wiadomo, że tylko jeden klucz otwiera zamek. Wyznacz rozkład zmiennej losowej* X*.*

Zadanie 12. *Rzucamy raz symetryczną monetą. Zdarzeniu wypadł orzeł przyporządkowujemy liczbę 2, a wypadła reszka liczbę -1. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 13. *Rzucamy dwoma symetrycznymi monetami. Zdarzeniu wypadły dwie reszki przyporządkowujemy liczbę 5, wypadły różne wyniki liczbę - 3, zaś wypadły dwa orły liczbę 1. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 14. *Rzucamy pięcioma symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 15. *W urnie znajdują się 4 kule białe i 4 czarne. Losujemy z urny jednocześnie 4 kule. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wylosowanych kul czarnych. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 16. *Rzucamy kostką i dwoma symetrycznymi monetami, na których znajdują się odpowiednio liczby -1, 1, 0, 1. Zmienna losowa* X *przyjmuje wartości równe sumie wyrzuconych oczek i iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 17. *Rzucamy kostką i trzema symetrycznymi monetami, na których znajdują się odpowiednio liczby -1, 1, 0, 1, -1, 0. Zmienna losowa* X *przyjmuje wartości równe sumie wyrzuconych oczek i iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 18. *Rzucamy dwoma kostkami i dwoma symetrycznymi monetami, na których znajdują się liczby 0, 1. Zmienna losowa* X *przyjmuje wartości równe wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek powiększonych o iloczyn wyników otrzymanych na monetach. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 19. *Rzucamy dwoma kostkami do gry i monetą na której są cyfry 0 i 1. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi sumy oczek i wyrzuconej liczby na monecie. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 20. *Rzucamy dwoma kostkami i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby -1, 1. Zmienna losowa* X *przyjmuje wartości równe sumie liczby wypadłej na monecie i wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 21. *Ze zbioru* N *ponumerowanych elementów losujemy ze zwracaniem* n *elementów* $(1 < n < N)$*. Niech* X, Y *będą zmiennymi losowymi przyjmującymi odpowiednio wartość największego i najmniejszego wylosowanego numeru. Wyznacz rozkłady* X, Y*.*

Zadanie 22. *Uczeń rzuca 4 razy do kosza. Prawdopodobieństwo umieszczenia piłki w koszu wynosi* $\frac{1}{4}$*. Wyznacz rozkład zmiennej losowej zmiennej losowej wyznaczonej przez ilość trafień do kosza.*

Zadanie 23. *Z odcinka* $[0, L]$ *losowane są w sposób niezależny dwie liczby* x_1, x_2*. Wartością zmiennej losowej* X *jest liczba 1, jeżeli liczba* $r \in [0, L]$ *leży pomiędzy punktami* x_1, x_2 *i 0 w przeciwnym wypadku. Wyznacz rozkład zmiennej losowej* X*.*

Zadanie 24. *Z kwadratu* $[0, 1] \times [0, 1]$ *losowany jest punkt* (x, y)*. Wyznacz rozkłady zmiennych losowych* $X = \min\{x, y\}, Y = \max\{x, y\}$*.*

Zadanie 25. *Policz dystrybuanty dla zmiennych losowych od zadania 12.*

Zadanie 26. *Rzucamy kostką i monetą. Opisz zmienną losową, jeśli przyjmuję wartości równe*

- *sumie oczek na kostce i wypadłych liczb na monecie (orzeł - 0, reszka -1),*
- *ilości wyrzuconych oczek na kostce,*
- *iloczynowi ilości oczek na kostce i wypadłych liczb na monecie (orzeł - 0, reszka -1).*

Zadanie 27. *Rzucamy dwoma kostkami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe sumie wyrzuconych oczek na obu kostkach. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 28. *Dokonujemy 10 jednakowych prób, które są niezależne. W każdej z prób może pojawić się zdarzenie A z prawdopodobieństwem p, ($0 < p < 1$). Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wystąpień zdarzenia A. Znajdź rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 29. *Do zadań 26–28 policz dystrybuanty zmiennej losowej.*

Zadanie 30. *Oblicz dystrybuantę zmiennej losowej rozkładu jednostajnego na odcinku* $]a, b[$.

Zadanie 31. *Zmienna losowa podlega rozkładowi według trapezu równoramiennego, o kącie nachylenia ramion* $\frac{\pi}{6}$, *przy czym* $a \leqslant x \leqslant b$. *Napisz równanie gęstości zmiennej losowej.*

Zadanie 32. *Dany jest odcinek* $[0, L]$ *i punkt* r *należący do tego odcinka. Z odcinka losujemy dwa punkty* x_1, x_2. *Zmienna losowa* X *przyjmuje wartość 1, gdy punkt* r *znajduje się miedzy wylosowanymi punktami oraz 0 w przeciwnym wypadku. Podaj rozkład* X.

Zadanie 33. *Rzucamy dwoma kostkami i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby -1, 1. Zmienna losowa* X *przyjmuje wartości równe sumie liczby wypadłej na monecie i wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 34. *Rzucamy dwiema kostkami do gry. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podaj jej rozkład.*

Zadanie 35. *Rzucamy kostką do gry i czworościanem na ścianach którego są liczby 0, 0, 1, 2. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe*

- *sumie,*
- *iloczynowi*

wyrzuconych oczek i liczby wypadłej na czworościanie. Podaj rozkład zmiennej losowej.

Zadanie 36. *Do zadań 34 i 35 podaj dystrybuanty zmiennych losowych.*

Zadanie 37. *Losujemy punkt z trójkąta równobocznego o boku* a. *Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od najbliższego boku. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 38. *Rzucamy trzema monetami na których znajdują się następujące liczby -1 i 1, 0 i 1 oraz 1 i 2. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 39. *Podaj dystrybuantę do zadania 38.*

Zadanie 40. *Rzucamy kostką do gry i dwiema monetami. Na jednej z monet znajdują się liczby 1 i 2, a na drugiej 0 i 1. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi otrzymanych oczek i wyrzuconych liczb na monetach. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 41. *Policz prawdopodobieństwo, że zmienna losowa z zadania 40 przyjmie wartości z przedziału* $]\sqrt{3}, \sqrt{9}[$.

Zadanie 42. *Rzucamy dwoma kostkami do gry i monetą na której są cyfry 0 i 1. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi sumy oczek i wyrzuconej liczby na monecie. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 43. *Rzucamy kostką i dwoma symetrycznymi monetami, na których znajdują się odpowiednio liczby -1, 1, 0, 1. Zmienna losowa* X *przyjmuje wartości równe sumie wyrzuconych oczek i iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 44. *Trójkąt równoramienny na płaszczyźnie jest utworzony przez wektor* $[1, 0]$ *oraz inny wektor o długości 1 w kierunku losowym (wierzchołek trójkąta ma rozkład jednostajny na okręgu jednostkowym). Znajdź dystrybuantę i gęstość rozkładu zmiennej losowej mierzącej długość trzeciego boku.*

1.2 Gęstości

Zadanie 45. *Czy można dobrać parametr a tak, aby podane funkcje były gęstościami pewnego rozkładu zmiennej losowej? Odpowiedź uzasadnij. W przypadku odpowiedzi pozytywnej policz ich dystrybuanty.*

- $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in [0,4] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,4] \end{cases}$,
- $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in [-1,4] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1,4] \end{cases}$,

- $f(x) = \begin{cases} ax^2 & dla\ x \in [0,3] \\ 0 & dla\ x \notin [0,3] \end{cases}$,
- $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x \cdot (2-x) & dla\ x \in [0,a] \\ 0 & dla\ x \notin [0,a] \end{cases}$,
- $f(x) = \begin{cases} a & dla\ x \in [c, c+\frac{1}{a}] \\ 0 & dla\ x \notin [c, c+\frac{1}{a}] \end{cases}$,
- $f(x) = \begin{cases} ax & dla\ x \in [0,1] \\ 0 & dla\ x \notin [0,1] \end{cases}$,
- $f(x) = \begin{cases} ae^{-x} & dla\ x \geqslant 0 \\ 0 & dla\ x < 0 \end{cases}$,
- $f(x) = \begin{cases} x+2 & dla\ x \in [0,a] \\ 0 & dla\ x \notin [0,a] \end{cases}$,
- $f(x) = \begin{cases} a\cos x & dla\ x \in [0,\frac{\pi}{4}] \\ 0 & dla\ x \notin [0,\frac{\pi}{4}] \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x & dla\ x \in [-1,a] \\ 0 & dla\ x \notin [-1,a] \end{cases}$,
- $f(x) = \begin{cases} x^2 & dla\ x \in [-a,a] \\ 0 & dla\ x \notin [-a,a] \end{cases}$,
- $f(x) = \begin{cases} x^3 & dla\ x \in [-1,a] \\ 0 & dla\ x \notin [-1,a] \end{cases}$,
- $f(x) = \begin{cases} ax(2+x) & dla\ x \in [0,1] \\ 0 & dla\ x \notin [0,1] \end{cases}$,
- $f(x) = \begin{cases} x^2+x & dla\ x \in [-1,a] \\ 0 & dla\ x \notin [-1,a] \end{cases}$,
- $f(x) = \begin{cases} |x| & dla\ x \in [-a,a] \\ 0 & dla\ x \notin [-a,a] \end{cases}$,
- $f(x) = \begin{cases} \cos x & dla\ x \in [-a,a] \\ 0 & dla\ x \notin [-a,a] \end{cases}$,
- $f(x) = \begin{cases} x^3 & dla\ x \in [0,a] \\ 0 & dla\ x \notin [0,a] \end{cases}$.

1.3 Jednowymiarowy rozkład normalny

Zadanie 46. *Wyraź za pomocą dystrybuanty rozkładu normalnego znormalizowanego następujące prawdopodobieństwo* $P(\{\omega : |X(\omega)| < 3\})$*, jeśli zmienna losowa* $X \in \mathcal{N}(2,3)$*.*

Zadanie 47. *Niech* $X \in \mathcal{N}(1,1)$*. Wyznacz:*

- $P(\{\omega : X(\omega)(1-X(\omega)) > 0\})$,
- $P(\{\omega : X(\omega)(1-X(\omega)) < 0\})$,
- $P(\{\omega : X^3(\omega) - X(\omega) > 0\})$,
- $P(\{\omega : X^3(\omega) - X(\omega) < 0\})$,

- $P(\{\omega : 1 < \frac{1}{|X(\omega)|} < 2\})$.

Zadanie 48. *Policz następujące prawdopodobieństwa rozkładu normalnego standaryzowanego:*

- $P(\{\omega : X(\omega) \geqslant 3\})$,
- $P(\{\omega : |X(\omega) - 1| > 2\})$,
- $P(\{\omega : 1 < \frac{1}{|X(\omega)|} < 2\})$.

Zadanie 49. *Zmienna losowa $X \in \mathcal{N}(3, 5)$. Oblicz prawdopodobieństwo*

- $P(\{\omega : \frac{1}{X(\omega)} - 1 > 0\})$,
- $P(\{\omega : X^3(\omega) - 1 > 0\})$,
- $P(\{\omega : \frac{1}{X(\omega)} - 1 > 0\})$.

Zadanie 50. *Zmienna losowa $X \in \mathcal{N}(2, 4)$. Wyraź prawdopodobieństwo*

- $P(\{\omega : \frac{X(\omega)-2}{X(\omega)} > -1\})$,
- $P(\{\omega : (1 - X(\omega))X(\omega) > 0\})$,
- $P(\{\omega : X^2(\omega) - 1 > 0\})$,
- $P(\{\omega : \frac{X(\omega)-4}{X(\omega)} > 0\})$.

za pomocą wartości dystrybuanty rozkładu normalnego standaryzowanego.

Zadanie 51. *X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Wykazać że $P(\{X > 4\}) < 1/25000$*

1.4 Funkcje zmiennych losowych

Zadanie 52. *X jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$. Znajdź dystrybuantę i gęstość następujących zmiennych losowych*

- $Y = aX + b$ *gdzie* $a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$,
- $Y = 2X^2 - 1$,
- $Y = \max\{X, 1 - X\}, Y = \min\{X, 1 - X\}$,
- $Y = -\ln(1 - x)$,
- $Y = -\ln X$,
- $Y = X^k, k \in \mathbb{N}$,

Zadanie 53. *X ma rozkład wykładniczy ze współczynnikiem $\lambda > 0$. Znajdź gęstość rozkładu*

- $Y = \{X\}$, *gdzie* $\{X\} = X - [X]$ *oznacza część ułamkową,*
- $Y = X^\alpha, \alpha > 0$,
- $Y = X^3$,
- $Y = 5X - 1$,
- $Y = 3X + 2$,
- $Y(\omega) = k^2$, *gdy* $k \leqslant X(\omega) < k + 1, k = 0, 1, 2, \ldots$.

Zadanie 54. *X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Jaki rozkład ma zmienna $Y = aX + b$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$?*

1.5 Parametry liczbowe i pozycyjne zmiennych losowych.

Zadanie 55. *Dane są 4 urny i 3 kule. Rozmieszczamy kule w urnach. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości pustych urn. Oblicz*

- *rozkład zmiennej losowej,*
- *wartość oczekiwaną,*
- *wariancje zmiennej losowej.*

Zadanie 56. *Z sześciany o krawędzi a wylosowano dwa wierzchołki. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości tych wierzchołków. Oblicz*

- *rozkład zmiennej losowej,*
- *wartość oczekiwaną,*
- *wariancje zmiennej losowej.*

Zadanie 57. *Z sześciany o krawędzi a wylosowano trzy wierzchołki. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe polu trójkąta utworzonego z tych wierzchołków. Oblicz*

- *rozkład zmiennej losowej,*
- *wartość oczekiwaną,*
- *wariancje zmiennej losowej.*

Zadanie 58. *Dla zmiennej losowej z zadań 34 i 35 oblicz wariancję.*

Zadanie 59. *Dla zmiennej z zadania 42 policz wartość oczekiwaną.*

Zadanie 60. *Dla zmiennej z zadania 43 policz wariancję.*

Zadanie 61. *Spośród zbioru par liczb* $\{(k,l) : k,l \in \{0,1,\dots,9\}\}$ *losowana jest jedna para* (m,n)*. Wartością zmiennej losowej* X *jest* $m+n$*. Wyznacz* $\mathbb{E}(X)$*.*

Zadanie 62. *Oblicz* $\mathbb{D}^2(X)$ *jeżeli* X *jest zmienną losową o rozkładzie*

- *jednostajnym na odcinku* $[a,b]$*,*
- *wykładniczym z parametrem* λ*.*

Zadanie 63. X *ma rozkład o gęstości* $g(t) = \frac{a}{1+t^2}$*. Wyznacz* a, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{D}^2(X)$*.*

Zadanie 64. *Niech* X *suma oczek w* k *rzutach kostką. Oblicz* $\mathbb{E}(X), \mathbb{D}^2(X)$*.*

Zadanie 65. *Niech* X *iloczyn oczek w dwóch rzutach kostką. Oblicz* $\mathbb{E}(X)$*.*

Zadanie 66. *Losujemy n-krotnie (ze zwracaniem) liczbę spośród liczb od 1 do* N*.* X *największa spośród liczb uzyskanych w losowaniu. Oblicz* $\mathbb{E}(X)$*.*

Zadanie 67. *W urnie jest 8 białych i 2 czarne kule. Losujemy kule bez zwracania.* X *ilość wyciągniętych do momentu wyciągnięcia pierwszej kuli białej. Jaka jest najbardziej prawdopodobna wartość* X*?*

Zadanie 68. *Udowodnić* $\mathbb{E}(X) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(\mid X \mid) \leqslant \frac{1}{2}(1 + \mathbb{D}^2(X))$*.*

Zadanie 69. *Policz dystrybuantę, wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej, której gęstość zadana jest wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & dla\ x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & dla\ x \notin [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}.$$

Zadanie 70. *Dany jest rozkład zmiennej losowej* $P(\{\omega : X(\omega) = k\}) = \frac{c}{3^k}$*, gdzie* $k \in \mathbb{N}$*. Wyznacz stała c, wartość oczekiwaną i wariancję.*

Zadanie 71. *Dany jest rozkład*

x_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$

Policz jego wartość oczekiwaną, wariancję, odchylenie standardowe, medianę, modę.

Zadanie 72. *Dla zmiennej losowej zadanej przez gęstość*

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & dla\ x \in [0,3] \\ 0 & dla\ x \notin [0,3] \end{cases}$$

policz medianę.

Zadanie 73. *Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję, gdy rozkład zadany jest wzorem*

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & dla\ x \in [0,3] \\ 0 & dla\ x \notin [0,3] \end{cases}$,
- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x & dla\ x \in [0,\pi] \\ 0 & dla\ x \notin [0,\pi] \end{cases}$,
-

x_k	*1*	*2*	*3*	*4*
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Zadanie 74. *X ma rozkład* $\mathcal{N}(0,1)$. *Znajdź czwarty moment zwykły* X.

Zadanie 75. *Wyznacz* $P(\{\omega : X(\omega)^2 < \frac{3}{4} + X(\omega)\})$, *gdy*

a) X posiada rozkład $\mathcal{N}(m,\sigma)$, *później przyjąć* $m = 1, \sigma = 1$,

b) X posiada rozkład Laplace'a (przyjąć $\lambda = 1$*).*

Zadanie 76. *Oblicz k-ty moment zmiennej losowej o rozkładzie Poissona.*

Zadanie 77. *Oblicz k-ty moment zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym.*

1.6 Nierówności związane z momentami.

Zadanie 78. *Z klasycznej nierówności Czebyszewa ocenić prawdopodobieństwo, że zmienna losowa normalna (tzn.* $\mathcal{N}(0,1)$*) odchyli się od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż*

- *cztery średnie odchylenia,*
- *trzy średnie odchylenia.*

Zadanie 79. *Strzelamy 300 razy do tarczy z prawdopodobieństwem trafienia w jednym strzale wynoszącym 1/4. Z nierówności Czebyszewa ocenić* $P(\{|X - 75| < 30\})$, *gdzie X jest ilością trafień.*

Zadanie 80. *X ma rozkład jednostajny na odcinku* $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

- *Oszacuj z nierówności Czebyszewa* $P(\{|X| \geqslant \frac{3}{2}\})$,
- *Oblicz* $P(\{|X| \geqslant \frac{3}{2}\})$ *bezpośrednio.*

Zadanie 81. *X ma rozkład normalny* $\mathcal{N}(0,1)$. *Oszacować z góry* $P(\{|X| \geqslant 3\})$ *przy pomocy:*

- *nierówności Czebyszewa,*
- *tablic.*

Zadanie 82. *Zmienne losowe* X_i, *dla* $i \in \mathbb{N}$ *są niezależne i mają jednakowe rozkłady* $P(\{X_i = k\}) = 0,2, k = 1,2,3,4,5$. *Znajdź prawdopodobieństwo, że zmienna* $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ *przyjmie wartość większą od 320.*

Zadanie 83. *Rzucamy n razy symetryczną monetą. Niech zmienna losowa* X_k *oznacza wyrzucenie orła za k razem. Korzystając z nierówności, Czebyszewa oszacować n aby*

$$P\left(\left\{\omega : \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10}\right\}\right) > \frac{9}{10}.$$

Zadanie 84 (Zadanie poprzednie inaczej sformułowane.)**.** *Rzucamy n razy monetą. Niech X ilość orłów. Korzystając z nierówności Czebyszewa znajdź takie n aby* $P(\{|\frac{1}{n}X - \frac{1}{2}| < 1/10\}) > 9/10$.

2 Zadania z list dr U. Ostaszewskiej

2.1 Prawdopodobieństwo geometryczne

Zadanie 85. *Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana z odcinka* $[-\pi,\pi]$ *liczba* x *należy do dziedziny funkcji* $f(x)=\sqrt{\cos x}$.

Zadanie 86. *Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że pierwiastki równania*

$$x^2+2bx+c=0$$

są rzeczywiste, jeśli liczby b *i* c *zostały wybrane losowo z przedziału* $[0,1]$*?*

Zadanie 87. *W dany kwadrat o boku* $2a$ *wpisujemy koło, a następnie w koło kolejny kwadrat. Wybieramy losowo punkt z większego kwadratu. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrany punkt należy do kwadratu mniejszego.*

Zadanie 88. *Z odcinka o długości 1 wybrano losowo dwa punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ani jedna z otrzymanych w ten sposób części nie będzie krótsza od* a*, gdzie* $0\leqslant a\leqslant \frac{1}{3}$*?*

Zadanie 89. *Odcinek długości* l *dzielimy losowo na trzy części. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że z uzyskanych odcinków można zbudować trójkąt?*

Zadanie 90. *Na odcinku* AB *o długości jednostkowej umieszczono losowo dwa punkty* L *i* M*. Wyznacz prawdopodobieństwo, że z* L *jest bliżej do* M *niż do* A.

Zadanie 91. *Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma dwóch na chybił trafił wybranych liczb dodatnich, z których każda jest nie większa od jedności, jest nie większa od jedności, a ich iloczyn jest nie większy od* $\frac{2}{9}$*?*

Zadanie 92. *Monetę o promieniu* r *rzucamy na parkiet utworzony z przystających kwadratów o boku* $2a$*. Oblicz prawdopodobieństwo, że moneta przykryje przynajmniej dwa kwadraty, jeśli* $r<a$.

Zadanie 93. *Na odcinku o długości jednostkowej wybrano losowo dwa punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że odległości pomiędzy nimi jest nie mniejsza od* x*, gdzie* $0\leqslant x\leqslant 1$*?*

2.2 Zmienne losowe

Zadanie 94. *Rzucamy kostką, zmienna losowa* X *przyjmuje wartość 0 jeśli liczba wyrzuconych oczek jest podzielna przez 3, 1 gdy liczba wyrzuconych oczek przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, 2 gdy liczba wyrzuconych oczek przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Wyznacz rozkład zmiennej losowej zmiennej losowej* X.

Zadanie 95. *Przeznaczona do odbioru partia towaru zawiera jednakową liczbę sztuk I, II i III gatunku. Niech* $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ *oznaczają zdarzenia elementarne w doświadczeniu polegającym na wylosowaniu z tej partii towaru sztuki odpowiednio I, II, III gatunku. Zmienne losowe* X, Y *określamy w sposób następujący*

$$X(\omega_1)=2,\ X(\omega_2)=1,\ X(\omega_3)=0$$
$$Y(\omega_1)=0,\ Y(\omega_2)=1,\ Y(\omega_3)=2.$$

Porównać rozkłady zmiennych losowych X, Y*. Wyznacz ich dystrybuanty. Czy zmienne losowe* X *i* Y *są równe?*

Zadanie 96. *Z pęku* n *kluczy wybierany jest jeden i pasowany do zamka. Klucz, który nie pasuje jest odkładany, a z pozostałych jest losowany kolejny klucz. Wartością zmiennej losowej* X *jest numer tej próby, w której klucz pasuje do zamka. Wiadomo, że tylko jeden klucz otwiera zamek. Wyznacz rozkład zmiennej losowej* X.

Zadanie 97. *Rzucamy pięcioma symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 98. *Dane są 4 urny i 3 kule. Rozmieszczamy kule w urnach. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości pustych urn. Oblicz rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 99. *Losujemy n-krotnie (ze zwracaniem) liczbę spośród liczb od 1 do* N*. Niech zmienna losowa* X *przyjmuje wartości równe największej spośród liczb uzyskanych w losowaniu. Oblicz jej rozkład.*

Zadanie 100. *Rzucamy dwoma kostkami i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby -1, 1. Zmienna losowa* X *przyjmuje wartości równe sumie liczby wypadłej na monecie i wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 101. *Niech* $\Omega=\{0,1,2,3\}$, $P(\omega)=\frac{1}{4}$ *dla* $\omega=0,1,2,3$*. Definiujemy dwie zmienne losowe* $X(\omega)=\sin\frac{\pi\omega}{2}$ *oraz* $Y(\omega)=\cos\frac{\pi\omega}{2}$*. Znajdź rozkłady i dystrybuanty zmiennych losowych* X *i* Y*. Oblicz* $P(\{\omega\in\Omega : X(\omega)=Y(\omega)\})$.

