Lista czwarta,[*] [†]
Metody probabilistyczne i statystyka
kierunek: Informatyka, studia I°

dr Jarosław Kotowicz

wersja z dnia 22 kwietnia 2022

Spis treści

1 Wielowymiarowa zmienna losowa

Zadanie 1. *Dobierz tak stałą c, aby funkcja*

$$f(x,y)=\begin{cases} cxy & \text{dla } 1\leqslant x\leqslant 2, 2\leqslant y\leqslant 4\\ 0 & \text{dla pozostałych punktów}\end{cases}$$

była gęstością rozkładu dwuwymiarowego. Dla tak obliczonej stałej policz dystrybuantę tego rozkładu oraz rozkłady brzegowe.

Zadanie 2. *Czy można dobrać stałą c tak, aby funkcja*

$$f(x,y)=\begin{cases} cxy+x+y & \text{dla } 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0 & \text{dla pozostałych punktów}\end{cases}$$

była gęstością rozkładu dwuwymiarowego. Jeśli tak, to dla tak obliczonej stałej policz dystrybuantę tego rozkładu oraz rozkłady brzegowe.

Zadanie 3. *Wyznacz dystrybuanty oraz rozkłady brzegowe następującego rozkładu dwuwymiarowego*

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{dla } 0\leqslant x\leqslant 1, x\leqslant y\leqslant 2-x\\ 0 & \text{dla pozostałych punktów}\end{cases}.$$

Zadanie 4. *Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład równomierny na kwadracie $[0,2]^2$. Oblicz rozkłady brzegowe.*

Zadanie 5. *Dana jest dwuwymiarowa gęstość*

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{4}{9}xy & \text{dla } x,y\in[1,2]\\ 0 & \text{dla pozostałych } x,y\end{cases}.$$

Oblicz moment rzędu 2

- *(2, 0);*
- *(1, 1).*

[†] Zadania 93 –100, 101 –111, 112 –128 pochodzą od dr U. Ostaszewskiej z list [1], [2], [3].

Zadanie 6. *Dobierz stałą a, tak aby funkcja określona wzorem*

$$f(x,y) = \begin{cases} a & \text{dla } 0 < y < x^2 < 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}.$$

była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej.

Zadanie 7. *Dla zmiennej losowej z zadania 6 oblicz rozkłady brzegowe.*

Zadanie 8. *Wyznacz stałą c, tak aby funkcja* $f(x,y) = c\exp(-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2))$ *była gęstością. Oblicz momenty zwykłe rzędu 2, rozkłady brzegowe oraz rozkłady zmiennych* $Z_1 = X + Y, Z_2 = X - Y$.

Zadanie 9. *Dana jest gęstość prawdopodobieństw układu zmiennych losowych*

$$f(x,y) = kxy\exp(-(x^2 + y^2)), x \geqslant 0, y \geqslant 0.$$

Wyznacz k rozkłady brzegowe, warunkowe, pierwsze i drugie momenty.

Zadanie 10. *Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa układu trzech zmiennych losowych* (X, Y, Z) *mając daną dystrybuantę*

$$F(x,y,z) = \begin{cases} (1 - e^{-ax})(1 - e^{-by})(1 - e^{-cy}) & \text{dla } x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases}.$$

Zadanie 11. *Niech* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją rosnącą. Wyraź dystrybuantę układu* (X, Y) *za pomocą dystrybuant zmiennych losowych* X, Y *jeśli* $Y = g(X)$.

Zadanie 12. *Niech* $F(x,y)$ *będzie dystrybuantą dwuwymiarowej zmiennej losowej* (X, Y). *Wyraź dystrybuantę układu* $(\max(X, Y), \min(X, Y))$ *za pomocą dystrybuanty* F.

Zadanie 13. *Dwuwymiarowa zmienna losowa* (X, Y) *ma rozkład równomierny na zbiorze* $K = \{(x,y) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \leqslant 1\}$. *Oblicz wszystkie momenty rzędu 2.*

Zadanie 14. (X, Y) *ma rozkład jednostajny na kwadracie* $[0,1] \times [0,1]$. *Oblicz wszystkie momenty zwykłe i centralne rzędu 2.*

Zadanie 15. *Czy można dobrać parametr c tak, aby podane funkcja była gęstością pewnego rozkładu zmiennej losowej.*

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy + x & \text{dla } x \in [0,2] \wedge y \in [0,1] \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}.$$

Zadanie 16. *Policz dla gęstości z zadania 15*

- *rozkłady brzegowe;*
- *rozkład zmiennej losowej* $Z = X + Y$;
- *momenty zwykłe i centralne rzędu pierwszego i drugiego.*

Zadanie 17. *Zmienna losowa* (X, Y) *ma gęstość prawdopodobieństwa zadaną wzorem*

$$f(x,y) = \begin{cases} C(x+y)\exp^{-(x+y)} & \text{dla } x > 0 \wedge y > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}.$$

- *Oblicz współczynnik* C.
- *Oblicz rozkłady brzegowe, dystrybuantę i współczynnik kowariancji.*

Zadanie 18. *Dwuwymiarowa zmienna losowa* (X, Y) *ma rozkład równomierny na zbiorze* $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant r^2, r > 0\}$. *Oblicz wszystkie momenty rzędu 2.*

Zadanie 19. *Doświadczenia niezależne przerywane są, gdy zdarzenie losowe A zostanie zaobserwowane po raz drugi. Niech zmienna losowa* X_1 *oznacza numer doświadczenia, gdy A pojawi się pierwszy raz,* X_2 *numer doświadczenia, gdy A pojawi się drugi raz. Wyznacz rozkład układu* (X_1, X_2).

