Rachunek prawdopodobieństwa - ćwiczenia czwarte*
Schematy rachunku prawdopodobieństwa.
Prawdopodobieństwo geometryczne.
kierunek: informatyka i ekonometria I°

dr Jarosław Kotowicz

29 października 2011

Spis treści

1 Zadania z wykładu

Schematy rachunku prawdopodobieństwa

Zadanie 1. *Z urny zawierającej 2 kule białe i 3 czarne losujemy 5 razy po 2 kule, wrzucając je po każdym losowaniu z powrotem do urny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że 3 razy zostanie wylosowana para kul różnokolorowych?*

Zadanie 2. *30000 abonentów centrali telefonicznej. Prawdopodobieństwo, że dany abonent zgłosi się w ciągu ustalonych 10 minut wynosi* $\frac{1}{10000}$. *Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu 10 minut zgłosi się dokładnie 4 abonentów?*

Zadanie 3. *Które ze zdarzeń jest bardziej prawdopodobne:*

- *w 4 rzutach kostką wypadnie chociaż raz 6 oczek,*
- *w 24 rzutach dwoma kostkami chociaż raz wypadnie para (6,6).*

Zadanie 4. *Oddział chirurgii pewnego szpitala przygotował 20 łóżek na dobowy ostry dyżur. Prawdopodobieństwo przyjścia chorego na ten oddział w tym dniu wynosi 0,4. Obliczyć prawdopodobieństwo, że zostanie tego dnia przyjętych co najmniej 4 chorych.*

Zadanie 5. *Partia towaru liczy N sztuk. Weryfikacja jakości odbywa się w ten sposób, że po wykryciu wadliwych k sztuk w próbie n elementów partia taka będzie odrzucona, $(1 < k < n < N)$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że partia zawierająca n wadliwych sztuk będzie przyjęta.*

Prawdopodobieństwo geometryczne

Zadanie 6. *Monetę o promieniu r rzucamy na parkiet utworzony z przystających kwadratów o boku $2a$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że moneta przykryje przynajmniej dwa kwadraty, jeśli $r < a$.*

Zadanie 7. *W kwadrat o boku a wpisano koło, a następnie w te koło wpisano kwadrat. Wybieramy losowo punkt z większego kwadratu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że punkt będzie należał do koła i nie będzie należał do mniejszego kwadratu.*

Zadanie 8. *Z odcinka $[0, 1]$ wybieramy niezależnie dwie liczby x, y. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z odcinków o długości $1, x, y$ można zbudować trójkąt.*

Zadanie 9. *W każdym spośród n niezależnych doświadczeń obserwuje się wartości zmiennej losowej X o rozkładzie równomiernym na odcinku $[0, L]$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zaobserwowania chociaż jednej wartości w odcinku $(a, b) \subseteq [0, L]$, jeżeli wiadomo, że wszystkie wartości n leżą w przedziale $(c, d), (a, b) \subseteq (c, d) \subseteq [0, L]$.*

2 Zadania do samodzielnego rozwiązania

2.1 Schematy rachunku prawdopodobieństwa

1. Co jest bardziej prawdopodobne: wygrać z równorzędnym przeciwnikiem
   - 2 partie z 3, czy
   - 3 partie z 5 ?
2. W centrali telefonicznej jest n linii, z których każda niezależnie od pozostałych może być zajęta. Prawdopodobieństwo, że dana linia jest wolna wynosi p. Znaleźć najbardziej prawdopodobną liczbę linii wolnych.
3. Zdarzenie A pojawia się z tym samym prawdopodobieństwem w ciągu niezależnych doświadczeń losowych. Prawdopodobieństwo, że A nastąpi w ciągu czterech doświadczeń przynajmniej raz wynosi $\frac{1}{2}$. Jakie jest prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w jednym doświadczeniu?
4. Jakie jest prawdopodobieństwo parzystej ilości sukcesów w schemacie Bernoulliego, jeśli $p = \frac{1}{2}$?
5. Jakie jest prawdopodobieństwo parzystej ilości sukcesów w schemacie Bernoulliego, jeśli p jest dowolne?
6. Ile razy należy rzucić kostką, aby prawdopodobieństwo wypadnięcia pięciu oczek było niemniejsze niż $\frac{1}{2}$?
7. Prawdopodobieństwo wypadku akrobaty przy pierwszym w danym dniu występie wynosi $\frac{1}{10000}$, natomiast przy drugim $\frac{1}{1000}$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że akrobata nie będzie miał wypadku pod czas 100 kolejnych występów, przy założeniu, że
   - ma jeden występ dziennie,
   - ma dwa występy dziennie.
8. W ciągu godziny jest średnio 60 zgłoszeń. Telefonistka wyszła na pół minuty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w tym czasie:
   - nie będzie żadnego zgłoszenia;
   - będzie dokładnie jedno zgłoszenie?
9. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że przy n niezależnych rzutach monetą liczba uzyskanych orłów będzie większa niż liczba uzyskanych reszek.

