Lista pierwsza*
Statystyka matematyczna
kierunek: Informatyka i ekonometria, studia I°

dr Jarosław Kotowicz

wersja z dnia 12 marca 2022

Spis treści

1 Elementy statystyki opisowej. Wszechstronna analiza struktury zbiorowości.

Zadanie 1. *Waga przedszkolaków (w kg) wynosi: 20, 24, 24, 23, 20, 22, 24, 23, 24, 19. Ile wynosi dominanta, a ile mediana wagi przedszkolaków i co one oznaczają?*

Zadanie 2. *Podczas 13 sesji giełdowych w czerwcu 1994 r. akcje spółki "BIG" osiągały następującą wartość (w tys. zł): 126, 127, 115, 111, 100, 90, 99, 89, 81, 73, 80, 83, 79. Wyznacz wartość mediany oraz podaj jej interpretację.*

Zadanie 3. *Dane są trzy próbki:*

1. *próbka I: 11, 19, 13, 9, 27, 30, 12, 8, 15;*
2. *próbka II: 15, 19, 6, 7, 13, 27, 10, 5, 30;*
3. *próbka III: 13, 6, 29, 7, 31, 12, 4, 14, 18. Wyznacz medianę w każdej z próbek. Jakie zalety i wady mediany można tu zaobserwować?*

Zadanie 4. *Czterech studentów ma po 20 lat, a sześciu po 22 lata. Ile wynosi średnia arytmetyczna wartość wieku, a ile mediana i co one oznaczają?*

Zadanie 5. *Wskazać średnią arytmetyczną, jeśli wiadomo, że została wyznaczona z populacji N elementowej i jest nią jedna z liczb: 6, 8 lub 9. Ponadto prawdziwe są nastepujące równania:*

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-6)^2 = 124, \quad \sum_{i=1}^{N}(x_i-8)^2 = 104, \quad \sum_{i=1}^{N}(x_i-9)^2 = 109.$$

Zadanie 6. *Wskazać, o ile to możliwe, średnią arytmetyczną, jeśli wiadomo, że została wyznaczona z populacji N elementowej i jest nią jedna z pięciu liczb: 8, 9, 10, 11 i 12, a ponadto zachodzą nastepujące równania:*

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-8) = 10, \quad \sum_{i=1}^{N}(x_i-9) = 5, \quad \sum_{i=1}^{N}(x_i-10) = 0.$$

[1] Zadania od prof. L.Uby.

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - 11) = -5, \quad \sum_{i=1}^{N}(x_i - 12) = -10.$$

Zadanie 7. *Strukturę rodzin według liczby członków rodziny w miejscowości L charakteryzuje poniższy rozkład:*

Liczba członków rodziny	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Odsetek rodzin	*15*	*30*	*20*	*15*	*10*	*5*	*5*

Za pomocą miar przeciętnych scharakteryzuj ten rozkład. Wyniki zinterpretuj.

Zadanie 8. *Poniższa tabela przedstawia czas poświęcony w ciągu tygodnia przez studentów na pracę w czytelni:*

Czas (w godz.)	*2 - 5*	*5 - 8*	*8 - 11*	*11 - 14*	*14 - 17*
Liczba studentów	*2*	*3*	*10*	*8*	*2*

Oblicz średnią arytmetyczną, medianę, kwartyle i dominantę oraz zinterpretować wyznaczone wielkości.

Zadanie 9. *Mediana wieku zatrudnionych w pewnym przedsiębiorstwie zawarta jest w przedziale 40 - 45 lat i wynosi 44 lata. W przedziale mediany mieści się 25 pracowników. W zbiorowości zatrudnionych w tym przedsiębiorstwie 40 pracowników liczy mniej niż 40 lat. Ilu pracowników jest zatrudnionych w tym przedsiębiorstwie?*

Zadanie 10. *Dana jest waga (w gramach) pewnego towaru: 79, 90, 66, 84, 63, 64, 85, 80, 60, 41, 59, 67, 79, 65, 45, 56, 82, 93, 71, 58, 41, 59, 78, 68, 80, 79, 57, 88, 71, 75, 77, 61, 84, 65, 71, 58, 63, 74, 95, 44. Na podstawie tych danych utworzyć przedziałowy rozkład empiryczny podanej cechy o rozpiętości przedziałów 5, 10, 30. Do każdego szeregu narysuj histogram. Który z szeregów najlepiej charakteryzuje rozkład badanej cechy?*

Zadanie 11. *Oblicz średnią powierzchnię indywidualnego gospodarstwa w pewnym województwie na podstawie poniższych danych:*

Powierzchnia gospodarstw w ha	*poniżej 2*	*poniżej 5*	*poniżej 10*	*poniżej 15*	*poniżej 30*
skumulowany odsetek gospodarstw	*10*	*18*	*52*	*74*	*90*

Największe obszarowo gospodarstwo w tym województwie miało 35 ha. Powierzchnia najmniejszego gospodarstwa wynosi 1 ha.

Zadanie 12. *W pewnym zakładzie zbadano pracowników bezpośrednio produkcyjnych pod względem stażu pracy. Okazało się, że 25% tych pracowników pracowało poniżej 6 lat, połowa od 6 do 12, natomiast wśród pozostałych najwyższy staż wynosił 18 lat. Średni staż pracy pracowników inżynieryjno - technicznych wynosił 12 lat. Jaki był średni staż pracy ogółu pracowników, jeżeli wiadomo, że grupa pracowników bezpośrednio produkcyjnych była 3 - krotnie liczniejsza niż inżynieryjno-technicznych.*

Zadanie 13. *W oparciu o poniższe dane ustal przeciętny czas eksploatacji maszyn:*

Czas eksploatacji maszyn (w latach)	*Liczba maszyn*
do 2	*3*
do 4	*10*
do 6	*16*
do 8	*20*

Zadanie 14. *Zawartość soli (w %) w konserwach ze szprota w pomidorach, produkowanych w Zakładach Rybnych w Gdyni w miesiącu lutym przedstawiała się następująco: 1,46; 1,44; 1,52; 1,44; 1,46; 1,70; 1,72; 1,97; 1,61; 1,55; 1,79; 1,70; 1,55; 1,33; 1,61; 1,97; 1,54; 1,99; 1,96; 1,58; 1,42; 1,53; 1,99; 1,97; 1,99; 1,85; 2,40; 1,70; 1,90.*

Na podstawie poniższych danych:

1. *zbuduj szereg rozdzielczy punktowy dla danej cechy;*
2. *zbuduj szereg rozdzielczy przedziałowy i narysuj histogram.*

Zadanie 15. *Tabela przedstawia czas dojazdu do pracy (w minutach) pracowników pewnego zakładu:*

Czas dojazdu	*5 - 15*	*15 - 25*	*25 - 35*	*35 - 45*	*45 - 55*	*55 - 65*
Liczba pracowników	*3*	*5*	*25*	*15*	*5*	*2*

Wyznacz wartości ćwiartkowe algebraicznie i graficznie.