Zadanie 102. *Z talii 52 kart wyciągamy 6 i takiemu losowaniu przypisujemy liczbę pików. Znajdź rozkład określonej w ten sposób zmiennej losowej.*

Zadanie 103. *Dana jest gęstość określona wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{dla } x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

Nie licząc całki podaj ile wynosi prawdopodobieństwo w punkcie $\frac{\pi}{4}$. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 104. *Dla jakich wartości a funkcja $f(x) = ax^2\mathbb{I}_{[0,2]}(x)$ jest gęstością?*

Zadanie 105. *Niech X ma rozkład o gęstości $f(x) = \frac{a}{x^2+1}$. Wyznacz wartość parametru a oraz oblicz $P(\{|X| > 1\})$?*

Zadanie 106. *Niech X ma rozkład o gęstości $f(\{x\}) = ce^{-|x|}$. Wyznacz c i $P(\{X > -1\})$.*

Zadanie 107. *Niech X ma rozkład o gęstości*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [-1, 0) \\ x & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1, 1] \end{cases}.$$

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że $\left\{|X - \frac{1}{8}| < \frac{5}{8}\right\}$.

Zadanie 108. *Wiemy, że zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$ i $P(\{X < 2\}) = \frac{3}{4}$. Oblicz λ.*

Zadanie 109. *Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na zbiorze $A = [-1, 0] \cup [2, 4]$. Wyznacz gęstość i $P(\{|X - \frac{3}{2}| < 2\})$.*

Zadanie 110. *Czy można dobrać parametr a, by funkcja*

a) $f(x) = \frac{a}{x^2}\mathbb{I}_{(1,\infty)}(x)$,

b) $g(x) = \frac{a}{x}\mathbb{I}_{(1,\infty)}(x)$,

c) $h(x) = a\sqrt{x}\mathbb{I}_{(0,3)}(x)$

była gęstością?

2.3 Rozkłady

Zadanie 111. *Z kwadratu o boku a losowany jest punkt. Wartością zmiennej losowej X jest odległość od najbliższego boku. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X.*

Zadanie 112. *Dane są dwa koła współśrodkowe o promieniach 1 i 2. Z większego koła losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od mniejszego z okręgów. Podaj rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 113. *Z odcinka $[0, 1]$ losujemy dwie liczby. Wyznacz rozkład zmiennej losowej zmiennej losowej X przyjmującej wartości równe*

a) minimum z wylosowanych liczb,

b) maksimum z wylosowanych liczb,

c) sumie wylosowanych liczb.

Zadanie 114. *Z kwadratu $[0, 1]^2$ losujemy punkt (x, y). Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie współrzędnych wylosowanego punktu. Wyznacz rozkład zmiennej losowej zmiennej losowej X.*

Zadanie 115. *Czy można dobrać stałe a, b tak, aby funkcja $f(x) = a \operatorname{arc\,tg}(x) + b$ była dystrybuantą pewnego rozkładu? Jeśli tak, to je podaj wraz z uzasadnieniem.*

Zadanie 116. *Wyznacz zbiór wszystkich trójek a, b i c, dla których funkcja*

$$F(t) = \begin{cases} at^2 & \text{dla } t < 0 \\ bt + c & \text{dla } 0 \leqslant t < 2 \\ 1 & \text{dla } t \geqslant 2 \end{cases}$$

jest

a) dystrybuantą zmiennej losowej,

b) dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym,

c) dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie ciągłym.

Zadanie 117. *Wyznacz dystrybuanty dla rozkładów opisanych w zadaniach 94 – 110.*

Zadanie 118. *Funkcja*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & dla\ x < -1 \\ \frac{1}{4} & dla\ -1 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2} & dla\ 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{7}{8} & dla\ 2 \leqslant x < 4 \\ 1 & dla\ x \geqslant 4 \end{cases}.$$

*jest dystrybuantą zmiennej losowej X. Wtedy (odpowiedzieć **tak** lub **nie**):*

a) $P(\{X \leqslant 2\}) > P(\{X > 2\})$,

b) $W_X = \{-1, 1, 2, 3\}$,

c) $P(\{X = 3\}) = \frac{7}{8}$,

d) $P(\{X^2 - 1 = 0\}) = \frac{1}{2}$.

Zadanie 119. *Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem*

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & dla\ t < 0 \\ 0.1 + t & dla\ 0 \leqslant t < 0.5 \\ 0.4 + t & dla\ 0.5 \leqslant t < 0.55 \\ 1 & dla\ t \geqslant 0.55 \end{cases}.$$

Wyznacz $P(\{X = \frac{1}{2}\})$, $P(\{X \in [0, \frac{1}{2}]\})$, $P(\{X < 0.55\})$.

Zadanie 120. *Czy można dobrać parametr a tak, aby podane funkcje były gęstościami pewnego rozkładu zmiennej losowej? Odpowiedź uzasadnij. W przypadku odpowiedzi pozytywnej policz ich dystrybuanty.*

a) $f(x) = \begin{cases} ax & dla\ x \in [0, 4] \\ 0 & dla\ x \notin [0, 4] \end{cases}$,

b) $f(x) = \begin{cases} ax & dla\ x \in [-1, 4] \\ 0 & dla\ x \notin [-1, 4] \end{cases}$,

c) $f(x) = \begin{cases} ax^2 & dla\ x \in [0, 3] \\ 0 & dla\ x \notin [0, 3] \end{cases}$,

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x \cdot (2 - x) & dla\ x \in [0, a] \\ 0 & dla\ x \notin [0, a] \end{cases}$

Zadanie 121. *Funkcje f_i, $i = 1, 2, 3$ są gęstościami rozkładów jednostajnych na odcinkach $(i - 1, i)$. Wtedy są gęstościami także funkcje (odpowiedzieć tak lub nie):*

a) $f_1 + f_2 + f_3$,

b) $f_2 \cdot f_3$,

c) $|f_3 - f_1|$,

d) $\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$,

e) $\max(f_1, f_2)$.

Zadanie 122. *Zmienna losowa ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Oblicz prawdopodobieństwo*

- $P(\{X > 0\})$,

- $P(\{X > 2\})$,
- $P(\{|X| < 1\})$,
- $P(\{|X| > 1\})$,
- $P(\{0 < X < 3\})$,
- $P(\{-1 < X < 3\})$.

Zadanie 123. *Zmienna losowa ma rozkład* $\mathcal{N}(1, 2)$. *Oblicz prawdopodobieństwo*

- $P(\{|X| > 3\})$,
- $P(\{X^2 \leqslant \frac{3}{4} + X\})$.

3 Zadania z list prof. L.Uby

Zadanie 124. *Dana jest funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej* X

x_i	- 5	- 2	0	1	3	8
p_i	$0,1$	$0,2$	$0,1$	$0,2$	c	$0,1$

Wyznacz

a) *stałą* c,

b) *wykres funkcji prawdopodobieństwa i jej histogram,*

c) *dystrybuantę i jej wykres,*

d) *prawdopodobieństwa:*

d1) $P(\{X = 1\})$,
d2) $P(\{X = 2\})$,
d3) $P(\{X < 3\})$,
d4) $P(\{X < 2\})$,
d5) $P(\{X \leqslant 0\})$,
d6) $P(\{-2 \leqslant X < 3\})$.

dwoma sposobami korzystając:

1.) *z danej funkcji prawdopodobieństwa,*

2.) *z wyznaczonej dystrybuanty: znalezione prawdopodobieństwa zilustrować na rysunku dystrybuanty.*

Zadanie 125. *Dana jest dystrybuanta zmiennej losowej* X

x	$(-\infty, -2]$	$(-2, 1]$	$(1, 3]$	$(3, +\infty)$
$f(x)$	*0*	*0, 2*	*0, 81*	*1*

Wyznacz jej funkcję prawdopodobieństwa.

Zadanie 126. *Wyraź za pomocą dystrybuanty następujące prawdopodobieństwa*

a) $P(\{X \leqslant b\})$,

b) $P(\{X \geqslant b\})$,

c) $P(\{a < X \leqslant b\})$,

d) $P(\{a \leqslant X \leqslant b\})$,

e) $P(\{a < X < b\})$.

Zadanie 127. *Zmienna losowa* X *ma funkcję prawdopodobieństwa postaci*

x_i	- 3	-1	3	5
p_i	0.1	0.2	0.5	0.2

Wyznacz funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej U, jeżeli

a) $U = 2X + 3$,

b) $U = X^3$,

c) $U = X^2 - 5$.

Zadanie 128. *Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości*

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{dla } 0 \leqslant x \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}.$$

Wyznacz jej dystrybuantę oraz oblicz $P(\{X \geqslant 2\})$.

Zadanie 129. *Dobrać tak stałą c by funkcja*

$$f(x) = \begin{cases} c \sin x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

była gęstością, a następnie

a) wyznacz jej dystrybuantę,

b) oblicz $P(\{|X| < \frac{\pi}{3}\})$ i zinterpretuj za pomocą wykresu gęstości i dystrybuanty.

Zadanie 130. *Z pewnego przystanku autobusy odjeżdżają co 10 minut. Zakładamy, ze rozkład czasu przybycia pasażera na przystanek jest jednostajny, oblicz prawdopodobieństwo, ze pasażer będzie czekał co najmniej 4 minuty.*

Zadanie 131. *W pewnej miejscowości temperatura T (w stopniach Celsjusza) mierzona w dniu 1 marca o godzinie 8 jest zmienną losową o gęstości: $f(x) = 0.5e^{-|x|}$. Wyznacz jej dystrybuantę oraz $P(\{|T| < 2\})$.*

Zadanie 132. *Dobierz tak stałe A i B żeby funkcja*

$$f(x) = \begin{cases} A + B \arccos x & \text{dla } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla } x < -1 \\ 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

była dystrybuantą zmiennej losowej X typu ciągłego.

Zadanie 133. *Wyznacz tak stałą a, by funkcja*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ 2\left(1 - \frac{1}{x}\right) & \text{dla } 1 < x \leqslant a \\ 1 & \text{dla } x > a \end{cases}$$

była dystrybuantą zmiennej losowej X typu ciągłego. Oblicz $P(\{-1 \leqslant X \leqslant 1.5\})$ i zinterpretować je za pomocą wykresu gęstości.

Zadanie 134. *Dystrybuanta zmiennej losowej X jest określona wzorem*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt.$$

Wyznacz gęstość i naszkicuj jej wykres.

Zadanie 135. *Lolek wybiera się na bal sylwestrowy do klubu „Proxima" i namawia swoich 5 koleżanek, by poszły razem z nim. Niech X oznacza liczbę koleżanek Lolka, które wyraziły chęć spędzenia z nim sylwestra. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X jest następujący: $P(\{X = 0\}) = P(\{X = 1\}) = P(\{X = 2\}) = 0.1$, $P(\{X = 3\}) = 0.3$, $P(\{X = 4\}) = P(\{X = 5\}) = p$.*

a) Oblicz p.

b) Znajdź dystrybuantę zmiennej losowej X. Narysować wykres dystrybuanty.

c) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, ze sylwestra zechcą spędzić z Lolkiem co najwyżej trzy koleżanki.

Zadanie 136. *Obsługa działa artyleryjskiego ma 3 pociski. Prawdopodobieństwo trafienia do celu jednym pociskiem (przy jednym wystrzale) w danych warunkach wynosi 0.7. Strzelanie kończy się z chwilą trafienia celu albo wyczerpania pocisków. Wyznacz*

a) funkcję prawdopodobieństwa liczby oddanych strzałów,

b) przeciętną liczbę oddanych strzałów.

Zadanie 137. *Robotnik obsługuje 3 maszyny. Prawdopodobieństwo tego, ze w ciągu godziny maszyna nie będzie wymagać interwencji wynosi 0.6 dla pierwszej oraz 0.7 dla drugiej i trzeciej maszyny. Przy założeniu, ze maszyny pracują niezależnie od siebie, wyznacz funkcję prawdopodobieństwa liczby X maszyn, które w ciągu godziny ich pracy nie wymagają interwencji robotnika.*

Zadanie 138. *Energia pochodząca z określonego źródła jest pobierana przez pięciu robotników. Aby oszacować zapotrzebowanie na energie, zakładamy, że*

1) w danej chwili prawdopodobieństwo p zapotrzebowania na energię jest takie samo dla każdego z pięciu robotników,

2) robotnicy pracując niezależnie od siebie,

3) każdy robotnik korzysta z energii przeciętnie 12 minut w ciągu godziny.

Niech X oznacza liczbę robotników pobierających energię w danej chwili. Znajdź rozkład zmiennej losowej X. Oblicz prawdopodobieństwo tego, ze liczba robotników pobierających energię w danej chwili jest nie większa od 2. Znajdź najbardziej prawdopodobną wartość zmiennej losowej X.

Zadanie 139. *Wiadomo, ze 1% skrzynek winogron psuje się w czasie transportu. Z transportu w sposób przypadkowy wybrano 3 skrzynki. Niech X oznacza liczbę skrzynek z zepsutymi winogronami wśród trzech wybranych. Znajdź rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.*

Zadanie 140. *Prawdopodobieństwo, ze statystyczny student nie jest przygotowany do ćwiczeń jest $p = \frac{1}{3}$. Prowadzący ćwiczenia wywołuje 4 osoby. Niech X oznacza liczbę osób, które nie są przygotowane do ćwiczeń (wśród wybranych 4). Znajdź $P(\{X = 3\})$.*

Zadanie 141. *Niech zmienna losowa X ma rozkład równomierny w przedziale $]-\frac{\pi}{2}, \pi[$. Wyznacz gęstość zmiennej losowej $Y = \sin X$.*

Zadanie 142. *Rzucamy trzy razy moneta. Niech X oznacza liczbę otrzymanych orłów.*

a) Znajdź rozkład i dystrybuantę zmiennej losowej X oraz sporządzić ich wykres.

b) Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania więcej niż 1 orła.

Zadanie 143. *Zmienna losowa X podlega rozkładowi normalnemu $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Wyznacz gęstość zmiennej losowej*

a) $Y = 2X - 3$,

b) $Y = X^2$.

Zadanie 144. *Zmienna losowa X podlega rozkładowi*

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & dla\ x > 0 \\ 0 & dla\ x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Wyznacz gęstość zmiennej losowej $Y = X^2$.

Zadanie 145. *Zmienna losowa ma funkcję prawdopodobieństwa postaci*

$$p_k \equiv P(\{X = k\}) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \quad dla\ n \in \mathbb{N}.$$

Wyznacz funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej U, jeśli

a) $U = \cos(\pi K)$,

b) $U = \cos(\frac{1}{2}\pi K)$,

c) $U = \cos^2(\frac{1}{2}\pi K)$,

d) $U = \sin(\frac{1}{2}\pi K) + \cos(\frac{1}{2}\pi K)$.

Zadanie 146. *Dla zmiennej losowa X, która posiada następującą funkcję prawdopodobieństwa postaci*

x_i	- 3	-1	3	5
p_i	0.1	0.2	0.5	0.2

wyznacz

a) *wartość przeciętną,*

b) *medianę,*

c) *kwantyl* $x_{0.3}$,

d) *wariancję (dwoma sposobami),*

e) *odchylenie standardowe,*

f) *odchylenie przeciętne,*

g) *współczynnik zmienności,*

h) *współczynnik nierównomierności,*

i) *drugi moment zwykły,*

j) *trzeci moment zwykły,*

k) *trzeci moment centralny,*

l) *współczynnik asymetrii.*

Zadanie 147. *Oblicz wartość przeciętną i wariancję rozkładu równomiernego (jednostajnego).*

Zadanie 148. *Zmienna losowa X podlega rozkładowi Bernoulliego. Oblicz wartość przeciętną i wariancję tej zmiennej.*

Zadanie 149. *Zmienna losowa X podlega rozkładowi Poissona, tzn.* $P(\{X = k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, *gdzie* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Oblicz wartość przeciętną i wariancję tej zmiennej.*

Zadanie 150. *Określ wartość najbardziej prawdopodobną oraz wartość przeciętną rozkładu* $P(\{X = k\}) = \frac{2}{3^k}$, *gdzie* $k \in \mathbb{N}$.

Zadanie 151. *Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\left(1 - x^2\right) & dla\ |x| \leqslant 1 \\ 0 & dla\ |x| > 1 \end{cases}.$$

Narysuj wykres gęstości. Wyznacz też wartość przeciętna, modę, medianę i trzeci moment centralny zmiennej losowej X.

Zadanie 152. *Dobrać parametry A, B, C, D tak aby funkcja*

$$f(x) = \begin{cases} A & dla\ x \leqslant 0 \\ Bx^2 & dla\ 0 < x \leqslant 1 \\ 0.5x^2 - x + C & dla\ 1 < x \leqslant 2 \\ D & dla\ x > 2 \end{cases}$$

była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X. Dla $A = 0$, $B = 0.125$, $C = 0.75$, $D = 1$ oblicz

a) $P(\{1 \leqslant X < 1.5\})$,

b) $P(\{1 < X < 1.5\})$.

c) $P(\{0.5 < X < 2\})$,

d) $P(\{0.5 < X \leqslant 2\})$,

e) $P(\{0.25 < X < 1.25\})$,

f) $P(\{1 < X \leqslant 2\})$.

Dla zmiennej losowej X o dystrybuancie F z $A = 0$, $B = 0.125$, $C = 0.75$, $D = 1$, oblicz kwartyle, medianę, wartość przeciętną oraz wariancję.

Zadanie 153. *Automat produkuje kulki metalowe o średnicach X (w cm). Średnica X jest zmienną losową o gęstości*

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } 0.4 \leqslant x \leqslant 0.6 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}.$$

Wyznacz wartość przeciętną objętości tych kulek.

Zadanie 154. *Pociągi kolejki elektrycznej odjeżdżają ze stacji co 5 minut. Zakładając, ze rozkład czasu przybycia pasażera na stację jest jednostajny, oblicz wartość przeciętną i wariancję czasu oczekiwania na pociąg.*

Zadanie 155. *Czas bezawaryjnej pracy pewnego urządzenia (w godzinach) jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{dla } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

z parametrem $\lambda = 2$. Oblicz współczynnik asymetrii i spłaszczenia dla tego rozkładu.

Zadanie 156. *Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ \frac{x-1}{2} & \text{dla } 1 < x \leqslant 3 \\ 1 & \text{dla } x > 3 \end{cases}.$$

Wyznacz odchylenie standardowe i odchylenie przeciętne od wartości średniej tej zmiennej losowej.