10. Centrala abonencka obsługuje 10 telefonów. Prawdopodobieństwo, że w ciągu t- minut zadzwoni jeden abonent wynosi 0,4. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu t minut zadzwoni:
    - 15 abonentów;
    - ca najmniej 2 abonentów;
    - nie więcej niż 3 abonentów.
11. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że w 10 rzutach monetą orzeł wypadnie
    - dokładnie 2 razy;
    - co najwyżej dwa razy;
    - co najmniej dwa razy.
12. Jeżeli przeciętnie 5 dni w tygodniu jest deszczowych, to jakie jest prawdopodobieństwo, że 2 dni z 3 będą pogodne?
13. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 500 osób co najmniej 2 osoby będą miały urodziny w Nowy Rok, jeśli przyjmiemy, że rok liczy 365 dni.
14. Średnio 977 ziarna na 1000 kiełkuje. Jakie jest prawdopodobieństwo, że siejąc 1000000 ziaren 995000 wykiełkuje.
15. Prawdopodobieństwo trafienia samolotu z pojedynczego działa wynosi $0,1$. Samolot został ostrzelany salwą z 10 dział. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że samolot został trafiony.
16. Prządka obsługuje 1000 wrzecion. Wiadomo, że prawdopodobieństwo zerwania się nitki jednego wrzeciona w ciągu 1 minuty wynosi $0,004$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu 1 minuty zerwą się co najwyżej 3 nitki na trzech wrzecionach.
17. Prawdopodobieństwo awarii sieci cieplnej na danym osiedlu w ciągu jednej doby wynosi $0,2$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu 15 dni nastąpi:
    - 5 awarii;
    - najwyżej dwie awarie.
18. Sześciu robotników korzysta z przerwami i niezależnie od siebie z energii elektrycznej. Każdy z nich podłączony jest średnio 8 minut w ciągu godziny. Sieć elektryczna jest przeciążona jeśli co najmniej 5 robotników pobiera energię elektryczną. Obliczyć prawdopodobieństwo przeciążenia sieci.
19. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losują ze zwracaniem trzy razy po trzy kule z urny zawierającej 7 kul białych, 5 czarnych i 3 niebieskie otrzymamy dokładnie 2 razy różnokolorowe kule.
20. Grupa studentów licząca 22 osoby pisze kolokwium. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dokładnie dwie osoby zaliczą je, jeśli prawdopodobieństwo zaliczenia kolokwium przez pojedynczego studenta wynosi 0,1.
21. W urnie znajduje się 18 kul czarnych i 12 białych. Losujemy kule pojedynczo za każdym razem zwracając. Obliczyć prawdopodobieństwo
    - wszystkie trzy kule są czarne;
    - otrzymano dokładnie dwie kule czarne.
22. Pewne zdarzenie może zajść w dowolny dzień tygodnia z takim samym prawdopodobieństwem Obliczyć prawdopodobieństwo nie zajścia zdarzenia w określony dzień tygodnia (np. w środę) w ciągu 12 kolejnych tygodni, jeśli wiadomo iż zdarzenie zachodzi każdego tygodnia.
23. Na przystanku tramwajowym czeka 10 pasażerów. Wiedząc, że tramwaj składa się z dwóch wagonów obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że do każdego wagonu wsiądzie po 5 pasażerów.
24. Prawdopodobieństwo pojawienia się zdarzenia A w pojedynczym doświadczeniu jest równe $p > 0$. Oszacować liczbę niezależnych doświadczeń n by prawdopodobieństwo zdarzenia, że chociaż w jednym z tych doświadczeń wystąpi zdarzenie A było większe lub równe niż $p_0, p < p_0 < 1$.

2.2 Prawdopodobieństwo geometryczne

1. Odcinek $[0,1]$ jest w sposób losowy dzielony na dwie części. Część dłuższą znów w sposób losowy dzielona jest na dwie części. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że z tak otrzymanych trzech odcinków da się zbudować trójkąt.