Zadanie 20. *Niech u jest funkcją nieparzystą na* $\mathbb{R}$ *równą 0 poza odcinkiem* $]-1,1[$ *oraz*

$$| u(r) | < \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ e}.$$

a) *Sprawdź, że funkcja*

$$f(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\{-\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2)\} + u(r_1)u(r_2),$$

jest gęstością pewnego układu (X_1, X_2).

b) *Czy zmienne* (X_1, X_2) *są niezależne?*

Zadanie 21. *Sprawdź, że jeżeli układ* (X_1, X_2) *posiada rozkład równomierny na* $[0, L] \times [0, L]$, *to zmienne* $\mid X_1 - X_2 \mid$ *oraz* $\min\{X_1, X_2\}$ *posiadają jednakowe rozkłady.*

Zadanie 22. *Z kwadratu* $[0, 1] \times [0, 1]$ *losowany jest punkt* (x, y). *Określamy zmienne losowe*

$$X_1((x, y)) = \min\{x, y\}, X_2((x, y)) = \max\{x, y\}.$$

Wyznacz rozkład układu (X_1, X_2), *rozkład zmiennej* $X_2 - X_1, \mathbb{E}(X_1 \cdot X_2), \mathbb{E}(X_2 - X_1)$.

Zadanie 23. *Spośród* N *ponumerowanych elementów losowanych jest* n *elementów (schemat losowania ze zwracaniem). Zmienne losowe* X_1, X_2 *są określone następująco:*

1. X_1 *- wartość najmniejszego wylosowanego numeru,*
2. X_2 *- wartość największego wylosowanego numeru.*

Wyznacz rozkład układu (X_1, X_2) *oraz* $\mathbb{E}(X_1 X_2)$.

Zadanie 24. *Czas bezawaryjnej pracy jednego urządzenia jest zmienną losową o wartościach z odcinka* $[0, T]$, *a jej rozkład jest ciągły. Kontrolujemy pracę* n *takich urządzeń. Zakładamy, że pracują one niezależnie od siebie i charakteryzują się jednakowymi rozkładami czasu bezawaryjnej pracy. Oznaczymy przez* X_1 *liczbę tych urządzeń, dla których czas bezawaryjnej pracy okaże się krótszy niż* $k \cdot T$, *a przez* X_2 *liczbę tych urządzeń, dla których ten czas będzie dłuższy niż* $k \cdot T, 0 < k < 1$. *Wyznacz rozkład układu* (X_1, X_2).

Zadanie 25. *Niech* $\beta > 0$ *i* X *ma rozkład jednostajny na [0, 1]. Znajdź gęstość* $Y = \ln(X^{-\beta})$.

Zadanie 26. *Niech*

$$g(x, y) = \begin{cases} (1 + y^2)^{-1} \exp(-\pi x) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

będzie gęstością dwuwymiarowego rozkładu. Znajdź dystrybuantę tego rozkładu.

Zadanie 27. *Niech*

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \vee y < 0 \\ y - y \exp(-3x) & \text{dla } x > 0, 0 < y < 1 \\ 1 - \exp(-3x) & \text{dla } x > 0, y > 1 \end{cases}$$

będzie dystrybuantą dwuwymiarowego rozkładu. Wyznacz gęstość tego rozkładu.

Zadanie 28. X, Y *niezależne zmienne losowe o rozkładach jednostajnych na odcinkach* $]-1, 1[$ *i* $]1, 3[$ *odpowiednio,* $\Psi = (X, Y)$. *Znajdź dystrybuantę rozkładu zmiennej losowej* Ψ.

Zadanie 29. *Niech*

$$g(x, y) = \begin{cases} \exp(-\pi x) & \text{dla } x > 0, y \in [0, \pi] \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}$$

będzie gęstością dwuwymiarowego rozkładu. Znajdź dystrybuantę tego rozkładu.

Zadanie 30. *Znajdź takie* $a > 0$, *żeby funkcja określona wzorem*

$$f(x, y) = \begin{cases} (1 + x^2)^{-1} & \text{dla } y \in [0, a] \\ 0 & \text{dla } y \notin [0, a] \end{cases}$$

była gęstością rozkładu prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 31. *Niech* $f(x, y) = \frac{1}{\pi^2 (1+x^2)(1+y^2))}$ *będzie gęstością prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej* (X, Y). *Wyznacz dystrybuantę* (X, Y).

Zadanie 32. *Na* $\mathbb{R}^2$ *określamy rozkład:* $P(\{(-1, 0)\}) = 0{,}1$, $P(\{(-1, 1)\}) = 0{,}2$, $P(\{(0, 0)\}) = 0{,}2$, $P(\{(0, 1)\}) = 0{,}3$, $P(\{(1, 1)\}) = 0{,}2$. *Czy* P *jest iloczynem swoich rozkładów brzegowych?*

Zadanie 33. *Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej* (X,Y) *mając jej dystrybuantę* $F(x,y) = (1 - e^{-3x} - e^{-4y} + e^{-3x-4y})\mathbb{I}_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[}$.

