

Ćwiczenia:* Teoria opcji – lista 3

kierunek: matematyka, specjalność: matematyka finansowa,
studia II°

dr Jarosław Kotowicz

wersja z roku akad. 2020/2021

Zadanie 1. Niech instrument bazowy nie przynosi dochodu w trakcie trwania życia opcji europejskiej. Przy założeniu, że $C_0^e - P_0^e - S_0 + e^{-rT}K > 0$ pokaż, że strategia o następujących elementach

- pozycja długa na opcji sprzedaży,
- pozycja długa na instrumencie bazowym,
- pozycja krótka na opcji kupna,
- pożyczka kwoty $e^{-rT}K$ na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej,
- lokata kwoty $C_0^e - P_0^e - S_0 + e^{-rT}K$ na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej

jest strategią arbitrażową.

Zadanie 2. Niech instrument bazowy nie przynosi dochodu w trakcie trwania życia opcji europejskiej. Przy założeniu, że $C_0^e - P_0^e - S_0 + e^{-rT}K < 0$ pokaż, że strategia o następujących elementach

- pozycja krótka na opcji sprzedaży,
- krótka sprzedaż instrumentu bazowym,
- pozycja długa na opcji kupna,
- lokata kwoty $e^{-rT}K$ na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej,
- lokata kwoty $-C_0^e + P_0^e + S_0 - e^{-rT}K$ na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej

jest strategią arbitrażową.

Zadanie 3. W oparciu o zadania 1 i 2 sformułuj parytet kupna-sprzedaży dla opcji europejskich na instrument bazowy, który w trakcie trwania opcji nie przynosi dochodu.

Zadanie 4. Niech instrument bazowy, który w trakcie trwania opcji przynosi dochody $C(t_i)$, gdzie $i \in \overline{1, n}$, płatne w ustalonych chwilach czasu $0 < t_1 < \dots < t_n < T$. Przy założeniu, że $C_0^e - P_0^e - S_0 + D_0 + e^{-rT}K > 0$, gdzie $D_0 = \sum_{i=1}^n e^{-rt_i}C(t_i)$, pokaż, że strategia o następujących elementach

- pozycja długa na opcji sprzedaży,
- pozycja długa na instrumencie bazowym,
- pozycja krótka na opcji kupna,
- pożyczka kwoty $e^{-rT}K$ na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej,

*©J.Kotowicz

- pożyczka kwoty $e^{-rt_i}C(t_i)$ na okres kończący się w chwili t_i po wolnej od ryzyka stopie procentowej, gdzie $i \in \overline{1, n}$,
- lokata kwoty $C_0^e - P_0^e - S_0 + D_0 + e^{-rT}K$ na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej

jest strategią arbitrażową.

Zadanie 5. Niech instrument bazowy, który w trakcie trwania opcji przynosi dochody $C(t_i)$, gdzie $i \in \overline{1, n}$, płatne w ustalonych chwilach czasu $0 < t_1 < \dots < t_n < T$. Przy założeniu, że $C_0^e - P_0^e - S_0 + D_0 + e^{-rT}K < 0$, gdzie $D_0 = \sum_{i=1}^n e^{-rt_i}C(t_i)$, pokaż, że strategia o następujących elementach

- pozycja krótka na opcji sprzedaży,
- krótka sprzedaż instrumentu bazowym,
- pozycja długa na opcji kupna,
- lokata kwoty $e^{-rT}K$ na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej,
- lokata kwoty $e^{-rt_i}C(t_i)$ na okres kończący się w chwili t_i po wolnej od ryzyka stopie procentowej, gdzie $i \in \overline{1, n}$,
- lokata kwoty $-C_0^e + P_0^e + S_0 - D_0 - e^{-rT}K$ na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej

jest strategią arbitrażową.

Zadanie 6. W oparciu o zadania 4 i 5 sformułuj parytet kupna-sprzedaży dla opcji europejskich na instrument bazowy, który w trakcie trwania opcji przynosi dochody $C(t_i)$, gdzie $i \in \overline{1, n}$, płatne w ustalonych chwilach czasu $0 < t_1 < \dots < t_n < T$.