Zadanie 16. *Z populacji generalnej pobrano 50 elementową próbkę i przebadano ze względu na cechę X. Otrzymano następujące wyniki: 3,6; 5,0; 4,0; 4,7; 5,2; 5,9; 4,5; 5,3; 5,5; 3,9; 5,6; 3,5; 5,4; 5,2; 4,1; 5,0; 3,1; 5,8; 4,8; 4,4; 4,6; 5,1; 4,7; 3,0; 5,5; 6,1; 3,8; 4,9; 5,6; 6,1; 5,9; 4,2; 6,4; 5,3; 4,5; 4,9; 4,0; 5,2; 3,3; 5,4; 4,7; 6,4; 5,1; 3,4; 5,2; 6,2; 4,4; 4,3; 5,8; 3,7.*

Dla danej próbki zbuduj szereg rozdzielczy przedziałowy, narysuj histogram oraz obliczyć średnią arytmetyczną cechy X, jej dominantę i kwartyle.

Zadanie 17. *W firmie pracuje 25 osób. Zapytane o wysokość miesięcznych zarobków odpowiedziały w sposób być może trochę wykrętny, ale dla statystyka zrozumiały. Cztery z nich zarabiają nie więcej niż 400 zł, osiem zarabia nie więcej niż 800 zł, piętnaście otrzymuje nie więcej niż 1200 zł oraz dwadzieścia jeden dostaje nie więcej niż 1600 zł. Pozostałe osoby stanowią ścisłe kierownictwo firmy, jednak żadna z nich nie zarabia więcej niż 3000 zł. Jaka jest wysokość przeciętnej płacy miesięcznej w tej firmie?*

Zadanie 18. *W punkcie skupu zwierząt rzeźnych przeprowadzono badanie próbne wagi cieląt. Wiadomo, że mediana wagi cieląt wynosi 44 kg i jest umiejscowiona w przedziale od 40 kg do 50 kg, do którego należy 25 cieląt. Ponadto wiadomo, że w badanej zbiorowości jest 40 cieląt o wadze poniżej 40 kg. Ile liczy cała zbiorowość próbna?*

Zadanie 19. *Badając absencję pracowników w IV kwartale otrzymano:* $\bar{x} = Me = Mo = 11 dni$*. Oblicz, jaki odsetek pracowników opuściło w badanym okresie 8 - 10 dni, jeśli wiadomo, że największy procent pracowników (40%) opuściło 10 - 12 dni, 12 - 14 dni przebywało na zwolnieniu 20%.*

Zadanie 20. *Czy na podstawie poniższych informacji można obliczyć wartość mediany?*

1. *ogólna liczebność zbiorowości - 150,*
2. *dolna granica przedziału mediany - 10,*
3. *rozpiętość przedziału mediany - 2,*
4. *suma liczebności przedziałów poprzedzających przedział mediany - 60,*
5. *suma liczebności przedziałów wraz z przedziałem mediany - 75.*

Wykonaj niezbędne obliczenia.

Zadanie 21. *Lekkoatleta A uzyskał w skoku w dal następujące wyniki na zawodach w całym sezonie (w m): 6,82; 6,96; 7,23; 7,05; 7,80; 7,75. Lekkoatleta B, startując na tych samych zawodach, uzyskał takie wyniki, że ich średnia arytmetyczna wyniosła 7,5 m, a suma ich kwadratów 450,2592* m^2*. Który z tych lekkoatletów osiągnął regularniejsze wyniki?*

Zadanie 22. *Średnia temperatura w kolejnych miesiącach roku 1974 w Warszawie na Okęciu była następująca: - 1,2; 2,1; 4,6; 7,3; 11,3; 14,7; 15,8; 18,1; 13,4; 6,6; 3,4; 2,3. Oblicz średnią temperaturę, medianę, odchylenie standardowe, odchylenie przeciętne oraz współczynnik zmienności i asymetrii (przyjąć, że wszystkie miesiące są tej samej długości).*

Zadanie 23. *Średni kurs akcji spółki A w pierwszym tygodniu lipca wynosił 73,20 zł, a odchylenie standardowe 5,45 zł. W drugim tygodniu lipca na kolejnych sesjach notowania spółki A były następujące: 72 zł, 74 zł, 78 zł, 80 zł, 75 zł. Oblicz średni kurs akcji spółki A i odchylenie standardowe kursu w dwóch pierwszych tygodniach lipca.*

Zadanie 24. *Po dokonaniu analizy wyników z egzaminu dla 50 kandydatów na członków rad nadzorczych ustalono, że łączna liczba punktów uzyskanych przez nich na egzaminie wynosiła 6508, a suma kwadratów liczby punktów uzyskanych przez poszczególnych kandydatów była równa 871 460. Wiedząc dodatkowo, że współczynnik zmienności czasu przygotowania kandydatów do egzaminu wynosi 30, 7% ustal, która z badanych cech (czas przygotowania czy wynik) wykazała większe zróżnicowanie.*

Zadanie 25. *W dwóch hurtowniach przeprowadzono badanie pracowników pod względem dotychczasowego stażu pracy. Otrzymano następujące wyniki:*
hurtownia I: $\bar{x} = 14$ *lat,* $V_s = 20\%$;
hurtownia II: $\bar{x} = 10$ *lat,* $V_s = 25\%$.
Oblicz współczynnik zmienności dla całej zbiorowości robotników, jeśli w hurtowni I było zatrudnionych 120 osób, a w hurtowni II 80 osób.

Zadanie 26. *Instytut Meteorologii i Gospodarki Wodnej zanotował temperaturę w ciągu kolejnych dni kwietnia 1999 r. w Warszawie:*

Temperatura w C	0	2	6	8	13	15	17	20	23	25	27
Liczba dni	2	3	3	4	5	6	2	2	1	1	1

1. *Oblicz odchylenie przeciętne temperatury kolejnych dni w kwietniu.*

2. *Oblicz odchylenie ćwiartkowe temperatury kolejnych dni w kwietniu.*

3. *Oblicz odchylenie standardowe temperatury w kolejnych dniach kwietnia.*

4. *Wyznacz typowy obszar zmienności temperatury dziennej.*

5. *Ile dni kwietnia miało temperatury typowe?*

Zadanie 27. *Każda z pięciu hodowli owiec zespołu hodowlanego dostarczyła dane dotyczące swojej hodowli:*

Liczba owiec w stadzie	*Przeciętne roczne ilość wełny od jednej owcy w stadzie (w kg)*	*Wariancja rocznej ilości wełny od jednej owcy w stadzie*
80	3,2	0,04
60	2,8	0,03
100	2,6	0,03
80	2,9	0,02
120	3,0	0,01

.

Oblicz średnią arytmetyczną i wariancję rocznej ilości wełny od 1 owcy w całym zespole hodowlanym.

