Rachunek prawdopodobieństwa - ćwiczenia ósme*
Wielowymiarowa zmienna losowa.
kierunek: informatyka i ekonometria I°

dr Jarosław Kotowicz

09 grudnia 2011 r.

Spis treści

1 Zadania do samodzielnego rozwiązania **1**
1.1 Jednowymiarowy rozkład normalny 1
1.2 Zmienne losowe wielowymiarowe 2

1 Zadania do samodzielnego rozwiązania

1.1 Jednowymiarowy rozkład normalny

1. Dana jest macierz kowariancji układu losowych normalnych (X,Y)

$$\begin{bmatrix} 196 & -91 \\ -91 & 169 \end{bmatrix}.$$

Podać wzór na dwuwymiarową gęstość prawdopodobieństwa jeśli $E(X) = 26, E(Y) = -12$.

2. Dana jest macierz kowariancji układu czterowymiarowej zmiennej losowej (X_1, X_2, X_3, X_4) o rozkładzie normalnym

$$\begin{bmatrix} 15 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 16 & 6 & -2 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Podać wzór na czterowymiarową gęstość prawdopodobieństwa jeśli $E(X_1) = 10, E(X_2) = 0, E(X_3) = -10, E(X_4) = 1$.

3. Dana jest macierz kowariancji układu zmiennych losowych normalnych (X,Y,Z)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Podać wzór na gęstość prawdopodobieństwa jeśli $E(X) = E(Y) = E(Z) = 0$.

4. Dana jest gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x,y,z) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{8}(2x^2 + 4y^2 - 2y(z+5) + (z+5)^2)\right].$$

Zbudować macierz kowariancji.

5. Dana jest gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x,y) = c\exp\left[-(4(x-5)^2 + 2(x-5)(y-3) + 5(y-3)^2)\right].$$

Wyznaczyć c, a następnie zbudować macierz kowariancji.

6. Wiedząc, że układ zmiennych losowych o rozkładzie normalnym ma brzegowe wartości oczekiwane równe zero oraz macierzy kowariancji równą

   - $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
   - $M = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

   wyznaczyć jego gęstość.

7. Trójwymiarowa zmienna losowa (X, Y, Z) ma rozkład o gęstości

   - $f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\sqrt{6\pi}} \exp\{-\frac{1}{12}[6x^2 + (4(y-1)^2 + (z+2)^2 - 2(y-1)(z+2)]\}$,
   - $f(x, y, z) = c\exp\{-\frac{1}{2}[2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz + 4xz]\}$,

   Wyznaczyć macierz kowariancji (w przykładzie drugim wyznaczyć wcześniej stałą c).

1.2 Zmienne losowe wielowymiarowe

1. Dobrać tak stałą c, aby funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy & \text{dla } 1 \leqslant x \leqslant 2, 2 \leqslant y \leqslant 4 \\ 0 & \text{dla pozostałych punktów} \end{cases}$$

była gęstością rozkładu dwuwymiarowego. Dla tak obliczonej stałej policzyć dystrybuantę tego rozkładu oraz rozkłady brzegowe.

2. Czy można dobrać stałą c tak, aby funkcja

   - $f(x,y) = \begin{cases} cxy + x + y & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych punktów} \end{cases}$

   była gęstością rozkładu dwuwymiarowego. Jeśli tak, to dla tak obliczonej stałej policzyć dystrybuantę tego rozkładu oraz rozkłady brzegowe.

3. Wyznaczyć dystrybuanty oraz rozkłady brzegowe następującego rozkładu dwuwymiarowego

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1, x \leqslant y \leqslant 2 - x \\ 0 & \text{dla pozostałych punktów.} \end{cases}$$

4. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład równomierny na kwadracie $\langle 0, 2\rangle^2$. Obliczyć rozkłady brzegowe.