Zadanie 34. *Znajdź rozkłady brzegowe zmiennych losowych* X, Y *znając gęstość prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej* (X,Y)*:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{16} & \text{dla } |x| < 2, |y| < 2 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}.$$

Zadanie 35. *Znajdź gęstości prawdopodobieństwa rozkładów brzegowych zmiennych losowych* X *i* Y*, mając gęstość prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej* (X,Y)

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\exp(-x-2y) & \text{dla } x, y > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}.$$

Zadanie 36. *Znajdź rozkłady brzegowe zmiennych losowych* X, Y *mając rozkład zmiennej losowej dwuwymiarowej* (X,Y) *opisany tabelką*

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	0,05	0,23	0,20	0,12
y_2	0,20	0,08	0,10	0,02

Zadanie 37. *Niech* m, n *będą ustalonymi liczbami naturalnymi, niech dla dowolnych* $i, j \geqslant 1$ *zachodzi*

$$P(\{X = 2^{\frac{i}{m}}, Y = 2^{\frac{j}{n}}\}) = 2^{-(i+j)}.$$

Zbadaj, które momenty zwykłe istnieją.

Zadanie 38. *Niech* K *będzie kwadratem o boku długości 1 położonym na płaszczyźnie. Jakie warunki musi spełniać* K *aby rozkład prawdopodobieństwa o gęstości danej wzorem*

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } (x,y) \notin K \\ 1 & \text{gdy } (x,y) \in K \end{cases}$$

był produktem swoich rozkładów brzegowych?

Zadanie 39. *Niech* $f(x,y,z) = g(x,y,z) + h(x,y,z)$*, gdzie*

$$g(x,y,z) = \begin{cases} \exp(-\frac{x^2+y^2}{2} - 2\pi z) & \text{dla } z > 0 \\ 0 & \text{dla } z < 0 \end{cases} \quad h(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy(z-1)}{1000} & \text{dla } -1 < x, y < 1, 0 < z < 2, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y, z \end{cases}.$$

Sprawdź, że f *jest gęstością rozkładu pewnej trójwymiarowej zmiennej losowej* (X,Y,Z)*. Znajdź wszystkie możliwe gęstości brzegowe. Zbadaj, czy zmienne losowe* $X,Y; X,Z; Y,Z; X,Y,Z$ *są niezależne?*

Zadanie 40. *Sprawdź że następująca funkcja określona na płaszczyźnie jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa:* $g(x,y) = \frac{1}{4}2^{-k}$ *gdy* $(x,y) \in (n, n+1] \times (m, m+1] n, m \in \mathbb{Z}$ *i* $k = \max\{|n|+|m|, |n+1|+|m|, |n|+|m+1|, |n+1|+|m+1|\}$

Zadanie 41. *Znajdź dystrybuantę rozkładu prawdopodobieństwa z zadania 40. Sprawdź czy jest on produktem swoich rozkładów brzegowych.*

Zadanie 42. *Znajdź prawdopodobieństwo przy rozkładzie z zadania 40 następujących podzbiorów płaszczyzny*

1. $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$,
2. $\{(x,y) : x < 0 \wedge y > 0\}$
3. $\{(x,y) : xy > 0\}$
4. $\{(x,y) : x > y\}$

Zadanie 43. *Sprawdź czy następujące funkcje są dystrybuantami rozkładu prawdopodobieństwa na płaszczyźnie*

(1)

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \vee y < 0 \\ 1 - e^{-x} - \ln^{-1}(e+y) + e^{-x}\ln^{-1}(e+y) & \text{dla } x, y > 0 \end{cases}$$

(2)

$$G(x,y)=\begin{cases}0 & \text{dla } x,y<0\\ \exp(x+y) & \text{dla } x\leqslant -y\wedge y>0\\ \frac{x}{-y} & \text{dla } x\leqslant -y\wedge y<0\wedge x>0\\ 1 & \text{dla } x>-y\end{cases}.$$

Zadanie 44. *Znajdź prawdopodobieństwo przy rozkładzie o dystrybuancie danej wzorem (2) z zadania 43 następujących podzbiorów płaszczyzny:*

- $\{(x,y): x^2+y^2<1\}$
- $\{(x,y): x<0\wedge y>0\}$
- $\{(x,y): xy>0\}$
- $\{(x,y): x>y\}$

Zadanie 45. *Rzucamy dwukrotnie kostką. Wartość pierwszej współrzędnej jest równa wartości bezwzględnej różnicy oczek w obu rzutach, a wartość drugiej współrzędnej jest równa iloczynowi oczek, które wypadły w obu rzutach. Znajdź rozkład tak określonej dwuwymiarowej zmiennej losowej.*

Zadanie 46. *Rzucamy dwukrotnie kostką. Jeśli za pierwszym razem wypadnie nieparzysta ilość oczek, to od wyniku drugiego rzutu odejmujemy 1; jeśli za pierwszym razem wypadnie parzysta ilość oczek, to podwajamy wynik drugiego rzutu. Znajdź rozkład, ilustrację graficzną rozkładu, dystrybuantę, wartość oczekiwaną i wariancję tak określonej zmiennej losowej.*

Zadanie 47. *Rzucamy dwukrotnie kostką. Wartość pierwszej współrzędnej jest równa wartości bezwzględnej różnicy oczek w obu rzutach, a wartość drugiej współrzędnej jest równa iloczynowi oczek, które wypadły w obu rzutach. Znajdź rozkład tak określonej dwuwymiarowej zmiennej losowej.*

1.1 Wielowymiarowa rozkład normalny.

Uwaga 1. *Gęstość prawdopodobieństw układu n zmiennych losowych normalnych (wielowymiarowy układ normalny) ma postać dana jest wzorem*

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\Delta}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\overline{k_{ij}}(x_i-\mathbb{E}(X_i))(x_j-\mathbb{E}(X_j))\right],$$

gdzie Δ - macierz korelacyjna, $\overline{k_{ij}}$ element macierzy odwrotnej do Δ.

Zadanie 48. *Dana jest macierz kowariancji układu losowych normalnych (X,Y)*

$$\begin{bmatrix}196 & -91\\ -91 & 169\end{bmatrix}.$$

Podaj wzór na dwuwymiarową gęstość prawdopodobieństwa jeśli $\mathbb{E}(X)=26, \mathbb{E}(Y)=-12$.

Zadanie 49. *Dana jest macierz kowariancji układu czterowymiarowej zmiennej losowej (X_1,X_2,X_3,X_4) o rozkładzie normalnym*

$$\begin{bmatrix}15 & 3 & 1 & 0\\ 3 & 16 & 6 & -2\\ 1 & 6 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

Podaj wzór na czterowymiarową gęstość prawdopodobieństwa jeśli $\mathbb{E}(X_1)=10, \mathbb{E}(X_2)=0, \mathbb{E}(X_3)=-10, \mathbb{E}(X_4)=1$.

Zadanie 50. *Dana jest macierz kowariancji układu zmiennych losowych normalnych (X,Y,Z)*

$$\begin{bmatrix}5 & 2 & -2\\ 2 & 6 & 3\\ -2 & 3 & 8\end{bmatrix}.$$

Podaj wzór na gęstość prawdopodobieństwa jeśli $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(Z)=0$.

Zadanie 51. *Dana jest gęstość prawdopodobieństwa*

$$f(x,y,z) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{8}(2x^2 + 4y^2 - 2y(z+5) + (z+5)^2)\right].$$

Zbuduj macierz kowariancji.

Zadanie 52. *Dana jest gęstość prawdopodobieństwa*

$$f(x,y) = c\exp\left[-(4(x-5)^2 + 2(x-5)(y-3) + 5(y-3)^2)\right].$$

Wyznacz c, a następnie zbudować macierz kowariancji.

Zadanie 53. *Wiedząc, że układ zmiennych losowych o rozkładzie normalnym ma brzegowe wartości oczekiwane równe zero oraz macierzy kowariancji równą*

- $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
- $M = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

wyznacz jego gęstość.

Zadanie 54. *Trójwymiarowa zmienna losowa (X,Y,Z) ma rozkład o gęstości*

- $f(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\sqrt{6\pi}} \exp\{-\frac{1}{12}[6x^2 + (4(y-1)^2 + (z+2)^2 - 2(y-1)(z+2)]\}$,
- $f(x,y,z) = c\exp\{-\frac{1}{2}[2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz + 4xz]\}$,

Wyznacz macierz kowariancji (w przykładzie drugim wyznacz wcześniej stałą c).

1.2 Niezależność zmiennych losowych.

Zadanie 55. *Udowodnij, że dla przypadków, gdy*

(i) $W_{X_i} = \{0,1\},\ i = 1,2,\ P(\{X_i = 0\}) = p, \quad 0 < p < 1,$

(ii) $W_{X_i} = \{-1,1\},\ i = 1,2,\ P(\{X_i = 1\}) = p, \quad 0 < p < 1.$

warunkiem koniecznym i wystarczającym niezależności zmiennych losowych X_1, X_2 jest by $\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$.

Zadanie 56. *Niech $X, Y (Y \neq 0)$ niezależne zmienne losowe. Udowodnij, że zmienne losowe X oraz Y^{-1} są również niezależne.*

Zadanie 57. *X, Y niezależne zmienne losowe, $P(\{X > 0\}) = 1$. Udowodnij, że zdarzenia $\{Y > 2\}$ i $\{-1 < X < 1\}$ są niezależne.*

Zadanie 58. *X, Y niezależne zmienne losowe, $P(\{Y > 0\}) = 1$. Udowodnij, że zmienne losowe X, Y^2 są niezależne.*

Zadanie 59. *(X,Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie $\{(x,y) : x, y > 0, x + y < 1\}$. Czy zmienne losowe X, Y są niezależne?*

Zadanie 60. *Niech (X,Y) zmienna losowa o gęstości*

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{dla } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}.$$

Czy X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi?

Zadanie 61. *Zbadaj, czy zmienne losowe X, Y są niezależne, jeśli dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład o gęstości*

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right).$$

Zadanie 62. *Zbadaj, czy zmienne losowe X, Y są niezależne, jeśli dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości*

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \text{ dla } x^2 + y^2 < 4.$$

Zadanie 63. *X zmienna losowa o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$ oraz $Y_1 = \sin 2\pi X, Y_2 = \cos 2\pi X$. Oblicz współczynnik korelacji $\rho(Y_1, Y_2)$. Czy Y_1, Y_2 są niezależne?*

Zadanie 64. *Niech ω wynik rzutu kostką, $X(\omega) = [\frac{\omega}{\sqrt{6}}], Y(\omega) = [\frac{\omega}{\pi}]$ ($[a]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej a). Czy X, Y są niezależne?*

Zadanie 65. *Niech A, B zdarzenia niezależne i $X = \mathbb{I}_A, Y = \mathbb{I}_B$ ($\mathbb{I}_C$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru C). Czy X, Y są zmiennymi losowymi niezależnymi?*

Zadanie 66. *X, Y niezależne zmienne losowe. Oblicz $\mathbb{E}((X + Y)^2)$ wiedząc, że*

- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}, \mathbb{E}(Y) = \frac{2}{3}, \mathbb{D}^2(X) = \frac{1}{2}, \mathbb{D}^2(Y) = \frac{1}{2}$.
- $\mathbb{E}(X) = \pi, \mathbb{E}(Y) = -\pi, \mathbb{D}^2(X) = 1, \mathbb{D}^2(Y) = 1$.