Zadanie 28. *Rozkład jednostkowych kosztów produkcji wyrobu jest lewostronnie asymetryczny o współczynniku skośności równym - 1. Odchylenie standardowe kosztu jednostkowego wynosi 2 tys. zł, a najczęściej spotykany koszt 42 tys. zł. Wyprodukowano 1000 sztuk wyrobu. Oblicz średni koszt jednostkowy wyrobu i łączny koszt 1000 wyrobów.*

Zadanie 29. *Wiadomo, że różnica pomiędzy płacą średnią w oświacie a płacą dominującą wynosi 17, 5 zł. Połowa pracowników oświaty otrzymuje płacę niższą aniżeli 450 zł, przy średniej wynoszącej 420 zł. Czy powyższe wyniki są możliwe, jeśli założy się, że rozkład płac pracowników oświaty jest umiarkowanie asymetryczny. Odpowiedź uzasadnij.*

Zadanie 30. *Na podstawie danych zawartych w poniższym szeregu rozdzielczym:*

1. *oceń zróżnicowanie opisanej zbiorowości za pomocą odchylenia standardowego i współczynnika zmienności;*

2. *wyznacz empiryczny obszar zmienności;*

3. *oceń siłę i kierunek asymetrii w badanej grupie.*

Liczba reklamacji	0	1	2	3	4	5
Liczba sklepów	5	15	25	30	15	10

Zadanie 31. *Zastosuj odpowiednie parametry w celu scharakteryzowania asymetrii rozkładu pracowników finansów i ubezpieczeń według wysokości wynagrodzeń we wrześniu 1993 r., jeśli dane są następujące informacje:*

1. *wynagrodzenie 25% najniżej zarabiających nie przekracza 3,5 mln (starych zł),*

2. *25% pracowników zarabia powyżej 7 mln (starych zł),*

3. *wynagrodzenie połowy pracowników wynosi co najmniej 4,5 mln (starych zł).*

Zadanie 32. *Strukturę wiekową zbiorowości w pewnym osrodku wczasowym w sierpniu 1995r. przedstawia szereg:*

Wiek w latach	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	*ogółem*
Liczba osób	12	16	24	30	18	100

.

Przeprowadź wszechstronną analizę przedstawionego szeregu.

Zadanie 33. *Tabela przedstawia procentową zawartość skrobii w każdym z 80 ziemniaków wylosowanych z partii ziemniaków.*

Zawartość skrobii (w %)	9 - 11	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
Liczba ziemniaków	1	2	7	20	30	16	3	1

.

Oblicz średnią arytmetyczną dla przedstawionego szeregu rozdzielczego, jego medianę, modę, odchylenie standardowe, odchylenie przeciętne oraz współczynnik zmienności i asymetrii.

Zadanie 34. *W dwunastu sklepach spożywczych przeprowadzono badanie dotyczące miesięcznych kosztów handlowych i otrzymano następujący rozkład:*

Koszty w tys. zł	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
Liczba sklepów	10	20	30	110	30

.

Z analogicznego badania kosztów handlowych przeprowadzonego wśród sklepów handlujących artykułami gospodarstwa domowego otrzymano następujące syntetyczne charakterystyki: $\bar{x} = 5$ tys. zł, $V_s = 20\%$, $As = +0,3$. Dokonaj wszechstronnej analizy porównawczej badanych sklepów pod względem wysokości kosztów handlowych.

Zadanie 35. *Rozkład płac (x) w próbie losowej 400 pracowników Zachodniej Dyrekcji Okręgowej PKP scharakteryzować za pomocą parametrów, które można policz z następujących wielkości wyznaczonych na podstawie szeregu strukturalnego:*

$\sum n_i = 400$	$\sum \dot{x}_i = 120000$	$\sum n_i\dot{x}_i = 240000$
$\sum(\dot{x}_i - \bar{x})^4 n_i = 179200000$	$\sum(\dot{x}_i - \bar{x})^2 n_i = 160000$	$\sum(\dot{x}_i - \bar{x})^3 n_i = 2560000$
$D = 585$	$\sum(\dot{x}_i - \bar{x}) = 0$	$Me = 592$
$\sum(\dot{x}_i - \bar{x})^3 = 0$	$\sum(\dot{x}_i - \bar{x})^2 = 8250$	$\sum(\dot{x}_i - \bar{x})^4 = 160000$

2 Rozkłady prawdopodobieństw. Rozkłady statystyk z próby.

Zadanie 36. *Kontrola celna zagranicznych pasażerów przybywających na lotnisko międzynarodowe we Frankfurcie wykazała, że dziennie średnio 40 pasażerów przewozi towary niedozwolone, a odchylenie standardowe stanowi 25% poziomu średniej. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 losowo wybranych dni średnia liczba pasażerów przewożących towary niedozwolone:*

1. *przekroczy 46,*
2. *będzie zawierała się w przedziale od 36 do 45?*

Zadanie 37. *Z analizy miesięcznych wpłat dokonywanych przez ogół klientów jednego z banków warszawskich wynika, że przeciętna wpłata wynosi 500 PLN. Zakładając, że rozkład wysokości dokonywanych wpłat jest normalny, obliczyć, jakie jest prawdopodobieństwo, że średnia wpłata miesięczna dokonywana przez 26 losowo wybranych klientów:*

1. *nie przekroczy 549,7 PLN;*
2. *będzie wyższa od średniej dla ogółu klientów o więcej niż 34,16 PLN;*
3. *znajdzie się w przedziale od 541,2 do 574,5 PLN.*

W obliczeniach uwzględnij, że odchylenie standardowe wysokości opłat w wylosowanej próbie wyniosło 100 PLN.

Zadanie 38. *W wyniku wieloletnich testowych badań znajomości problemów finansowych kandydatów na dyrektorów największych banków w Nowym Jorku ustalono, że średnia liczba punktów uzyskiwanych przez kandydatów w zastosowanym teście wynosiła 92. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w losowo wybranej grupie 121 kandydatów na dyrektorów, w której wartość drugiego momentu centralnego w rozkładzie liczby uzyskanych punktów wynosi 484:*

1. *ogólna liczba punktów uzyskanych przez kandydatów przekroczy 10890,*
2. *średnia w próbie będzie różniła się od średniej dla ogółu kandydatów o mniej niż 6 punktów?*

Zadanie 39. *Rozkład czasu przeznaczonego na oglądanie filmów telewizyjnych przez studentów pewnej uczelni jest rozkładem w przybliżeniu normalnym z odchyleniem standardowym równym 2 godz.*

1. *Oblicz poziom wartości oczekiwanej w tym rozkładzie, jeśli dodatkowo wiadomo, że 15,87% ogółu studentów poświęca na oglądanie filmów poniżej 4 godz.*
2. *Określ prawdopodobieństwo, że różnica między średnim czasem oglądania filmów w grupie 36 losowo wybranych studentów a średnią w populacji przekroczy 0,5 godz.*

Zadanie 40. *Rozkład miesięcznych wydatków studentów I roku studiów dziennych SGH na zakup książek jest rozkładem normalnym z wartością oczekiwaną równą 20 PLN, natomiast w rozkładzie normalnym miesięcznych wydatków na książki studentów II roku średnia wynosi 15 PLN. Pobrano niezależnie próbę 10 elementową z populacji studentów I roku oraz próbę 8 -elementową z populacji studentów II roku. Odchylenie standardowe w rozkładzie wydatków na zakup książek w tych próbach wynosiło odpowiednio 5 PLN (Irok) i 4 PLN (II rok). Oblicz prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:*

1. *średni wydatek na zakup książek w wylosowanej próbie studentów I roku będzie wyższy od średniego wydatku w próbie studentów II roku,*
2. *średni wydatek w próbie studentów I roku przekroczy o mniej niż 2 PLN średni wydatek w próbie studentów II roku.*

Zadanie 41. *Czas dojazdu do pracy pracowników SGH ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej równej 40 min i odchyleniu standardowym stanowiącym 50% poziomu wartości oczekiwanej. Rozkład czasu dojazdu do pracy pracowników SGGW - AR jest rozkładem normalnym z wartością oczekiwaną równą 40 min i odchyleniem standardowym wynoszącym 25 min.*

1. *Jakie jest prawdopodobieństwo, że różnica między średnim czasem dojazdu do pracy w 25 elementowych próbach pobranych niezależnie z obu populacji będzie większa od 8 min?*

2. *Ilu spośród 100 losowo wybranych pracowników każdej z uczelni poświęca na dojazd, średnio biorąc, więcej niż 42 min?*

Zadanie 42. *Populacja generalna ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną równą m i odchyleniem standardowym równym σ. Jak liczną próbę należy wylosować z tej populacji, aby prawdopodobieństwo, że średnia arytmetyczna obliczona na podstawie tej próby będzie różniła się od wartości oczekiwanej o więcej niż jedno odchylenie standardowe, było co najwyżej równe 0,05?*

Zadanie 43. *Zmienna losowa ma rozkład normalny. Z populacji o tym rozkładzie pobrano w sposób losowy 400 elementową próbę. Znajdź odchylenie standardowe w rozkładzie tej zmiennej, jeśli wiadomo, że średnia z próby różni się od średniej w populacji o mniej niż 1 z prawdopodobieństwem równym 0,6826.*

Zadanie 44. *Czas przeznaczony w ciągu tygodnia na czytanie książek i czasopism przez ogół mieszkańców Polski ma rozkład normalny z odchyleniem standardowym równym 1,5 godz. Jakie jest prawdopodobieństwo, że odchylenie standardowe czasu przeznaczonego na czytanie książek i prasy przez 20 losowo wybranych osób nie przekroczy 2 godz.?*

Zadanie 45. *Waga (w g) 100 - metrowych odcinków przędzy ma rozkład normalny z odchyleniem standardowym równym 2 g. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wariancja wagi 10 odcinków 100 - metrowych pobranych do analizy w czasie produkcji tej przędzy będzie wynosić co najmniej 2,5 g?*

Zadanie 46. *Czas potrzebny do przygotowania i obrony pracy doktorskiej jest zmienną losową o rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym równym 2,1 roku. W ciągu 1994r. broniło doktorat 17 osób. Jakie jest prawdopodobieństwo, że odchylenie standardowe czasu potrzebnego do przygotowania i obrony pracy doktorskiej dla tej grupy doktorantów przkroczyło 2,8 roku?*

Zadanie 47. *Rozkład zarobków pracowników przemysłu wydobywczego jest rozkładem normalnym z pierwszym momentem zwykłym równym 1 tys. PLN i drugim momentem centralnym równym 0,04 (tys. PLN)^2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 16 losowo wybranych pracowników odchylenie standardowe nie przekroczy 0,1 tys. PLN?*

Z populacji o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(12, \sigma)$, gdzie σ jest nieznane (nieznane odchylenie standardowe), pobrano próbkę liczącą 10 elementów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że średnia arytmetyczna z próby jest:

1. *większa od 11,5;*

2. *mniejsza od 12,5;*

Odchylenie standardowe w tej próbie jest równe 1,5.

Zadanie 48. *Wiadomo,że rozkład płac pracowników fizycznych w przedsiębiorstwie A jest normalny z $m_1 = 3,1$ mln zł i $\sigma_1 = 0,5$ mln zł. Rozkład płac pracowników umysłowych jest normalny z $m_2 = 2,7$ mln zł i $\sigma_1 = 0,8$ mln zł. Przeprowadzono badanie statystyczne, w wyniku którego pobrano dwie niezależne próby: 9 elementową ze zbiorowości pracowników fizycznych i 16 elementową ze zbiorowości pracowników umysłowych. Odchylenia standardowe płac policzone na podstawie pobranych prób są równe odpowiednio 0,4 mln i 0,6 mln. Policzyć prawdopodobieństwo, że średnia płaca pracowników fizycznych przewyższa średnią płacę pracowników umysłowych.*

Zadanie 49. *Rozkład błędów pomiarów dokonywanych pewnym przyrządem ma rozkład normalny z wariancją równą 0, 1 cm^2. Wykonano 50 niezależnych pomiarów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wariancja błędów policzona na podstawie próby jest:*

1. *większa od 0,1;*

2. *mniejsza od 0,15;*

Zadanie 50. *Rzucono 100 razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo,że częstość wyrzucenia orła Y_n jest:*

1. *większa od 0,48;*

2. *mniejsza od 0,52;*

3. *zawarta między 0,45 i 0,48.*

Zadanie 51. *Wadliwość obuwia produkowanego przez firmę X wynosi 10%. Jeden ze sklepów sprzedał 300 par obuwia wyprodukowanego przez tę firmę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:*

1. *więcej niż 8% klientów złoży reklamację,*
2. *mniej niż 9% klientów złoży reklamację?*

Zadanie 52. *Grupa mieszkańców dzielnicy Krzyki skarży się na niskie ciśnienie w sieci wodociągowej. Przyrządy pomiarowe, umieszczone w MPWiK, wskazują pewne wahania ciśnienia, ale średnio jest ono równe 2, 8 atm, co jest wystarczające dla prawidłowej dostawy wody. W odpowiedzi na skargę dokonano pomiaru ciśnienia w węzłach wodnych wybranych domów. Zakładając, że rozkład ciśnienia jest normalny, policz prawdopodobieństwo tego, że średnie ciśnienie w wybranych węzłach jest mniejsze od 2,6, jeśli wybrano:*

1. *10 węzłów,*
2. *50 węzłów.*

Wiadomo, że odchylenie standardowe, policzone na podstawie pomiarów w wybranych węzłach, jest równe 0,4.

Zadanie 53. *Zużycie wody w pewnym osiedlu podlega wahaniom losowym w kolejnych dniach roku. Na podstawie długoletnich doświadczeń wiadomo, że średnie dzienne zużycie wody wynosi 100 hl.*

1. *Jakie jest prawdopodobieństwo, że średnie zużycie wody w losowo wybranym kwartale roku (kwartał ma 90 dni) przekroczy 102 hl, jeśli odchylenie standardowe, policzone na podstawie próby, jest równe 9 hl?*
2. *Jakie jest prawdopodobieństwo, że średnie zużycie wody w losowo wybranym tygodniu jest zawarte między 95 hl i 105 hl? Przyjmiemy, że zużycie wody ma rozkład normalny i odchylenie standardowe, policzone na podstawie siedmioelementowej próby, jest równe 9 hl.*
3. *Policzyć prawdopodobieństwo, że wariancja ciśnienia w losowo wybranym tygodniu nie przekroczy 8, 0 hl^2. Przyjmiemy, że zużycie wody ma rozkład normalny z odchyleniem standardowym σ równym 9hl.*
4. *Policzyć prawdopodobieństwo, że wariancja ciśnienia wody w losowo wybranym kwartale (90 dni) nie przekroczy 8 hl^2. Przyjmiemy, że zużycie wody ma rozkład normalny z odchyleniem standardowym równym 9hl.*

Zadanie 54. *W średnich szkołach ogólnokształcących języka niemieckiego uczyło się 56% ogółu uczniów, a w średnich szkołach zawodowych - 44% ogółu. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w losowo wybranej próbie liczącej 1600 uczniów szkół ogólnokształcących udział uczniów uczacych się języka niemieckiego będzie przynajmniej o 5% wyższy od podobnego udziału w grupie 900 losowo wybranych uczniów szkół zawodowych?*

3 Estymacja.

3.1 Estymacja punktowa.

Zadanie 55. *Udowodnij, że wariancja z próby $\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ jest obciążonym estymatorem wariancji populacji $\mathbb{D}^2(X)$.*

Zadanie 56. *Wykonano n niezależnych doświadczeń według schematu Bernoulliego, przy czym p - oznacza prawdopodobieństwo sukcesu. Sprawdź, czy częstość pojawienia się sukcesu w takich doświadczeniach jest estymatorem zgodnym i nieobciążonym prawdopodobieństwa p.*

Zadanie 57. *Obserwacje X_1, X_2, X_3 są niezależne i pochodzą z rozkładu Poissona z parametrem m. Sprawdź, czy estymatory parametru m:*

$$Q_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \quad i \quad Q_2 = \frac{2X_1 + 2X_2 + X_3}{5}$$

są nieobciążone. Który z nich jest obarczony mniejszym błędem szacunku?

