

# Zagadnienia na egzamin z wykładu *Analiza matematyczna III*

## 1. Przestrzeń euklidesowa.

- (a) **Iloczyn skalarny, norma i metryka euklidesowa** (własności, nierówność Schwarz'a, trójkąta).
- (b) **Ciągi w przestrzeni euklidesowej** (definicja granicy, ciągi współrzędnych ciągu i ich związek z granicą, działania na granicach, twierdzenie Bolzano-Weierstrassa).
- (c) **Elementy topologii przestrzeni euklidesowej - zwartość** (odcinek i jego zwartość, zwartość podzbiorów, twierdzenie Bolzano-Weierstrassa, lokalna zwartość).
- (d) **Elementy topologii przestrzeni euklidesowej - spójność** (odcinek i jego spójność, łamana i jej spójność, spójność zbiorów otwartych, spójność sumy zbiorów spójnych, spójność, a łamana, obszar, spójność przestrzeni euklidesowej).

## 2. Granice i ciągłość funkcji i odwzorowań wielu zmiennych.

- (a) **Granica** (definicja, kryterium Bolzano-Cauchy'ego, granice współrzędnych funkcji i ich związek z granicą, działania na granicach funkcji łącznie z granicą iloczynu skalarnego).
- (b) **Granice iterowane** (definicja, ich związek z granicą + kryterium Bolzano-Cauchy'ego).
- (c) **Ciągłość funkcji i odwzorowań** (definicje ciągłości w punkcie, na zbiorze, jednostajnej ciągłości, spełniających warunek Lipschitza, rzut i jego ciągłość i "lipschitzowatość", ciągłość współrzędnych i ciągłość granicy, działania na funkcjach ciągłych).
- (d) **Ciągłość i zwartość oraz spójność** (twierdzenie o ciągłym obrazie zbioru zwartego, twierdzenia Weierstrassa, Cantora, Darboux, o zachowywaniu znaku).

## 3. Różniczkowalność funkcji i odwzorowań wielu zmiennych.

- (a) **Różniczkowalność, różniczka, pochodna – 01** (definicje, warunki równoważne różniczkowalności, jednoznaczność różniczki – pochodnej, działania algebraiczne na pochodnych).
- (b) **Różniczkowalność, różniczka, pochodna – 02** (definicje, różniczka złożenia, różniczka odwzorowania odwrotnego, twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji i odwzorowania, pochodne składowych i związek z pochodną, pochodna odwzorowania stałego i liniowego).
- (c) **Pochodne cząstkowe** (definicja, macierz Jacobiego, jacobian, warunki konieczny oraz dostateczny różniczkowalności (związany z pochodnymi cząstkowymi), reguła łańcucha).
- (d) **Pochodne kierunkowe** (definicja, związek z pochodną cząstkową, pojęcie gradientu, twierdzenie o najszybszym kierunku wzrostu funkcji).
- (e) **Pochodne cząstkowe wyższych rzędów** (definicja, twierdzenie Schwarz'a o pochodnych mieszanych oraz o symetrii drugiej pochodnej, klasy  $C^{(k)}$  i  $C^\infty$ ).
- (f) **Równoważna charakteryzacja klasy  $C^{(k)}$**  (norma odwzorowania liniowego oraz warunek równoważny jej definicji, równoważna charakteryzacja klasy  $C^{(1)}$  i ogólnie klasy  $C^{(k)}$ , macierz Hessego).
- (g) **Twierdzenie Taylora** (różne sformułowania twierdzenia).
- (h) **Odwzorowanie odwrotne i uwikłane** (twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym i wnioski z niego, twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym).

## 4. Analiza ekstremów.

- (a) **Ekstrema funkcji** (definicje, punkt stacjonarny, warunek konieczny, warunek dostateczny).
- (b) **Ekstrema warunkowe** (twierdzenie Lagrange'a, funkcja Lagrange'a, punkt i wartość regularna oraz krytyczna, warunek dostateczny).

## 5. Zastosowania oraz miscellanea

- (a) **Odwzorowania liniowe przestrzeni euklidesowych** (definicja, norma, ciągłość, różniczkowalność, twierdzenie o oszacowanie minimalnego stopnia rozciągania liniowego izomorfizmu).
  - (b) **Funkcje jednorodne** (definicja, twierdzenie Eulera).
  - (c) **Odwzorowania zwięzające** (definicja, twierdzenia Banacha, twierdzenie o ciągłej zależności punktu stałego).
  - (d) **Niezależność funkcyjna** (definicja, twierdzenie o niezależności funkcyjnej).
  - (e) **Forma kwadratowa** (macierz symetryczna, forma kwadratowa, formy kwadratowe dodatnio i ujemnie określone oraz nieokreślone, twierdzenie Sylwestra).
  - (f) **Wektor styczny do zbioru** (definicja, własności, poziomica, warunek konieczny i dostateczny do poziomicy, hiperpłaszczyzna styczna).
  - (g) **Rozmaitość zanurzona w przestrzeni euklidesowej** (definicja, twierdzenie o wektorach stycznych do pod-rozmaitości).
  - (h) **Przekształcenia wieloliniowe** (definicja, ciągłość, norma, różniczka).
6. Całka względem miary nieujemnej.
- (a) **Podstawowe pojęcia** (definicja, związek po całki po zbiorze z całką po całej przestrzeni, równoważność podejść dwóch pierwszych części definicji, monotoniczność względem funkcji, całka z funkcji stałej).
  - (b) **Podstawowe własności – 01** (jednorodność, monotoniczność ze względu na zbiory względem których się całkuje, funkcje zbiorów  $\mu_f$  i ich własności).
  - (c) **Podstawowe własności – 02** (warunek równoważny całkowalności, całka, a zbiory miary zero, moduł i jego związek z całkowaniem, od własności całki do własności funkcji).
  - (d) **Przejście z granicą pod znak całki – 01** (twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej, lemat Fatou).
  - (e) **Przejście z granicą pod znak całki – 02** (addytywność całki względem funkcji całkowalnych, twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej).
7. Miara Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej.