Zadania Międzynarodowej Białorusko-Litewsko-Ukraińsko-Polskiej Olimpiady Matematycznej
rok szkolny 2016/2017, etap drugi

Zadanie 1.

Na tablicy zapisane są kredą liczby całkowite od -10 do 10 włącznie. Dopuszczalne jest wytarcie dwóch dowolnych liczb A i B i wpisanie w ich miejsce liczb określonych wzorami: (3A – 4B)/5 oraz (4A + 3B)/5. Czy można – powtarzając tę operację kilka razy – osiągnąć to, że wszystkie liczby zapisane na tablicy będą równe? Proszę uzasadnić odpowiedź, zapisując całe rozumowanie.

Zadanie 2.

Wyznaczyć wszystkie takie liczby rzeczywiste x, dla których liczby $x+\sqrt{3}$ oraz $x^2+\sqrt{3}$ są wymierne.

Zadanie 3.

Wykazać, że liczba $53^{53} - 33^{33}$ jest podzielna przez 10.

Zadanie 4.

Rozwiązać w liczbach całkowitych następujące równanie: $(x^2+4)(y^2+1)=8xy$

Zadanie 5.

Bok AB trójkąta ABC podzielono na n równych części (punkty podziału oznaczono: $B_0=A$, B_1, B_2, …, $B_n=B$), a bok AC tego trójkąta podzielono na $n+1$ równych części (punkty podziału: $C_0=A$, C_1, C_2, …, $C_{n+1}=C$). Zmalowano trójkąty $C_iB_iC_{i+1}$ dla $i=1, 2, \dots n$. Jaka część pola trójkąta ABC została zamalowana?

Zadanie 6.

Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę ścian i w którego każdym wierzchołku schodzi się parzysta liczba krawędzi? Odpowiedź proszę uzasadnić.

Białystok, 18 lutego 2017