Zadanie 58. *Niech X i Y będą takimi niezależnymi zmiennymi losowymi, że $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 3$, $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(Y) = \sigma^2$. Dla jakiej stałej c statystyka $cX^2 + (1-c)Y^2$ jest nieobciążonym estymatorem parametru σ^2?*

Zadanie 59. *T_1 i T_2 są nieobciążonymi i niezależnymi estymatorami parametru θ oraz $\mathbb{D}^2(T_i) = \sigma_i^2$ dla $i = 1, 2$.*

1. *Sprawdź, czy statystyka $T = aT_1 + (1-a)T_2$ jest nieobciążonym estymatorem parametru θ dla każdego $a \in \mathbb{R}$.*
2. *Wyznacz tę wartość a, przy której wariancja estymatora T jest najmniejsza.*

Zadanie 60. *Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie dwumianowym z parametrami p i n ($0 < p < 1$, $n \in \mathbb{N}$). Dla jakiej wartości c statystyka $T = c\frac{X}{n}(1 - \frac{X}{n})$ jest estymatorem nieobciążonym parametru $\theta = p(1-p)$?*

Zadanie 61. *Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ mają wartość oczekiwaną zero i wariancję σ^2 oraz $cov(X_i, X_j) = \sigma^2/n$ dla każdego $i \neq j$. Niech $\bar{X}_n$ oznacza średnią arytmetyczną ze zmiennych $X_1, \ldots, X_n$. Wyznacz taką stałą c, dla której statystyka $T = c\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ jest estymatorem nieobciążonym parametru σ^2.*

Zadanie 62. *Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ mają rozkład o tej samej wartości przeciętnej $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ i wariancjach $\mathbb{D}^2(X_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, \ldots, n$. Wykaż, że estymatory postaci $T = \frac{a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ są przy wszelkich rzeczywistych a_i spełniających warunek $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ nieobciążonymi estymatorami parametru μ.*

Zadanie 63. *Niech populacja generalna ma rozkład normalny $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Za pomocą metody momentów wyznacz estymatory parametrów m i σ^2.*

Zadanie 64. *Niech badana cecha X ma rozkład gamma z nieznanymi obu parametrami o gęstości:*

$$f(x; p, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\beta x} & dla\ x > 0 \\ 0 & dla\ x \leqslant 0 \end{cases}$$

Na podstawie n elementowej próby prostej, pobranej z populacji, w której cecha X ma dany rozkład, wyznacz metodą momentów estymatory $\tilde{p}$ i $\tilde{\beta}$ parametrów p i β.

Zadanie 65. *Populacja generalna ma rozkład zero - jedynkowy z parametrem p. Na podstawie n elementowej próby prostej oszacuj metodą największej wiarygodności parametr p.*

Zadanie 66. *Populacja generalna ma rozkład $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Stosując metodę największej wiarygodności, wyznacz estymatory parametrów m i σ^2.*

Zadanie 67. *Populacja generalna ma rozkład Rayleigha określony funkcją gęstości ($\lambda > 0$):*

$$f(x) = \begin{cases} 2\lambda x \exp(-\lambda x^2) & dla\ x > 0 \\ 0 & dla\ x \leqslant 0 \end{cases}$$

Wyznacz estymator parametru λ tego rozkładu.

Zadanie 68. *Metodą największej wiarygodności na podstawie n elementowej próby prostej znaleźć estymator parametru p rozkładu geometrycznego o funkcji prawdopodobieństwa*

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \quad , \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zadanie 69. *Dana jest n elementowa próba prosta $X_1, \ldots, X_n$ pochodząca z rozkładu Poissona z parametrem λ. Znajdź estymator największej wiarygodności prawdopodobieństwa $P(X_1 = 0)$.*

Zadanie 70. *Próba prosta $X_1, \ldots, X_n$ pochodzi z rozkładu o gęstości*

$$f_\theta(x) \begin{cases} \theta x^{\theta - 1} & dla\ x \in (0,1) \\ 0 & dla\ p.p. \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru θ.

3.2 Estymacja przedziałowa.

Zadanie 71. *W celu zbadania wieku lekarzy zatrudnionych na wsi i w mieście pobrano losowo dwie próby: 9 elementową próbę lekarzy wiejskich i 8 elementową próbę lekarzy miejskich. Średni wiek lekarzy wiejskich wynosił 42 lata, a lekarzy miejskich - 46 lat. Odchylenie standardowe w rozkładzie wieku ogółu lekarzy zatrudnionych na wsi i w mieście łącznie wyniosło 2, 4 roku. Zakładając, że rozkład wieku ogółu lekarzy jest normalny, zbuduj przedział ufności dla przeciętnego wieku ogółu lekarzy (miejskich i wiejskich łącznie), przyjmując współczynnik ufności 0,98.*

Zadanie 72. *Wytrzymałość pewnego materiału budowlanego jest zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{N}(m, 1)$. W celu oszacowania nieznanej średniej wytrzymałości tego materiału dokonano pomiaru wytrzymałości 5 wylosowanych niezależnie sztuk tego materiału. Wyniki pomiarów były następujące: 20,4; 19,6; 22,1; 20,8; 21,1. Przyjmując współczynnik ufności 0,90, zbuduj przedział ufności dla średniej wytrzymałości badanego materiału budowlanego. O ile zmieni się długość oszacowanego przedziału, jeśli liczebność próby zwiększymy do 45 elementów?*

Zadanie 73. *Zakłada się, że miesięczne wydatki na odzież i obuwie w rodzinach czteroosobowych mają rozkład normalny.*

1. *Oszacuj metodą przedziałową przeciętną wartość tych wydatków, jeśli na podstawie budżetów 10 losowo wybranych gospodarstw domowych w pewnym osiedlu otrzymano* $\bar{X} = 156$ *zł i* $s = 30$ *zł. Poziom ufności* $(1-\alpha) = 0,98$.

