Rachunek prawdopodobieństwa - ćwiczenia piąte*
Jednowymiarowa zmienna losowa.
kierunek: informatyka i ekonometria I°

dr Jarosław Kotowicz

04 listopada 2011

Spis treści

1 Zadania z wykładu

Zadanie 1. *Rzucamy dwoma symetrycznymi kostkami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej i jej dystrybuantę.*

Zadanie 2. *3 nierozróżnialne kule wrzucamy do 4 urn. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe ilości urn pustych. Wyznaczyć rozkład tej zmiennej losowej oraz jej dystrybuantę.*

Zadanie 3. *Dany jest odcinek $[0, L]$ i punkt r należący do tego odcinka. Z odcinka losujemy dwa punkty x_1, x_2. Zmienna losowa X przyjmuje wartość 1, gdy punkt r znajduje się miedzy wylosowanymi punktami oraz 0 w przeciwnym wypadku. Podać rozkład zmiennej losowej X i wyznaczyć jej dystrybuantę.*

Zadanie 4. *Z prostokąta o bokach długości a i b, gdzie $a < b$ losujemy punkt. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe odległości punktu od najbliższego krótszego boku. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X i wyznaczyć jej dystrybuantę.*

2 Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Z kwadratu o boku a losowane są dwa wierzchołki. Wartością zmiennej losowej X jest długość odcinka łączącego te wierzchołki. Wyznaczyć rozkład X.
2. Z sześcianu o krawędzi a losowane są trzy wierzchołki. Wartością zmiennej losowej X jest pole trójkąta wyznaczonego przez te wierzchołki, którego wierzchołkami są one. Wyznaczyć rozkład X.
3. Z kwadratu o boku a losowany jest punkt. Wartością zmiennej losowej X jest odległość od najbliższego boku. Wyznaczyć rozkład X.
4. Losujemy punkt z trójkąta równobocznego o boku a. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od najbliższego boku. Podać rozkład zmiennej losowej.

5. Dany jest prostokąt o bokach a, b, gdzie $a < b$. Z prostokąta losujemy punkt. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równy odległości punktu od najbliższego dłuższego boku. Podać rozkład zmiennej losowej.

6. Dany jest prostokąt $[0,2] \times [0,4]$. Z prostokąta losujemy punkt. zmienna losowa X przyjmuje wartości równe odległości punktu od najbliższego dłuższego boku. Podać rozkład zmiennej losowej.

7. Dane są dwa koła współśrodkowe o promieniach 1 i 2. Z większego koła losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od mniejszego z okręgów Podać rozkład zmiennej losowej.

8. Z okręgu o promieniu 1 losujemy dwa punkty P, Q. Wartością zmiennej losowej jest długość mniejszego łuku. Wyznaczyć rozkład X.

9. Z koła o promieniach 2 losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od brzegu koła. Podać rozkład zmiennej losowej.

10. A jest zdarzeniem losowym, które można zaobserwować w pojedynczym doświadczeniu $P(A) = p > 0$. Doświadczenia są w sposób niezależny wykonywane do tego momentu, kiedy A zostanie zaobserwowane po raz pierwszy. Wartością zmiennej losowej X jest numer tego doświadczenia kiedy A zostało zaobserwowane pierwszy raz (lub kiedy zostały przerwane próby). Wyznaczyć rozkład X.

11. Z pęku n kluczy wybierany jest jeden i pasowany do zamka. Klucz, który nie pasuje jest odkładany, a z pozostałych jest losowany kolejny klucz. Wartością zmiennej losowej X jest numer tej próby, w której klucz pasuje do zamka. Wiadomo, że tylko jeden klucz otwiera zamek. Wyznaczyć rozkład X.

12. Z kwadratu $[0,1] \times [0,1]$ losowany jest punkt (x, y). Wyznaczyć rozkłady zmiennych losowych $X = \min\{x, y\}, Y = \max\{x, y\}$.

13. Rzucamy raz symetryczną monetą. Zdarzeniu *wypadł orzeł* przyporządkowujemy liczbę 2, a *wypadła reszka* liczbę -1. Podać rozkład zmiennej losowej.

14. Rzucamy dwoma symetrycznymi monetami. Zdarzeniu *wypadły dwie reszki* przyporządkowujemy liczbę 5, *wypadły różne wyniki* liczbę -3, zaś *wypadły dwa orły* liczbę 1. Podać rozkład zmiennej losowej.

15. Rzucamy pięcioma symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów. Podać rozkład zmiennej losowej.

16. Rzucamy dwoma kostkami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe sumie wyrzuconych oczek na obu kostkach. Podać rozkład zmiennej losowej.

17. Dokonujemy 10 jednakowych prób, które są niezależne. W każdej z prób może pojawić się zdarzenie A z prawdopodobieństwem $p, (0 < p < 1)$. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wystąpień zdarzenia A. Znaleźć rozkład zmiennej losowej.

18. W urnie znajdują się 4 kule białe i 4 czarne. Losujemy z urny jednocześnie 4 kule. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wylosowanych kul czarnych. Podać rozkład zmiennej losowej.

19. Rzucamy kostką do gry i czworościanem na ścianach którego są liczby 0,0,1,2. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe

    - sumie;
    - iloczynowi

    wyrzuconych oczek i liczby wypadłej na czworościanie. Podać rozkład zmiennej losowej.

20. Rzucamy trzema monetami na których znajdują się następujące liczby -1 i 1, 0 i 1 oraz 1 i 2. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podać rozkład zmiennej losowej.

21. Rzucamy kostką i monetą. Opisać zmienną losową, jeśli przyjmuję wartości równe
    - sumie oczek na kostce i wypadłych liczb na monecie (orzeł - 0, reszka - 1);
    - ilości wyrzuconych oczek na kostce;
    - iloczynowi ilości oczek na kostce i wypadłych liczb na monecie (orzeł - 0, reszka - 1).
22. Rzucamy kostką do gry i dwiema monetami. Na jednej z monet znajdują się liczby 1 i 2, a na drugiej 0 i 1. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi otrzymanych oczek i wyrzuconych liczb na monetach. Podać rozkład zmiennej losowej.
23. Rzucamy kostką i dwoma symetrycznymi monetami, na których znajdują się odpowiednio liczby -1,1; 0,1. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie wyrzuconych oczek i iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podać rozkład zmiennej losowej.
24. Rzucamy kostką i trzema symetrycznymi monetami, na których znajdują się odpowiednio liczby -1,1; 0,1; -1,0. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie wyrzuconych oczek i iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podać rozkład zmiennej losowej.
25. Rzucamy dwoma kostkami i dwoma symetrycznymi monetami, na których znajdują się liczby 0,1. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek powiększonych o iloczyn wyników otrzymanych na monetach. Podać rozkład zmiennej losowej.
26. Rzucamy dwoma kostkami do gry i monetą na której są cyfry 0 i 1. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi sumy oczek i wyrzuconej liczby na monecie. Podać rozkład zmiennej losowej.
27. Rzucamy dwoma kostkami i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby -1,1. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie liczby wypadłej na monecie i wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podać rozkład zmiennej losowej.
28. Ze zbioru N ponumerowanych elementów losujemy ze zwracaniem n elementów ($1 < n < N$). Niech X, Y będą zmiennymi losowymi przyjmującymi odpowiednio wartość największego i najmniejszego wylosowanego numeru. Wyznaczyć rozkłady X, Y.
29. Uczeń rzuca 4 razy do kosza. Prawdopodobieństwo umieszczenia piłki w koszu wynosi $\frac{1}{4}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej wyznaczonej przez ilość trafień do kosza.
30. Dana jest funkcja
$$f(x) = \begin{cases} a(l^2 - x^2)^{-0,5} & \text{gdy } |x| < l \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}.$$
    Określić parametr a, tak aby funkcja była gęstością, obliczyć dystrybuantę i $P(\{0 \leqslant X < 1\})$.
31. Czy można dobrać parametr a tak, aby podane funkcje były gęstościami pewnego rozkładu zmiennej losowej? Odpowiedź uzasadnij. W przypadku odpowiedzi pozytywnej policzyć ich dystrybuanty.
    - $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in [0,4] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,4] \end{cases}$;
    - $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in [-1,4] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1,4] \end{cases}$;
    - $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{dla } x \in [0,3] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,3] \end{cases}$;
    - $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x \cdot (2-x) & \text{dla } x \in [0,a] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,a] \end{cases}$;
    - $f(x) = \begin{cases} a & \text{dla } x \in [c, c+\frac{1}{a}] \\ 0 & \text{dla } x \notin [c, c+\frac{1}{a}] \end{cases}$;

- $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in [0,1] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,1] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{dla } x \in [1,a] \\ 0 & \text{dla } x \notin [1,a] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ ae^{-x} & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [0,a] \\ x+2 & \text{dla } x \in [0,a] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [0,\frac{\pi}{4}] \\ a\cos x & \text{dla } x \in [0,\frac{\pi}{4}] \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [-1,a] \\ x & \text{dla } x \in [-1,a] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [-a,a] \\ x^2 & \text{dla } x \in [-a,a] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla } x \in [-1,a] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1,a] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [0,1] \\ ax(2+x) & \text{dla } x \in [0,1] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [-1,a] \\ x^2+x & \text{dla } x \in [-1,a] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [-a,a] \\ |x| & \text{dla } x \in [-a,a] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [-a,a] \\ \cos x & \text{dla } x \in [-a,a] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [0,a] \\ x^3 & \text{dla } x \in [0,a] \end{cases};$