Zadanie 67. *X, Y niezależne zmienne losowe. Oblicz $\mathbb{E}((X - Y)^2)$ wiedząc, że*

- $\mathbb{E}(X) = 2, \mathbb{E}(Y) = 2, \mathbb{D}^2(X) = \frac{3}{2}, \mathbb{D}^2(Y) = \frac{1}{2}$.
- $\mathbb{E}(X) = 2, \mathbb{E}(Y) = 1, \mathbb{D}^2(X) = \frac{1}{2}, \mathbb{D}^2(Y) = \frac{1}{2}$.

Zadanie 68. *Udowodnij, że jeśli X, Y niezależne zmienne losowe, to zachodzi $\mathbb{D}^2(XY) = \mathbb{D}^2(X)\mathbb{D}^2(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2\mathbb{D}^2(X) + (\mathbb{E}(X))^2\mathbb{D}^2(Y)$.*

Zadanie 69. *Niech (ω_1, ω_2) będzie wynikiem dwukrotnego rzutu kostką. Czy zmienne losowe*

$$X = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \omega_1 - \omega_2 \text{ jest parzyste} \\ 0 & \text{jeśli } \omega_1 - \omega_2 \text{ jest nieparzyste} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } 3 \text{ dzieli } \omega_1 - \omega_2 \\ 0 & \text{jeśli } 3 \text{ nie dzieli } \omega_1 - \omega_2 \end{cases}$$

są niezależne?

Zadanie 70. *Niech zmienne losowe X, Y będą niezależne. Wtedy*

$$\mathbb{D}^2(XY) \geqslant \mathbb{D}^2(X)\mathbb{D}^2(Y).$$

Zadanie 71. *(X, Y) ma rozkład o gęstości $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{x^2+y^2}{2}) + ag(x, y)$, gdzie*

$$g(x, y) = \begin{cases} xy & \text{dla } |x|, |y| < 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}.$$

Czy X, Y są niezależne? Oblicz współczynnik korelacji i momenty zwykłe do rzędu 2 włącznie.

Zadanie 72. *Wrzucamy do trzech komórek trzy kule (kule i komórki ponumerowane). N - ilość zajętych komórek, X_i - ilość kul w i - tej komórce. Znajdź łączny rozkład (X_1, N). Znajdź rozkłady brzegowe. Czy zmienne losowe X_1 i N są niezależne?*

Zadanie 73. *Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość prawdopodobieństwa zadaną wzorem*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } |x| + |y| \leqslant 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}.$$

- *Oblicz współczynnik korelacji, rozkłady brzegowe i dystrybuantę.*
- *Czy zmienne losowej X, Y są niezależne.*

Zadanie 74. *X, Y są dwiema niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$. Oblicz $\mathbb{E}(Z)$ jeżeli $Z = X + Y$.*

1.3 Funkcje zmiennych losowych po raz drugi.

Zadanie 75. *Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkłady wykładnicze.*

- *Policz rozkład zmiennej $Z = X + Y$.*
- *Policz momenty rzędu pierwszego i drugiego.*

Zadanie 76. *Oblicz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z = X + Y$, gdzie X, Y są niezależnymi i mają gęstości równe odpowiednio*

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp^{-\frac{x^2}{4}}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \exp^{-\frac{y^2}{64}}.$$

Zadanie 77. *Oblicz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z = X - Y$, gdzie X, Y są niezależnymi i mają gęstości równe odpowiednio*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \exp^{-\frac{x^2}{6}}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{y^2}{8}}.$$

Zadanie 78. *Znajdź wzór na gęstość zmiennej losowej $Z = XY$, jeżeli dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości $f(x, y)$.*

Zadanie 79. *Zmienna losowa X posiada rozkład równomierny na $[0, 1]$. Wyznacz*

a) rozkład $\eta = \max\{X, 1 - X\}$,

b) rozkład $\xi = \min\{X, 1 - X\}$,

c) $\mathbb{E}(\eta), \mathbb{E}(\frac{\eta}{1-\eta}), \mathbb{E}(\frac{1-\eta}{\eta})$,

d) $\mathbb{E}(\xi), \mathbb{E}(\frac{\xi}{1-\xi}), \mathbb{E}(\frac{1-\xi}{\xi})$.