2. *Jaki otrzymamy przedział, jeśli założymy, że wydatki te mają rozkład* $\mathcal{N}(m, 30)$*?*

Zadanie 74. *Średnia frekwencja widzów w kinie na seansie filmowym w jednym z kin warszawskich ma rozkład* $\mathcal{N}(m, 40)$*. Na podstawie obserwacji liczby widzów na 25 losowo wybranych seansach kinowych oszacowano przedział liczbowy (184, 216) dla nieznanej średniej frekwencji na wszystkich seansach.*

1. *Jaki poziom współczynnika ufności przyjęto przy estymacji?*

2. *Ile wynosiła średnia liczba widzów w zbadanej próbie 25 seansów kinowych?*

Zadanie 75. *Czas czekania na zgłoszenie się abonenta do centrali telefonicznej ma rozkład normalny z wariancją* $\sigma^2 = 81\ s^2$*. Ile niezależnych pomiarów czasu czekania na abonenta należy wykonać, aby obliczony na ich podstawie przedział ufności na poziomie ufności* $(1-\alpha) = 0,99$ *dla wartości oczekiwanej czasu czekania miał długość mniejszą od czterech sekund.*

Zadanie 76. *Na podstawie wielokrotnych obserwacji ustalono, że rozkład czasu dojazdu do pracy osób zatrudnionych w sklepach stołecznych jest rozkładem normalnym. W celu oszacowania nieznanej średniej w tym rozkładzie wylosowano niezależnie 100 elementową próbę pracowników. Średni czas dojazdu w tej próbie wynosił 40 min, a odchylenie standardowe stanowiło* $1/2$ *czasu średniego. Jaki współczynnik ufności przyjęto przy szacowaniu średniej w rozkładzie czasu dojazdu do pracy ogółu pracowników, jeżeli długość oszacowanego przedziału wyniosła 7,84 min?*

Zadanie 77. *Inwestor chce oszacuj ryzyko pewnego przedsięwzięcia, które przynosi losowy zysk o rozkładzie normalnym. Ryzyko jest mierzone odchyleniem standardowym zysku. Po obliczeniu średniej i wariancji z próby prostej złożonej z* $n = 17$ *zysków z przeszłości, otrzymano następujące wyniki:* $\bar{X}_n = 1500$, $S_n^2 = 64516$*. Podaj przedział ufności dla*

1. *oczekiwanego zysku,*

2. *ryzyka,*

na poziomie ufności 0,99.

Zadanie 78. *Zmierzono czas wykonania pewnego detalu przez* $n = 169$ *losowo wybranych pracowników. Średnia arytmetyczna* $\bar{X}_n$ *z pomiarów jest równa 125 minut, a wariancja* $S_n^2 = 144$ *minuty*^{2}*. Przedziałem ufności dla wartości oczekiwanej czasu wykonania detalu jest przedział (122, 618; 127, 382). Oblicz, na jakim poziomie ufności został wyznaczony ten przedział.*

Zadanie 79. *Wymiary 6 losowo wybranych detali, wyrażone w mm, kształtowały się następująco: 6,3; 5,9; 6,2; 5,8; 5,7; 6,1. Przyjmując założenie, że rozkład wymiarów ogółu produkowanych detali jest normalny, przy współczynniku ufności równym 0, 90, oszacuj nieznane odchylenie standardowe wymiarów ogółu produkowanych detali.*

Zadanie 80. *Czas produkcji 5 losowo wybranych sztuk wyrobu (w s) kształtował się następująco: 5,1; 4,9; 4,8; 5,3; 4,9.*

1. *Przyjmując współczynnik ufności na poziomie 0, 98, oszacuj wariancję czasu produkcji ogółu wytwarzanych wyrobów.*

2. *Jak zmieni się długość szacowanego przedziału, gdy wspólczynnik ufności zmniejszymy do poziomu 0, 90?*

Zadanie 81. *Na podstawie wyników 10 elementowej próby pracowników spółki oszacowano przedziałowo wariancję pożyczek udzielanych z kasy zapomogowo - pożyczkowej wszystkim pracownikom. Oszacowany przedział ma postać (5910,5148; 30075,188) PLN*^{2}*. Jaki poziom współczynnika ufności przyjęto przy estymacji, jeśli dodatkowo wiadomo, że odchylenie standardowe pożyczanych kwot w zbadanej próbie wynosiło 100 PLN?*

Zadanie 82. *Rozkład wagi uczniów pierwszych klas szkół podstawowych jest* $\mathcal{N}(m, 3)$*. Ilu uczniów powinno się wylosować do próby, aby oszacuj przeciętną wagę ucznia I klasy z błędem 0, 5 kg na poziomie ufności* $(1-\alpha) = 0,98$*?*

Zadanie 83. *Oblicz, jaka powinna być minimalna liczebność próby, niezbędna do oszacowania odsetka zakładów, które wydają na reklamę kwartalnie nie więcej niż 10 tys. zł z błędem szacunku równym 2%, na poziomie ufności* $(1-\alpha) = 0,99$*, jeśli:*

1. *dla 100 losowo wybranych zakładów otrzymano następujący rozkład wydatków na reklamę*

Kwartalne wydatki (w tys. zł)	*0 - 5*	*5 - 10*	*10 - 15*	*15 - 20*
Liczba zakładów	*10*	*20*	*40*	*30*

2. *nie mamy żadnych informacji o rzędzie wielkości szacowanego procentu.*

Zadanie 84. *W grupie 3600 losowo wybranych pasażerów warszawskiego metra 1584 osoby stwierdziły, że metro jest dla nich jedynym środkiem dojazdu do pracy. Zbuduj przedział ufności dla nieznanej frakcji osób, dla których metro jest jedynym środkiem dojazdu do pracy wśród ogółu pasażerów. Przyjąć współczynnik ufności na poziomie 0,90. Określ błąd szacunku.*

Zadanie 85. *Poniższy szereg rozdzielczy przedstawia strukturę 1000 losowo wybranych mieszkań na osiedlu Ursynów w Warszawie według liczby izb.*

Liczba izb w mieszkaniu	*2*	*3*	*4*	*5*	*6 i więcej*
Liczba mieszkań	*96*	*288*	*404*	*168*	*44*

Oszacowano na podstawie powyższej próby przedział liczbowy dla odsetka lokali 4 - izbowych w populacji wszystkich mieszkań na Ursynowie: (37,4%; 43,4%).

1. *Jaki współczynnik ufności przyjęto przy konstrukcji powyższego przedziału?*
2. *Jak zmieni się precyzja oszacowania, jeśli przy założeniu niezmienności struktury próby oraz przy tym samym współczynniku ufności liczebność próby zmniejszymy do 250 mieszkań?*

Zadanie 86. *W losowo wybranej próbie 100 studentów SGH 40 osób mieszkało na stałe w Warszawie. Przyjmując współczynnik ufności na poziomie 0, 90:*

1. *oszacuj przedziałowo udział studentów mieszkających na stałe poza Warszawą wśród ogółu studentów;*
2. *określ, o ile osób należy zwiększyć powyższą próbę, aby dwukrotnie wzrosła precyzja oszacowania.*

Zadanie 87. *Jaka powinna być minimalna liczebność próby, niezbędna do oszacowania odsetka uczniów zamierzających po maturze kontynuować studia, jeśli w klasie liczącej 40 uczniów 70% zamierza kontynuować naukę w szkole wyższej (przyjąć poziom ufności 0, 9 i maksymalny błąd szacunku 5%)? Jak zmieni się szacowana liczebność próby, jeśli w badanej klasie tylko 50% uczniów będzie kontynuować naukę?*

Zadanie 88. *Dokonano badań drogowych 30 samochodów FSO 1500 pod względem osiąganej prędkości maksymalnej. Wyniki były następujące:*