Zadanie 157. *Zmienna losowa typu ciągłego ma rozkład jednostajny na przedziale $[-5, 15]$. Wyznacz i naszkicuj jej gęstość. Oblicz wartość przeciętną i współczynnik skupienia (kurtozę) tej zmiennej.*

Zadanie 158. *Zapałkę o długości 5cm złamano w dowolnym punkcie. Zakładając, ze rozkład prawdopodobieństwa długości krótszej części zapałki jest jednostajnym oblicz prawdopodobieństwo ze długość krótszej części zapałki nie przekracza 0.5cm.*

Zadanie 159. *Wykazać ze rozkład wykładniczy jest rozkładem o asymetrii prawej, którego współczynnik asymetrii $\gamma = 2$. Oblicz współczynnik skupienia tego rozkładu.*

Zadanie 160. *Podziałka skali woltomierza jest wycechowana co 0.5V. Wskazania woltomierze zaokrągla się do najbliższego punktu podziału. Znajdź prawdopodobieństwo tego, ze przy odczycie zostanie popełniony błąd przekraczający 0.1V.*

Zadanie 161. *Błąd losowy X pomiaru odległości od drogowskazu jest zmienną losową o gęstości $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{50}}$ Oblicz $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{D}^2(X)$, μ_4.*

Zadanie 162. *Wytrzymałość stalowych lin pochodzących z produkcji masowej jest zmienną losową o rozkładzie $N(1000kg/cm^2, 50kg/cm^2)$. Oblicz jaki procent lin ma wytrzymałość mniejszą od $900kg/cm^2$.*

Zadanie 163. *Znajdź modę i wartość przeciętną zmiennej losowej X o rozkładzie Maxwella z parametrem $\lambda = 1$.*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\pi}\lambda^{3/2}} x^2 \exp(-\frac{x^2}{\lambda}) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Zadanie 164. *Amplituda X kołysania bocznego statku jest zmienną losową o gęstości*

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{2}x^2} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}.$$

Oblicz

a) wartość przeciętną, medianę i modę zmiennej losowej X.

b) z jakim prawdopodobieństwem występują amplitudy większe od mody.

Zadanie 165. *Gęstość prawdopodobieństwa prędkości V cząsteczek gazu ma postać*

$$f(v) = \begin{cases} \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} v^2 \exp(-h^2v^2) & dla\ v > 0 \\ 0 & dla\ v \leqslant 0 \end{cases},$$

gdzie h – stała zależna od temperatury i masy cząsteczki gazu. Oblicz

a) wartość przeciętną długości przebytej drogi przez cząsteczkę w jednostce czasu,

b) modę.

Zadanie 166. *Zmienna losowa X ma rozkład beta o gęstości*

$$f(x) = \begin{cases} 12x(1-x^2)^2 & dla\ 0 < x < 1 \\ 0 & dla\ pozostałych\ x \end{cases}.$$

Wyznacz gęstość zmiennej losowej Y, jeśli:

a) $Y = 2X^3$,

b) $Y = \arcsin X$,

c) $Y = e^X$.

Zadanie 167. *Punkt materialny M porusza się po prostej ruchem jednostajnym od punktu $O(0,0)$ do punktu $A(2,0)$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej prawdopodobieństwa losowego czasu T trwania ruchu, zakładając, ze równe odcinki drogi punkt M przebywa z takim samym prawdopodobieństwem, oraz oblicz $\mathbb{E}(T)$.*

Zadanie 168. *Dany jest sześcian, którego krawędź X ma losową długość z przedziału $[1,2]$ o rozkładzie jednostajnym.*

a) Oblicz wartość przeciętną objętości i wartość przeciętną pola powierzchni całkowitej tego sześcianu.

b) Wyznacz rozkład zmiennej losowej prawdopodobieństwa objętości tego sześcianu.

Zadanie 169. *Trwałość lamp ma rozkład Rayleigha o dystrybuancie*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\frac{1}{300}x^2) & dla\ x > 0 \\ 0 & dla\ pozostałych\ x \end{cases}.$$

a) Wyznacz gęstość zmiennej losowej $Y = X^2$.

b) Oblicz $\mathbb{E}(Y)$.

Zadanie 170. *Badając zjawisko trzęsienia ziemi, zaobserwowano, ze zachodzi związek: $Y = ce^X$, gdzie Y jest intensywnością drgań ziemi w pewnym miejscu, X - siłą trzęsienia zmieni, c – współczynnikiem zależnym od odległości danego miejsca od epicentrum trzęsienia i od doboru jednostek. Zakładając, że X jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o gęstości*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & dla\ x \geqslant 0 \\ 0 & dla\ pozostałych\ x \end{cases}$$

wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej Y.

Zadanie 171. *Pewne urządzenie składa się z dwóch elementów pracujących niezależnie od siebie połączonych równolegle. Czas bezawaryjnej pracy (w godz.) każdego z nich jest zmienną losową o tym samym rozkładzie wykładniczym o gęstości*

$$f(x) = \begin{cases} 0.1e^{-0.1x} & dla\ x \geqslant 0 \\ 0 & dla\ pozostałych\ x \end{cases}.$$

Oblicz prawdopodobieństwo, że urządzenie będzie działało co najmniej przez 20 godzin.

Zadanie 172. *Korzystając z zależności $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(X-a)$, a – stała, oblicz wariancję zmiennej losowej X o gęstości*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}(x-1)^4 e^{-(x-1)} & dla\ x > 1 \\ 0 & dla\ pozostałych\ x \end{cases}.$$

Zadanie 173. *W wyniku przeprowadzonego doświadczenia prawdopodobieństwo znalezienia oczekiwanego wyniku wynosi $p = 0.6$. Takie doświadczenie możemy powtarzać dowolną liczbę razy i robimy tak, aż do uzyskania oczekiwanego wyniku. Oznaczając przez K liczbę powtórzeń tego doświadczenia, przy założeniu niezależności powtórzeń, wyznacz*

a) *funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej K i histogram rozkładu,*

b) *dystrybuantę,*

c) *prawdopodobieństwo, że liczba doświadczeń będzie: mniejsza niż 3, nie mniejsza niż 3, liczbą z przedziału* $[2, 5)$,

d) *wartość przeciętna, wariancję i odchylenie standardowe,*

e) *współczynnik asymetrii.*