2. **Problem Buffone'a.** Płaszczyzna jest pokryta prostymi równoległymi w odstępach równych a. Na tą płaszczyznę rzucamy igłę o długości $l, l < a$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie jedną z prostych?

3. Na układ prostych równoległych odległych o d jednostek rzucamy monetę o promieniu r takim, że $2r < d$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że moneta nie przetnie żadnej z tych prostych.

4. Na stół podzielony na równe prostokątne trójkąty równoramienne o ramionach równych a, pada moneta o promieniu r. Obliczyć prawdopodobieństwo, że moneta nie przetnie żadnego boku trójkąta. Podać warunek na r.

5. Dwaj studenci umówili się na przystanku tramwajowym miedzy godziną 13.00, a 14.00. Każdy z nich od momentu przyjścia miał czekać tylko 15 minut. Obliczyć prawdopodobieństwo, że studenci się spotkają.

6. Dwaj studenci umówili się na spotkanie na przystanku autobusowym między godzinami 12.00, a 13.00. Każdy z nich po przyjściu będzie czekał dokładnie 12 minut. Obliczyć prawdopodobieństwo, tego że obydwaj się spotkają, jeśli przyjście każdego z nich o danej godzinie jest jednakowo możliwe i niezależne od przyjścia drugiego.

7. W dany kwadrat o boku $2a$ wpisujemy koło, a następnie w koło kolejny kwadrat. Wybieramy losowo punkt z większego kwadratu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrany punkt należy do kwadratu mniejszego.

8. Nieskończona prostokątna krata składa się z prętów w kształcie walca o promienie r. Odległości między osiami równoległych walców wynoszą odpowiednia a i b. Obliczyć prawdopodobieństwo trafienia kulą o średnicy d w kratę w jednym rzucie, jeśli trajektoria lotu kuli jest prostopadła do płaszczyzny kraty.

9. W koło o promieniu r wpisano trójkąt równoboczny, a w trójkąt kolejne koło. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losując trzy punkty z większego koła dokładnie jeden trafi do mniejszego koła, drugi do trójkąta i nie trafi do wpisanego koła.

10. W koło o promieniu 1 wpisano trójkąt równoboczny. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany punkt z koła należy do trójkąta.

11. *W trzech następnych zadaniach mamy $\Omega = [0,1], P$ jest miarą Lebesgue'a na $[0,1]$ tj. jest długość.* Podać przykład zdarzeń niezależnych A_1, A_2 takich, że $P(A_1) = P(A_2) = \frac{2}{3}$.

12. Podać przykład zdarzeń niezależnych A_1, A_2, A_3 takich, że $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$.

13. Podać przykład zdarzeń niezależnych $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takich, że $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_3) = \frac{1}{2}$.

14. Z kwadratu $[0,1] \times [0,1]$ losowany jest punkt (x, y). Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że $\mid x - y \mid < r, 0 < r < 1$.

15. W kwadrat o boku a wpisano koło. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wszystkie n losowo wybrane punkty z kwadratu należą do koła.

16. Z odcinka $[0, L]$ losujemy niezależnie N liczb. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że n spośród tych liczb będzie z odcinka $(a, b) \subseteq [0, L], 0 \leqslant n \leqslant N$.

17. Z kuli o promieniu R wylosowano N punktów. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że odległość od środka kuli do najbliżej położonego punktu jest większa lub równa $a, 0 < a < R$.

18. W koło wpisany jest kwadrat. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z pięciu punktów rozmieszczonych losowo w kole jeden znajdzie się w kwadracie, a pozostałe po jednym w każdym z czterech wycinków koła.

19. Z odcinka (a, b) losowanych jest niezależnie n punktów. W odcinku tym zawarte są rozłączne odcinki $(c_1, d_1), (c_2, d_2)$. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że dokładnie k_1 punktów będzie należało do (c_1, d_1), a k_2 do (c_2, d_2), jeśli $0 \leqslant k_1 + k_2 \leqslant n$.

20. Zmienna losowa X posiada rozkład skoncentrowany na odcinku $(a, b]$. Wykonywanych jest n niezależnych doświadczeń. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że w k doświadczeniach wartości X będą z przedział (a, c), a pozostałych $n - k$ doświadczeń wartości X będą z przedziału $[c, d], 0 \leqslant k < n$.