Prędkość maksymalna (km/h)	*130 - 140*	*140 - 150*	*150 - 160*	*160 - 170*
Liczba samochodów	*3*	*8*	*14*	*5*

1. *Na poziomie ufności 0,98 wyznacz przedział ufności dla średniej prędkości (przy założeniu, że rozkład prędkości jest normalny).*
2. *Jaka powinna być liczebność próby, aby oszacuj nieznany procent samochodów o prędkości maksymalnej powyżej 150 km/h z dokładnością do 1% na poziomie ufności 0, 96?*
3. *Oszacuj metodą przedziałową wariancję prędkości maksymalnej na poziomie ufności 0,9 (zakładamy, że rozkład prędkości maksymalnej jest normalny).*

Zadanie 89. *Na podstawie próby losowej, obejmującej 100 kwitów kasowych na stoisku kosmetycznym w domu towarowym „Centrum", otrzymano średnią arytmetyczną kwoty zakupu, wynoszącą 15,4 zł oraz odchylenie standardowe kwoty zakupu wynoszące 4 zł.*

1. *Wyznacz 95% przedział ufności dla przeciętnej kwoty zakupu na tym stoisku.*
2. *Ile kwitów powinno się wylosować do próby, aby na poziomie ufności* $(1-\alpha) = 0,95$ *zbuduj przedział ufności dla wartości przeciętnej o rozpiętości co najwyżej 2 zł?*
3. *Wśród 200 losowo wybranych kwitów 28 wystawiono na kwotę powyżej 50 zł. Oszacuj metodą przedziałową prawdopodobieństwo, że losowo wybrany kwit na tym stoisku będzie opiewać na taką właśnie kwotę (poziom ufności 0,99).*

Zadanie 90. *Analizując wydajność pracy w zakładzie X otrzymano dane:*

Wydajność w szt./godz.	*0 - 4*	*4 - 8*	*8 - 12*	*12 - 16*
Liczba pracowników	*8*	*12*	*15*	*5*

Założyć rozkład normalny.

1. *Wyznacz przedział ufności dla przeciętnej wydajności na poziomie ufności* $(1-\alpha) = 0,95$.
2. *Jaka powinna być liczebność próby, aby oszacuj nieznany procent pracowników o wydajności przynajmniej 10 szt./godz. na poziomie ufności* $(1-\alpha) = 0,95$ *z dokładnością do 2%?*

4 Zadania różne[2]

Zadanie 91. *Niech X_1 i X_2 będą zmiennymi losowymi niezależnymi takimi, ze $\mathbb{E}(X_1) = 1$, $\mathbb{E}(X_2) = 3$, $\mathbb{D}^2(X_1) = \mathbb{D}^2(X_2) = \sigma^2$. Dla jakiej stałej c, statystyka $T = cX_1^2 + (1-c)X_2^2$ jest estymatorem nieobciążonym parametru σ^2.*

Zadanie 92. *Cecha X populacji generalnej ma rozkład jednostajny na przedziale $[a, a+1]$, gdzie a jest nieznane. Wykaż, ze estymator $T_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i - \frac{n}{n+1}$ parametru a jest asymptotycznie nieobciążony i zgodny, gdzie $X_1, \ldots, X_n$ jest próba prostą z tej populacji.*

Zadanie 93. *Cecha X populacji generalnej ma rozkład jednostajny na przedziale $[a, a+1]$, gdzie a jest nieznane. Wykaż, ze estymator $T_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i - 1$ parametru a jest nieobciążony i zgodny, gdzie $X_1, \ldots, X_n$ jest próba prostą z tej populacji.*

Zadanie 94. *Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będzie realizacja próby prostej $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z populacji o rozkładzie trzypunktowym: $P(X = -1) = 0.5 - p$, $P(X = 0) = 0.5$, $P(X = 1) = p$. Znajdź estymatory parametru p metodą momentów i metodą największej wiarygodności.*

Zadanie 95. *Gęstość rozkładu zmiennej losowej X wyraża się wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{a} & \text{dla } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-a, a] \end{cases}.$$

Znajdź estymator parametru a.

Zadanie 96. *Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próba prosta pobrana z populacji, w której cecha X ma skończoną i różną od zera wariancje σ^2. Zbadać, czy wariancja empiryczna*

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

gdzie $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ jest estymatorem nieobciążonym nieznanej wariancji σ^2.

Zadanie 97. *Wykorzystując nierówność Rao-Cramera wyznacz nieobciążony estymator parametru θ o minimalnej wariancji na podstawie n elementowej próby prostej z populacji, w której badana cecha X ma rozkład $N(\theta, \sigma)$ o znanym σ.*

Zadanie 98. *Cecha X populacji ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ gdzie μ jest znane, a σ nieznane. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie n elementową próbą prosta pobraną z tej populacji. Dobrać tak liczbę k, aby zmienna losowa $V = k\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i - \mu|$ była estymatorem nieobciążonym parametru σ oraz znaleźć efektywność tego estymatora.*

Zadanie 99. *Na podstawie n elementowej próby prostej pobranej z populacji, w której badana cecha X ma rozkład Poissona $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, gdzie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, wyznacz metoda największej wiarogodności estymator parametru λ tego rozkładu.*

Zadanie 100. *Na podstawie n elementowej próby prostej pobranej z populacji, w której badana cecha X ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ wyznacz metoda największej wiarogodności oraz metodą momentów estymatory parametrów μ i σ tego rozkładu.*

Zadanie 101. *Na podstawie n elementowej próby prostej pobranej z populacji, w której badana cecha X ma rozkład Bernoulliego. Wyznacz metoda największej wiarygodności estymator parametru p tego rozkładu.*

Zadanie 102. *Wykaż, ze jeśli cecha X elementów populacji generalnej ma wartość przeciętną $\mathbb{E}(X)$, to estymator $\overline{X}$ jest nieobciążonym estymatorem parametru $\mathbb{E}(X)$.*

Zadanie 103. *Niech populacja generalna ma rozkład dwupunktowy (zero - jedynkowy) tj. składa się z dwóch rodzajów elementów, np. dobrych i wadliwych, przy czym frakcji p sztuk wadliwych nie znamy. Przyporządkujemy wylosowaniu elementu dobrego liczbę 0, a wylosowaniu elementu wadliwego liczbę 1. Za estymator nieznanego parametru p przyjmijmy*

$$\overline{X} = \frac{n_1 \cdot 1 + (n - n_1)\cdot 0}{n} = \frac{n_1}{n},$$

gdzie n to liczność próbki, a n_1 liczba sztuk wadliwych w próbce. Oblicz wariancje tego estymatora (znając rozkład zmiennej losowej), minimalną wariancje (korzystając z nierówności Rao-Cramera) i jego efektywność.

[2] Zadania od prof. L.Uby.