Zadanie 80. *Niech X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$ każda. Czy $Z = X + Y$ ma rozkład jednostajny na jakimś zbiorze?*

Zadanie 81. *Niech X, Y niezależne zmienne losowe. Wyprowadź wzór na gęstość $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ w zależności od gęstości X i gęstości Y.*

Zadanie 82. *Niech X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Znajdź gęstość $Z = X^2 + Y^2$.*

Zadanie 83. *Znajdź złożenie rozkładu Poissona zależącego od parametru λ, z rozkładem wykładniczym, któremu ten parametr podlega.*

Zadanie 84. *Niech niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkłady wykładnicze z parametrami $a, b > 0$ odpowiednio. Znajdź rozkład $Z = X + Y$.*

Zadanie 85. *Niech niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkłady normalne z odchyleniami standardowymi 2, 4 odpowiednio (wartość średnia obydwu rozkładów równa 0). Znajdź rozkład*

- *$Z = X + Y$,*
- *$Z = X - Y$.*

Zadanie 86. *Niech X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładach $P(\{X = 1\}) = P(\{X = 4\}) = \frac{1}{2}$, $P(\{Y = 0\}) = P(\{Y = 1\}) = P(\{Y = 2\}) = \frac{1}{3}$. Znajdź rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$.*

Zadanie 87. *X_1, X_2 niezależne zmienne losowe o rozkładzie Poissona z $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Znajdź rozkład $Y = X_1 + X_2$.*

Zadanie 88. *X_1, X_2 niezależne zmienne losowe o rozkładzie wykładniczym z $\lambda > 0$. Znajdź gęstość rozkładu $Y = X_1 - X_2$.*

Zadanie 89. *Niech X, Y niezależne zmienne losowe, $F_X(x) = \frac{x^2}{2}$ dla $0 < x \leqslant \sqrt{2}$ i $F_Y(y) = y$ dla $0 < y < 1$. Oblicz F_{X+Y}.*

Zadanie 90. *Niech X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładzie ciągłym. Wyraź gęstość zmiennej losowej $Z = \min(X, Y)$ przy pomocy gęstości X i Y.*

Zadanie 91. *X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, \lambda]$, gdzie Λ podlega rozkładowi jednostajnemu na [0, 1]. Znajdź złożenie rozkładów X i Λ .*

Zadanie 92. *X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Znajdź gęstość*

- *$Z = X + Y$;*
- *$Z = X - Y$;*
- *$Z = \max(X, Y)$;*
- *$Z = \min(X, Y)$.*

2 Zadania z listy dr U. Ostaszewskiej

Zadanie 93. *Dwuwymiarowa zmienna losowa* (X, Y) *ma rozkład prawdopodobieństwa określony następująco:*

$$P(\{X = 1, Y = 1\}) = a, P(\{X = 1, Y = 2\}) = 0.3, P(\{X = 3, Y = 1\}) = 0.4, P(\{X = 3, Y = 2\}) = 0.1.$$

Wyznacz stałą a. Zapisz ten rozkład w tabeli. Oblicz wartość dystrybuanty w punktach:$(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$.

Zadanie 94. *Funkcja* $F(x, y)$ *jest określona następująco*

a)

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & dla\ x < 0\ i\ y < 0 \\ 1 & w.p.p \end{cases},$$

b)

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & dla\ x < 0\ lub\ y < 0 \\ 1 & w.p.p \end{cases},$$

c)

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & dla\ x + y \geqslant 0 \\ 0 & w.p.p \end{cases}.$$

Zbadaj czy tak określona funkcja może być traktowana jako dystrybuanta pewnej zmiennej losowej (X, Y).

Zadanie 95. *Dystrybuanta dwuwymiarowej zmiennej losowej* (X, Y) *dana jest wzorem*

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & dla\ x < 2\ lub\ y < 2 \\ \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{y}\right) & w.p.p \end{cases}.$$

Wyznacz dystrybuanty brzegowe i oblicz prawdopodobieństwa $P(X > 2)$, $P(1 < X \leqslant 3,\ 1 < Y \leqslant 3)$.

Zadanie 96. *Na przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$, *gdzie* $\Omega = \{0, 1, \ldots, 9\}$, $P(\omega) = 0{,}1$ *dla dowolnego* $\omega \in \Omega$, *określone są zmienne losowe* $X(\omega)$*- reszta z dzielenia* ω *przez 2,* $Y(\omega)$*- reszta z dzielenia* ω *przez 3. Znajdź rozkład wektora losowego* (X, Y). *Ile wynosi* $P(X = Y)$*?*

Zadanie 97. *Rzucamy trzy razy monetą. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów, natomiast zmienna losowa Y przyjmuje wartość* 0*, jeśli w pierwszym rzucie wypadł orzeł lub wartość* 1*, jeśli w pierwszym rzucie wypadła reszka. Wyznacz rozkład zmienne losowej* (X, Y).

Zadanie 98. *Zmienna losowa dwuwymiarowa* (X, Y) *ma rozkład jednostajny wewnątrz prostokąta ograniczonego odciętymi* $x = a$, $x = b$ *i rzędnymi* $y = c$, $y = d$ $(b > a, d > c)$*. Znajdź gęstość prawdopodobieństwa i dystrybuantę tej zmiennej losowej.*

Zadanie 99. *Funkcja*

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & dla\ 0 \leqslant x < \infty, x \leqslant y < \infty \\ 0 & w.p.p \end{cases}$$

określa gęstość zmiennej losowej (X, Y)*. Oblicz dystrybuantę tej zmiennej.*

Zadanie 100. *Wyznacz dystrybuantę* $F(x, y)$ *dwuwymiarowej zmiennej losowej* (X, Y)*, jeśli dana jest jej gęstość*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & dla\ 0 \leqslant x < 1, x \leqslant y \leqslant 2 - x \\ 0 & w\ p.p. \end{cases}.$$

Zadanie 101. *Dwuwymiarowa zmienna losowa*(X, Y) *ma gęstość*

$$f(x,y) = \begin{cases} cx(x - y) & dla\ 0 < x < 2,\ -x < y < x \\ 0 & w.p.p \end{cases}$$

a) oblicz stałą c,

b) oblicz $P((X, Y) \in A)$*, gdzie* $A = \{(x, y) : 0 < x < 2,\ 0 < y < x\}$*,*

c) znajdź rozkłady brzegowe.

