

Rachunek prawdopodobieństwa - ćwiczenia szóste*
Jednowymiarowa zmienna losowa – funkcje zmiennych losowych,
parametry liczbowe.
kierunek: informatyka i ekonometria I°

dr Jarosław Kotowicz

04 listopada 2011

Spis treści

1 Zadania z wykładu	1
2 Zadania do samodzielnego rozwiązania	1
2.1 Funkcje jednowymiarowych zmiennych losowych	1
2.2 Parametry liczbowe jednowymiarowych zmiennych losowych	2

1 Zadania z wykładu

Zadanie 1. Niech dana będzie gęstość $f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\mathbf{I}_{[-1,1]}$ oraz niech $\phi(r) = r^2$. Wyznamy gęstość g jednowymiarowej zmiennej losowej $Y = \phi(X)$.

Zadanie 2. Niech X będzie jednowymiarową zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym. Wyznamy $Y = X^2$.

Zadanie 3. Policz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennych losowych o rozkładzie dwumianowym, Poissona, równomiernym na odcinku.

2 Zadania do samodzielnego rozwiązania

2.1 Funkcje jednowymiarowych zmiennych losowych

- X jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$. Znaleźć dystrybuantę i gęstość następujących zmiennych losowych
 - $Y = aX + b$ gdzie $a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$;
 - $Y = 2X^2 - 1$;
 - $Y = -\ln(1 - X)$;
 - $Y = -\ln X$;
 - $Y = X^k, k \in \mathbb{N}$;
- X ma rozkład wykładniczy ze współczynnikiem $\lambda > 0$. Znaleźć gęstość rozkładu następujących zmiennych losowych
 - $Y = X^\alpha, \alpha > 0$

*©J.Kotowicz

- $Y = X^3$;
- $Y = 5X - 1$;
- $Y = 3X + 2$;

3. X ma rozkład normalny $N(0, 1)$. Jaki rozkład ma zmienna $Y = aX + b$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$?

2.2 Parametry liczbowe jednowymiarowych zmiennych losowych

1. Obliczyć dystrybuanty, wartości oczekiwane i wariancje zmiennych losowych z poprzedniej listy.
2. Dane są 4 urny i 3 kule. Rozmieszczamy kule w urnach. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości pustych urn. Obliczyć
 - rozkład zmiennej losowej;
 - wartość oczekiwaną;
 - wariancje zmiennej losowej.
3. Z sześciiany o krawędzi a wylosowano dwa wierzchołki. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości tych wierzchołków. Obliczyć
 - rozkład zmiennej losowej;
 - wartość oczekiwaną;
 - wariancje zmiennej losowej.
4. Z sześciiany o krawędzi a wylosowano trzy wierzchołki. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe polu trójkąta utworzonego z tych wierzchołków. Obliczyć
 - rozkład zmiennej losowej;
 - wartość oczekiwaną;
 - wariancje zmiennej losowej.
5. Spośród zbioru par liczb $\{(k, l) : k, l \in \{0, 1, \dots, 9\}\}$ losowana jest jedna para (m, n) . Wartością zmiennej losowej X jest $m + n$. Wyznaczyć $E(X)$.
6. Trójkąt równoramienny na płaszczyźnie jest utworzony przez wektor $[1, 0]$ oraz inny wektor o długości 1 w kierunku losowym (wierzchołek trójkąta ma rozkład jednostajny na okręgu jednostkowym). Znaleźć dystrybuantę i gęstość rozkładu zmiennej losowej mierzącej długość trzeciego boku.
7. Obliczyć dystrybuantę zmiennej losowej rozkładu jednostajnego na odcinku $]a, b[$.
8. Zmienna losowa podlega rozkładowi według trapezu równoramiennego, o kącie nachylenia ramion $\frac{\pi}{6}$, przy czym $a \leq x \leq b$. Napisać równanie gęstości zmiennej losowej.