Zadanie 104. *Niech cecha X elementów populacji ma rozkład dwumianowy, określony wzorem $Pr(k,p) = P(X = k) = \binom{r}{k}p^k(1-p)^{r-k}$, $k = 0, 1, \ldots, r$, gdzie p jest parametrem nieznanym. Za estymator parametru p przyjąć $\overline{X}$. Znajdź minimalną wariancję, efektywność estymatora $\overline{X}$.*

Zadanie 105. *Niech cecha X elementów populacji ma rozkład Poissona, w którym λ jest nieznany. Za estymator parametru λ przyjąć $\overline{X}$. Znajdź minimalną wariancje i efektywność estymatora $\overline{X}$.*

Zadanie 106. *Niech cecha X elementów populacji ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$, przy czym σ jest znane, μ jest nieznane. Za estymator parametru μ przyjąć $\overline{X}$. Znajdź minimalną wariancję i efektywność estymatora $\overline{X}$.*

Zadanie 107. *Cecha X elementów populacji ma rozkład dwupunktowy: $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = q = 1 - p$, gdzie p jest parametrem nieznanym. Znajdź estymator największej wiarygodności parametru p.*

Zadanie 108. *Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[a, b]$. Korzystając z metody momentów oszacuj oba nieznane parametry a i b mając dane n niezależnych obserwacji tej zmiennej losowej $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$.*

Zadanie 109. *Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[a, a+1]$. Otrzymano n niezależnych obserwacji tej zmiennej losowej $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$. Czy statystyka $T_n = \overline{X} - 0.5$ jest nieobciążonym estymatorem parametru a.*

Zadanie 110. *Wiadomo, ze grubość nakładek hamulcowych przy masowej produkcji samochodów jest zmienna losowa o rozkładzie normalnym. Parametry: wartość przeciętna i wariancja mogą w toku produkcji ulegać pewnym zmianom. Przeprowadzono okresowe badania kontrolne, mające na celu zbadanie wartości przeciętnej (nominalnej) grubości nakładek. Pobrano próbkę o liczności $n = 10$ i uzyskano wyniki: 17.45, 17.50, 17.50, 17.45, 17.52, 17.48, 17.47, 17.49, 17.48, 17.46. Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0.95$, wyznacz wartości liczbowe końców przedziału ufności dla parametru m.*

Zadanie 111. *Wykonano pomiary liczby skrętów dla losowo wybranych odcinków przędzy o długości 1 m, uzyskując wyniki: 87, 102, 119, 82, 97, 93, 100, 114, 99, 100, 113, 93, 95, 85, 123, 99. Zakładając, ze liczba skrętów odcinków przędzy ma rozkład normalny, znaleźć 90%-owe realizacje przedziałów ufności dla wariancji i odchylenia standardowego liczby skrętów całej partii przędzy.*

Zadanie 112. *W celu sprawdzenia dokładności skrawania za pomocą pewnego urządzenia, dokonano pomiarów wykonanych 50 części i otrzymano $s^2 = 0.00068$. Zakładając, ze rozkład błędów wymiarów części jest normalny o nieznanym σ, na poziomie ufności $1 - \alpha = 0.95$ wyznacz na podstawie danych realizacje przedziału ufności dla odchylenia standardowego σ.*

Zadanie 113. *Spośród 120 wylosowanych pracowników pewnego zakładu 17 nie wykonywało normy wydajności pracy. Wyznacz 95%-ową realizacje przedziału ufności dla frakcji p pracowników tego zakładu, którzy nie wykonują normy.*

Zadanie 114. *Dokonano 100 pomiarów ciśnienia wody na ostatnim piętrze wysokiego bloku i okazało się, ze $\overline{x} = 2.21$, $s^2 = 4.41$. Znajdź wartości liczbowe krańców przedziału ufności dla m (średnie ciśnienie wody) przyjmując poziom ufności: a) 0.99, b) 0.98, c) 0.95.*

Zadanie 115. *W celu zbadania jakości partii kondensatorów zbadano pojemność 15 kondensatorów. Uzyskano następujące wyniki (w pF): 62, 57, 70, 58, 59, 67, 65, 69, 55, 57, 60, 54, 72, 66, 74. Zakładając, ze rozkład pojemności jest normalny, znaleźć wartości liczbowe krańców przedziału ufności dla wariancji σ^2 przyjmując poziom ufności $1 - \alpha. = 0.96$.*

Zadanie 116. *Cecha X elementów populacji ma rozkład Poissona o nieznanym parametrze λ. Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha$, znaleźć przedział ufności dla parametru λ, wiedząc, ze liczność próbki n jest duża.*

Zadanie 117. *Wykonano 15 pomiarów czasu likwidowania zrywów przędzy na przędzarce obrączkowej, otrzymując rezultaty (w s): 4.5, 3.6, 6.0, 7.9, 6.9, 6.1, 7.4, 4.3, 6.1, 4.9, 7.5, 5.8, 8.2, 6.4, 9.0. Zakładając, ze rozkład czasu likwidacji zrywu jest normalny, wyznacz na podstawie tych danych 90%-owa realizacje obszaru ufności dla nieznanej wartości przeciętnej m i wariancji σ^2 likwidacji zrywu.*

Zadanie 118. *Wykonuje się pomiary głębokości morza na pewnym określonym miejscu. Ile niezależnych pomiarów należy dokonać aby (przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 95\%$) wyznacz głębokość z błędem nie większym niż 10m, jeśli rozkład błędów pomiarów jest normalny o wariancji $\sigma^2 = 180m^2$.*

Zadanie 119. *Wiemy, ze współczynnik zmienności wysokości plonów żyta w pewnym rejonie kraju jest równy $\eta = 0.5$. Zakładając, że wysokości plonów maja rozkłady normalne, znaleźć minimalna liczbę gospodarstw rolnych, jaka należy wylosować do badania, aby dla 95%-owego poziomu ufności otrzymać przedział ufności dla wartości przeciętnej badanej cechy o długości nie przekraczającej 10% tej wartości przeciętnej.*

Zadanie 120. *Zmierzono czasy wyładowania ośmiu losowo wybranych baterii z całej partii baterii. Otrzymano dane (w min): 212, 215, 205, 214, 216, 208, 210, 215. Zakładając, że czas wyładowania baterii ma rozkład normalny, zbadać, czy liczba 8 dokonanych pomiarów jest wystarczająca do wyznaczenia 95%-owego przedziału ufności dla nieznanej wartości przeciętnej czasu wyładowania baterii o długości nie większej niż 4. W przypadku, gdy próba okaże się niewystarczająca, obliczyć ile jeszcze należy dokonać pomiarów.*

Zadanie 121. *Załóżmy że, p100% wyborców jest zdecydowanych poprzeć danego kandydata w najbliższych wyborach, gdzie* $0 \leqslant p \leqslant 1$. *W celu oszacowania p przeprowadzimy ankietę wśród n losowo wybranych osób. Ankieta przewiduje dwie odpowiedzi TAK albo NIE na pytanie czy jesteś zdecydowany głosować na danego kandydata. Przypuśćmy że, k spośród n osób odpowie TAK. Wyznacz przedział ufności dla p na poziomie ufności* $1 - \alpha$.

Zadanie 122. *W celu ustalenia, czy dotychczasowa norma okresu użytkowania ubrań ochronnych - wynosząca 150 dni - nie jest zbyt wysoka, zbadano faktyczny okres użytkowania ich na przykładzie 65 losowo wybranych robotników pracujących w normalnych warunkach. Otrzymano średnią długość okresu użytkowania 139 dni oraz odchylenie standardowe 9,8 dni. Zakładając, że czas użytkowania ubrań ma rozkład normalny, stwierdzić, na poziomie istotności a = 0,01, czy uzyskane wyniki stanowią podstawę do zmiany (zmniejszenia) normy.*