5. Dana jest dwuwymiarowa gęstość

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{9}xy & \text{dla } x, y \in \langle 1, 2\rangle \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}$$

   Obliczyć moment rzędu 2

   - (2,0);
   - (1,1).

6. Dobrać stałą a, tak aby funkcja określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} a & \text{dla } 0 < y < x^2 < 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych} x, y \end{cases}$$

była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej.

7. Dla zmiennej losowej z zadania 6 obliczyć rozkłady brzegowe.

8. Wyznaczyć stałą c, tak aby funkcja $f(x,y) = c\exp(-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2))$ była gęstością. Obliczyć momenty zwykłe rzędu 2, rozkłady brzegowe oraz rozkłady zmiennych $Z_1 = X + Y, Z_2 = X - Y$.

9. Dana jest gęstość prawdopodobieństw układu zmiennych losowych

$$f(x,y) = kxy\exp(-(x^2 + y^2)), x \geqslant 0, y \geqslant 0.$$

Wyznaczyć k rozkłady brzegowe, warunkowe, pierwsze i drugie momenty.

10. Wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa układu trzech zmiennych losowych (X, Y, Z) mając daną dystrybuante

$$F(x,y,z) = \begin{cases} (1 - e^{-ax})(1 - e^{-by})(1 - e^{-cy}) & \text{dla } x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \\ 0 & \textit{dla} \text{ pozostałych.} \end{cases}$$

11. Niech $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą. Wyrazić dystrybuantę układu (X, Y) za pomocą dystrybuant zmiennych losowych X, Y jeśli $Y = g(X)$.

12. Niech $F(x,y)$ będzie dystrybuantą dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y). Wyrazić dystrybuantę układu $(\max(X,Y), \min(X,Y))$ za pomocą dystrybuanty F.

13. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład równomierny na zbiorze $K = \{(x,y)| \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \leqslant 1\}$. Obliczyć wszystkie momenty rzędu 2.

14. (X,Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie $[0,1] \times [0,1]$. Obliczyć wszystkie momenty zwykłe i centralne rzędu 2.

15. Czy można dobrać parametr c tak, aby podane funkcja była gęstością pewnego rozkładu zmiennej losowej.

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy + x & \text{dla } x \in \langle 0, 2\rangle \wedge y \in \langle 0, 1\rangle \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

16. Policzyć dla gęstości z zadania 15
   - rozkłady brzegowe;
   - rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$;
   - momenty zwykłe i centralne rzędu pierwszego i drugiego.

17. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość prawdopodobieństwa zadaną wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} C(x+y)\exp^{-(x+y)} & \text{dla } x > 0 \wedge y > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

   - Obliczyć współczynnik C.
   - Obliczyć rozkłady brzegowe, dystrybuantę i współczynnik kowariancji.

18. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład równomierny na zbiorze $K = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leqslant r^2,\ r > 0\}$. Obliczyć wszystkie momenty rzędu 2.

19. Doświadczenia niezależne przerywane są, gdy zdarzenie losowe A zostanie zaobserwowane po raz drugi. Niech zmienna losowa X_1 oznacza numer doświadczenia, gdy A pojawi się pierwszy raz, X_2 numer doświadczenia, gdy A pojawi się drugi raz. Wyznaczyć rozkład układu (X_1, X_2).

20. Niech u jest funkcją nieparzystą na $\mathbb{R}$ równą 0 poza odcinkiem $(-1, 1)$ oraz
$$| u(r) | < \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{e}}}.$$
a) Sprawdzić, że funkcja
$$f(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\{-\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2)\} + u(r_1)u(r_2),$$
jest gęstością pewnego układu (X_1, X_2).
b) Czy zmienne (X_1, X_2) są niezależne ?

21. Sprawdzić, że jeżeli układ (X_1, X_2) posiada rozkład równomierny na $[0, L] \times [0, L]$, to zmienne $| X_1 - X_2 |$ oraz $\min\{X_1, X_2\}$ posiadają jednakowe rozkłady.

22. Z kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$ losowany jest punkt (x, y). Określamy zmienne losowe
$$X_1((x, y)) = \min\{x, y\}, X_2((x, y)) = \max\{x, y\}.$$
Wyznaczyć rozkład układu (X_1, X_2), rozkład zmiennej $X_2 - X_1, E(X_1 \cdot X_2), E(X_2 - X_1)$.

23. Spośród N ponumerowanych elementów losowanych jest n elementów (schemat losowania ze zwracaniem). Zmienne losowe X_1, X_2 są określone następująco:
- X_1 - wartość najmniejszego wylosowanego numeru,
- X_2 - wartość największego wylosowanego numeru.

Wyznaczyć rozkład układu (X_1, X_2) oraz $E(X_1 X_2)$.

24. Czas bezawaryjnej pracy jednego urządzenia jest zmienną losową o wartościach z odcinka $[0, T]$, a jej rozkład jest ciągły. Kontrolujemy pracę n takich urządzeń. Zakładamy, że pracują one niezależnie od siebie i charakteryzują się jednakowymi rozkładami czasu bezawaryjnej pracy. Oznaczymy przez X_1 liczbę tych urządzeń, dla których czas bezawaryjnej pracy okaże się krótszy niż $k \cdot T$, a przez X_2 liczbę tych urządzeń, dla których ten czas będzie dłuższy niż $k \cdot T, 0 < k < 1$. Wyznaczyć rozkład układu (X_1, X_2).

25. $\beta > 0, X$ ma rozkład jednostajny na [0,1]. Znaleźć gęstość $Y = \ln(X^{-\beta})$.

26. Niech
$$g(x, y) = \begin{cases} (1 + y^2)^{-1} \exp(-\pi x) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$
będzie gęstością dwuwymiarowego rozkładu. Znaleźć dystrybuantę tego rozkładu.

27. Niech
$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \vee y < 0 \\ y - y\exp(-3x) & \text{dla } x > 0, 0 < y < 1 \\ 1 - \exp(-3x) & \text{dla } x > 0, y > 1 \end{cases}$$
będzie dystrybuantą dwuwymiarowego rozkładu. Wyznaczyć gęstość tego rozkładu.

28. X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładach jednostajnych na odcinkach (-1,1) i (1,3) odpowiednio, $\Psi = (X, Y)$. Znaleźć dystrybuantę rozkładu zmiennej losowej Ψ.

29. Niech
$$g(x, y) = \begin{cases} \exp(-\pi x) & \text{dla } x > 0, y \in [0, \pi] \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}$$
będzie gęstością dwuwymiarowego rozkładu. Znaleźć dystrybuantę tego rozkładu.

30. Znaleźć takie $a > 0$, żeby funkcja określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} (1+x^2)^{-1} & \text{dla } y \in [0,a] \\ 0 & \text{dla } y \notin [0,a] \end{cases}$$

była gęstością rozkładu prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}^2$.

31. Niech $f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2))}$ będzie gęstością prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y). Wyznaczyć dystrybuantę (X,Y).

32. Na $\mathbb{R}^2$ określamy rozkład: $P(-1,0) = 0,1$, $P(-1,1) = 0,2$, $P(0,0) = 0,2$, $P(0,1) = 0,3$, $P(1,1) = 0,2$. Czy P jest iloczynem swoich rozkładów brzegowych?

33. Wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y) mając jej dystrybuantę $F(x,y) = 1 - e^{-3x} - e^{-4y} + e^{-3x-4y}$, dla $x, y > 0$.

34. Znaleźć rozkłady brzegowe zmiennych losowych X, Y znając gęstość prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/16 & \text{dla } |x| < 2, |y| < 2 \\ 0 & dla \text{ pozostałych } x, y \end{cases}.$$

35. Znaleźć gęstości prawdopodobieństwa rozkładów brzegowych zmiennych losowych X i Y, mając gęstość prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y)

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\exp(-x-2y) & \text{dla } x, y > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}.$$

36. Znaleźć rozkłady brzegowe zmiennych losowych X, Y mając rozkład zmiennej losowej dwuwymiarowej (X,Y) opisany tabelką

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	0,05	0,23	0,20	0,12
y_2	0,20	0,08	0,10	0,02

37. m, n ustalone liczby naturalne; dla $i, j \geqslant 1$ zachodzi $P(X = 2^{\frac{i}{m}}, Y = 2^{\frac{j}{n}}) = 2^{-(i+j)}$ Zbadać, które momenty zwykłe istnieją.

38. Niech K będzie kwadratem o boku długości 1 położonym na płaszczyźnie. Jakie warunki musi spełniać K aby rozkład prawdopodobieństwa o gęstości danej wzorem $g(x,y) = \mathbf{I}_K(x,y)$ był produktem swoich rozkładów brzegowych?

39. Niech $f(x,y,z) = g(x,y,z) + h(x,y,z)$, gdzie

$$g(x,y,z) = \begin{cases} \exp(-\frac{x^2+y^2}{2} - 2\pi z) & \text{dla } z > 0 \\ 0 & \text{dla } z < 0 \end{cases},$$

$$h(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy(z-1)}{1000} & \text{dla } -1 < x, y < 1, 0 < z < 2, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y, z \end{cases}.$$

Sprawdzić, że f jest gęstością rozkładu pewnej trójwymiarowej zmiennej losowej (X,Y,Z). Znaleźć wszystkie możliwe gęstości brzegowe. Zbadać, czy zmienne losowe $X, Y; X, Z; Y, Z; X, Y, Z$ są niezależne?

40. Sprawdzić że następująca funkcja określona na płaszczyźnie jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa $g(x,y) = \frac{1}{4}2^{-k}$ gdy $(x,y) \in (n, n+1] \times (m, m+1] n, m \in \mathbb{Z}$ i $k = \max\{|n| + |m|, |n+1| + |m|, |n| + |m+1|, |n+1| + |m+1|\}$.

41. Znaleźć dystrybuantę rozkładu prawdopodobieństwa z zadania 40. Sprawdzić czy jest on produktem swoich rozkładów brzegowych.

42. Znaleźć prawdopodobieństwo przy rozkładzie z zadania 40 następujących podzbiorów płaszczyzny

- $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$
- $\{(x, y) : x < 0 \wedge y > 0\}$
- $\{(x, y) : xy > 0\}$
- $\{(x, y) : x > y\}$

43. Sprawdzić czy następujące funkcje są dystrybuantami rozkładu prawdopodobieństwa na płaszczyźnie

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \vee y < 0 \\ 1 - e^{-x} - ln^{-1}(e+y) + e^{-x} ln^{-1}(e+y) & \text{dla } x, y > 0 \end{cases},$$

$$G(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x, y < 0 \\ \exp{(x+y)} & \text{dla } x \leqslant -y \wedge y > 0 \\ \frac{x}{-y} & \text{dla } x \leqslant -y \wedge y < 0 \wedge x > 0 \\ 1 & \text{dla } x > -y \end{cases}.$$

44. Znaleźć prawdopodobieństwo przy rozkładzie o dystrybuancie danej wzorem b) z zadania 43 następujących podzbiorów płaszczyzny:

- $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$
- $\{(x, y) : x < 0 \wedge y > 0\}$
- $\{(x, y) : xy > 0\}$
- $\{(x, y) : x > y\}$

45. Rzucamy dwukrotnie kostką. Wartość pierwszej współrzędnej jest równa wartości bezwzględnej różnicy oczek w obu rzutach, a wartość drugiej współrzędnej jest równa iloczynowi oczek, które wypadły w obu rzutach. Znaleźć rozkład tak określonej dwuwymiarowej zmiennej losowej.