Zadanie 7. Niech instrument bazowy, który w trakcie trwania opcji amerykańskiej nie przynosi dochodu. Przy założeniu, że $C_0^a - P_0^a - S_0 + e^{-rT}K > 0$ pokaż, że strategia o następujących elementach

- pozycja długa na opcji sprzedaży,
- pozycja długa na instrumencie bazowym,
- pozycja krótka na opcji kupna,
- pożyczka kwoty $e^{-rT}K$ na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej,
- lokata kwoty $C_0^a - P_0^a - S_0 + e^{-rT}K$ na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej

jest strategią arbitrażową.

Zadanie 8. Niech instrument bazowy, który w trakcie trwania opcji amerykańskiej nie przynosi dochodu. Przy założeniu, że $C_0^a - P_0^a - S_0 + K < 0$ pokaż, że strategia o następujących elementach

- pozycja krótka na opcji sprzedaży,
- krótka sprzedaż instrumentu bazowym,
- pozycja długa na opcji kupna,
- lokata kwoty K na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej,
- lokata kwoty $-C_0^a + P_0^a + S_0 - K$ na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej

jest strategią arbitrażową.

Zadanie 9. Rozpatrzmy europejskie opcje kupna i sprzedaży na ten sam instrument bazowy o ustalonych: czasie trwania T , cenie gotówkowej instrumentu bazowego S_t i wolnej od ryzyka stopie procentowej r oraz nie przynoszący dochodu w trakcie trwania opcji. Niech $C^e(K)$ (odpowiednio $P^e(K)$) oznacza cenę opcji kupna (odpowiednio sprzedaży) z ceną wykonania K przy stałych pozostałych parametrach. Rozważmy funkcje $K \mapsto C^e(K)$ i $K \mapsto P^e(K)$.

1. Przy założeniach, że $K_1 < K_2$ oraz $C^e(K_1) \leq C^e(K_2)$ udowodnij, że strategia

- pozycja długa na opcji kupna z ceną wykonania K_1 ,
- pozycja krótka na opcji kupna z ceną wykonania K_2 ,
- lokata kwoty $C^e(K_2) - C^e(K_1)$ na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej

jest strategią arbitrażową.

2. Przy założeniach, że $K_1 < K_2$, $\alpha \in]0, 1[$, $K = \alpha K_1 + (1 - \alpha)K_2$ oraz $\alpha C^e(K_1) + (1 - \alpha)C^e(K_2) < C^e(K)$ udowodnij, że strategia

- pozycja krótka na 1 opcji kupna z ceną wykonania K ,
- pozycja długa na α sztuk opcji kupna z ceną wykonania K_1 ,
- pozycja długa na $(1 - \alpha)$ sztuk opcji kupna z ceną wykonania K_2 ,
- lokata kwoty $C^e(K) - \alpha C^e(K_1) - (1 - \alpha)C^e(K_2)$ na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej

jest strategią arbitrażową.

3. Wskaż strategię arbitrażową jeżeli $K_1 < K_2$ oraz $P^e(K_1) \geq P^e(K_2)$ (Wskazówka: strategia analogiczna do punktu 1).

4. Wskaż strategię arbitrażową jeżeli $K_1 < K_2$, $\alpha \in]0, 1[$, $K = \alpha K_1 + (1 - \alpha)K_2$ oraz $\alpha P^e(K_1) + (1 - \alpha)P^e(K_2) < P^e(K)$ (Wskazówka: strategia analogiczna do punktu 2).

5. W oparciu o punkt 1 i 2 udowodnij, że funkcja $K \mapsto C^e(K)$ jest malejącą i wypukłą.

6. W oparciu o punkt 3 i 4 udowodnij, że funkcja $K \mapsto P^e(K)$ jest rosnącą i wypukłą.

7. W oparciu o parytet kupna-sprzedazy udowodnij, że funkcje $K \mapsto C^e(K)$ i $K \mapsto P^e(K)$ spełniają warunek Lipschitza ze stałą e^{-rT} .

Zadanie 10. Przedstaw rozwiązanie zmodyfikowanego zadania 9 dla opcji europejskich, które w trakcie ich trwania przynoszą dochody $C(t_i)$, gdzie $i \in \overline{1, n}$, płatne w ustalonych chwilach czasu $0 < t_1 < \dots < t_n < T$ oraz takich, które przynoszą dochód płatny w sposób ciągły ze stopa q .