Zadanie 102. *Dana jest funkcja*

$$f(x,y)=\begin{cases}18(x^2-y^2)e^{-x} & dla\ |y|\leqslant x\\ 0 & w.p.p\end{cases}.$$

Zbadaj czy tak określona funkcja jest gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y).

Zadanie 103. *Niech*

$$f(x,y)=\begin{cases}c(x^2+y^2) & dla\ (x,y)\in K\\ 0 & w.p.p\end{cases},$$

gdzie $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\leqslant x\leqslant 1, x-1\leqslant y\leqslant 1-x\}$

a) Wyznacz stałą c tak, aby funkcja $f(x,y)$ była gęstością pewnej zmiennej losowej (X,Y),

b) oblicz $P(X^2+Y^2\leqslant 0{,}5)$.

Zadanie 104. *Niech (X,Y,Z) będzie trzywymiarową zmienną losową o gęstości $f(x,y,z)=cg(x,y,z)$. Wyznacz stałą c, jeżeli*

a) $g(x,y,z)=1$ dla $0\leqslant x\leqslant 1$, $-2\leqslant y\leqslant 3$, $4\leqslant z\leqslant 5$ i $g(x,y,z)=0$ w pozostałej części $\mathbb{R}^3$,

b) $g(x,y,z)=1$ dla $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ i $g(x,y,z)=0$ w pozostałej części $\mathbb{R}^3$,

c) $g(x,y,z)=x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}$ dla $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ i $g(x,y,z)=0$ w pozostałej części $\mathbb{R}^3$, gdzie $l\geqslant 1$, $m\geqslant 1$, $n\geqslant 1$.

Zadanie 105. *Zmienna losowa (X,Y) ma gęstość*

$$f(x,y)=\frac{a}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)},$$

a) wyznacz parametr a,

b) znajdź dystrybuantę $F(x,y)$,

c) znajdź rozkłady brzegowe.

Zadanie 106. *Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa trzywymiarowej zmiennej losowej (X,Y,Z) mając daną dystrybuantę*

$$F(x,y,z)=(1-e^{-ax})(1-e^{-by})(1-e^{-cz})$$

dla $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

Zadanie 107. *Oblicz prawdopodobieństwo trafienia punktu o współrzędnych (X,Y) w obszar określony nierównościami $1\leqslant x\leqslant 2$, $1\leqslant y\leqslant 2$, jeżeli współrzędne punktu (X,Y) mają następującą dystrybuantę*

$$F(x,y)=\begin{cases}1-a^{-x^2}-a^{-y^2}+a^{-x^2-2y^2} & dla x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ 0 & w.p.p\end{cases}.$$

Zadanie 108. *Współrzędne punktu losowego (X,Y) mają rozkład jednostajny wewnątrz prostokąta ograniczonego odciętymi 0 i a oraz rzędnymi 0 i b. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia punktu losowego w koło o promieniu R, jeżeli $a>b$, a środek koła pokrywa się z początkiem układu współrzędnych.*

Zadanie 109. *Gęstość prawdopodobieństwa układu zmiennych losowych (X,Y) dana jest wzorem*

$$f(x,y)=\begin{cases}c(R-\sqrt{x^2+y^2}) & dla\ x^2+y^2\leqslant R^2\\ 0 & w.p.p\end{cases}.$$

Wyznacz stałą c oraz prawdopodobieństwo trafienia w koło o promieniu $a<R$ ze środkiem w początku układu współrzędnych.

Zadanie 110. *Zmienna losowa dwuwymiarowa (X,Y) ma rozkład dany gęstością*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{4}{3x^2y^2} & dla x\geqslant 1,\ \frac{1}{x}\leqslant y\leqslant x^2\\ 0 & w.p.p\end{cases}.$$

Znajdź dystrybuantę tej zmiennej losowej.

Zadanie 111. *Niech $\lambda > 0$ oraz niech*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \alpha e^{-\lambda(x+y+z)} & dla\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \\ 0 & w.p.p \end{cases}.$$

Dla jakiej wartości parametru α funkcja $f(x,y,z)$ jest gęstością wektora losowego? Wyznacz dystrybuantę tej zmiennej losowej.

Zadanie 112. *Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład prawdopodobieństwa określony następująco:*

$$P(X=1,Y=1)=0,2, P(X=1,Y=2)=0,3, P(X=3,Y=1)=0,4, P(X=3,Y=2)=0,1.$$

- *Zapisz ten rozkład w tabeli,*
- *zbadaj czy zmienne losowe X i Y są niezależne,*
- *wyznacz dystrybuantę i wartość przeciętną zmiennej losowej X,*
- *oblicz wartość dystrybuanty dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y) w punkcie $(2,2)$.*

Zadanie 113. *W 10-cio elementowej partii pewnego towaru są 2 sztuki wadliwe. Wylosowano bez zwrotu 2 sztuki. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości równe liczbie sztuk wadliwych wśród 2 wylosowanych sztuk, zaś Y przyjmuje wartość 1, jeśli pierwsza wylosowana sztuka jest wadliwa, oraz 0, jeśli nie jest wadliwa.*

- *Wyznacz rozkład dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y),*
- *zbadaj czy zmienne losowe X i Y są niezależne,*
- *oblicz współczynnik korelacji zmiennych X i Y.*

Zadanie 114. *Rzucamy kolejno 5 razy monetą. Oznaczmy przez X liczbę wyrzuconych orłów, przez Y liczbę serii orłów, a przez Z długość najdłuższej serii.*

- *Wyznacz rozkłady dwuwymiarowych zmiennych losowych (X,Y), (X,Z) oraz (Y,Z),*
- *wyznacz rozkłady brzegowe poszczególnych zmiennych losowych,*
- *oblicz $P(X=3, Z \leqslant 2)$,*
- *wyznacz rozkład trzywymiarowej zmiennej losowej (X,Y,Z).*

Zadanie 115. *Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład jednostajny odpowiednio na przedziałach $(0,a)$ i $(0,\frac{1}{2}\pi)$. Znajdź $P(X < b\cos Y)$, gdzie $0 < b < a$.*

Zadanie 116. *Jakie jest prawdopodobieństwo, że równanie $x^2 - 2Bx + C = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, jeśli B i C są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $Exp(\lambda)$?*

Zadanie 117. *Momenty przybycia autobusów A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi X, Y o rozkładzie wykładniczym z parametrami α i μ*

a) znajdź rozkład momentu przybycia pierwszego autobusu,

b) oblicz prawdopodobieństwo, że autobus A przyjedzie pierwszy.

Zadanie 118. *Dana jest funkcja*

$$f(x,y) = ce^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}$$

- *wyznacz stałą c tak, aby dana funkcja byłą gęstością zmiennej losowej (X,Y),*
- *wyznacz rozkłady brzegowe,*
- *czy zmienne losowe X i Y są niezależne?*

Zadanie 119. *Dana jest gęstość prawdopodobieństwa układu zmiennych losowych(X,Y)*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y) & dla\ 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ 0 & w.p.p. \end{cases}$$

- *wyznacz dystrybuantę układu,*

- *wyznacz rozkłady brzegowe,*
- *zbadaj czy zmienne losowe są niezależne.*

Zadanie 120. *Niech dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na K, gdzie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqslant a\}$. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?*

Zadanie 121. *Trójwymiarowa zmienna losowa (X, Y, Z) ma rozkład równomierny w obszarze $V = \{(x, y, z) : x^2+y^2 \leqslant 4 \wedge 0 \leqslant z \leqslant 1\}$. Wyznacz gęstość rozkładu brzegowego zmiennej losowej Z oraz oblicz wartość oczekiwaną $\mathbb{E}(Z)$, czy zmienne losowe X, Y oraz Z są niezależne?*

Zadanie 122. *Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony gęstością*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{xy^3} & \text{dla } a < x < y < \infty \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

- *sprawdź dla jakiego a podana funkcja jest gęstością,*
- *znajdź dystrybuantę,*
- *znajdź gęstości rozkładów brzegowych,*
- *sprawdź czy zmienne X i Y są niezależne,*
- *policz wartości przeciętne rozkładów brzegowych.*

Zadanie 123. *Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość daną wzorem*

$$f(x, y) = \begin{cases} A & \text{dla } (x, y) \in V \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases},$$

gdzie V jest obszarem ograniczonym półokręgiem o promieniu 1, położonym nad osią Ox. Oblicz $\mathbb{E}(XY)$.

Zadanie 124. *Dwie niezależne zmienne losowe X i Y mają rozkłady normalne $\mathcal{N}(m, \sigma)$ z takimi samymi parametrami. Znajdź współczynnik korelacji zmiennych losowych $U = aX + bY$ i $V = aX - bY$.*

Zadanie 125. *Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość daną wzorem*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{12}{11}(2x^2 + xy) & \text{dla } (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}.$$

Oblicz współczynnik korelacji.

Zadanie 126. *Niech S będzie trójkątem ograniczonym prostymi $y = -x$, $y = x$ oraz $y = 1$. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość daną wzorem*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla} (x, y) \in S \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

- *oblicz kowariancję $\operatorname{cov}(X, Y)$,*
- *oblicz współczynnik korelacji zmiennych losowych X, Y,*
- *czy zmienne losowe X i Y są niezależne?*

Zadanie 127. *Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi i mają rozkład*

- *jednostajny na przedziale $[\alpha, \beta]$,*
- *równomierny dwupunktowy $W_{X_i} = \{1, 2\}$.*

Niech $U = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, natomiast $V = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Wyznacz rozkład dwuwymiarowej zmiennej losowej (U, V).

Zadanie 128. *Niech $F(x, y)$ będzie dystrybuantą dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y), a $G(x, y)$ będzie dystrybuantą dwuwymiarowej zmiennej losowej (U, V), gdzie $U = \max(X, Y)$ oraz $V = \min(X, Y)$. Wyrazić $G(x, y)$ przez $F(x, y)$.*

Bibliografia

[1] Ostaszewska Urszula. *Lista 1, probabilistyka*. 2013. URL: http://math.uwb.edu.pl/~uostasze/prob_13_1.pdf (term. wiz. 15. 03. 2020).

[2] Ostaszewska Urszula. *Lista 2, probabilistyka*. 2013. URL: http://math.uwb.edu.pl/~uostasze/prob_13_2.pdf (term. wiz. 15. 03. 2020).

[3] Ostaszewska Urszula. *Lista 3, probabilistyka*. 2013. URL: http://math.uwb.edu.pl/~uostasze/prob_13_3.pdf (term. wiz. 15. 03. 2020).