# Ćwiczenia 09
# Procesy stochastyczne
# kierunek: matematyka, studia II°
# specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

**Zadanie 1.** *Udowodnić fakty podane na wykładach.*

**Zadanie 2.** *Niech* $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$*. Udowodnij, że:*

1. $E(X^{2k+1}) = 0$ *dla każdego* $k \in \mathbb{N}$*;*
2. $E(X^{2k}) = \sigma^2(2k-1)E(X^{2k-2})$ *dla każdego* $k \in \mathbb{N}$*;*
3. $E(X^2) = \sigma^2$, $E(X^4) = 3\sigma^4$, $E(X^6) = 15\sigma^6$*;*
4. $E(X^{2k}) = (2k-1)!!\sigma^{2k}$ *dla każdego* $k \in \mathbb{N}$*.*

**Zadanie 3.** *Udowodnić, że funkcja kowariancji procesu Wienera wyraża się wzorem*

$$\forall_{t,s \in T}\ K_W(t,s) = \operatorname{cov}(W_t, W_s) = \min(t,s).$$

**Zadanie 4.** *Niech* $(W_t)$ *będzie standardowym procesem Wienera. Udowodnij, że*

1. *dla dowolnych liczb nieujemnych* $t$ *i* $s$ *takich, że* $s \leqslant t$ *rozkłady zmiennych* $W_t - W_s$ *i* $W_{t-s}$ *są identyczne;*
2. *dla dowolnej liczby dodatniej* $c$ *rozkłady zmiennych* $W_{ct}$ *i* $\sqrt{c}W_t$ *są identyczne.*

**Zadanie 5.** *Niech* $c$ *będzie ustaloną liczbą dodatnią i niech ponadto*

$$\forall_{t \in [0,+\infty[}\ Z_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c} W_{c^2 t}.$$

*Udowodnij, że proces* $(Z_t)_{t \geqslant 0}$ *jest procesem Wienera.*

**Zadanie 6.** *Niech*

$$\forall_{t \in [0,+\infty[}\ Z_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} tW_{\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}.$$

*Udowodnij, że proces* $(Z_t)_{t \geqslant 0}$ *jest procesem Wienera.*

**Zadanie 7.** *Niech* $T \geqslant 0$ *będzie ustalone. Określamy proces*

$$\forall_{t \in [0,+\infty[}\ Z_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} W_t & \text{dla } t \leqslant T \\ 2W_T - W_t & \text{dla } t > T \end{cases}.$$

*Udowodnij, że proces* $(Z_t)_{t \geqslant 0}$ *jest procesem Wienera.*

**Zadanie 8.** *Niech* $T$ *będzie ustaloną liczbą dodatnią i niech*

$$\forall_{t \in [0,+\infty[}\ V_t \stackrel{\text{def}}{=} W_{T+t} - W_T.$$

*Udowodnij, że proces* $(V_t)_{t \geqslant 0}$ *jest procesem Wienera.*

**Zadanie 9.** *Niech*

$$\forall_{t\in[0,+\infty[}\ B_t \stackrel{\text{def}}{=} (1+t)(W_{\frac{t}{1+t}} - \frac{t}{1+t}W_1).$$

*Udoodnij, że proces $(B_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera.*

**Zadanie 10.** *Niech*

$$\forall_{t\in[0,+\infty[}\ G_t \stackrel{\text{def}}{=} -W_t.$$

*Udowodnij, że proces $(G_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera.*

**Zadanie 11.** *Niech $a$ i $b$ będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b$, zaś $\{t_0, t_1, \dots t_n\}$ dowolnym podziałem odcinka $[a, b]$ tzn. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $\Delta_n$ średnicą tego podziału tzn. $\Delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}(t_{i+1} - t_i)$. Udowodnij, że*

$$E\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2\right) = b - a$$

$$E\left(\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2 - (b-a)\right]^2\right) = 2(b-a)\Delta_n.$$

**Zadanie 12.** *Niech $a$ i $b$ będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b$, $\{t_0, t_1, \dots t_n\}$ dowolnym podziałem odcinka $[a, b]$, zaś $\tau_i \stackrel{\text{def}}{=} \alpha t_{i+1} + (1-\alpha)t_i$ dla $i = 0, 1, \dots, n-1$, gdzie $\alpha \in [0, 1]$. Udowodnij, że*

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} W_{\tau_i}\left[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right] \quad &= \quad \frac{1}{2}W^2(b) - \frac{1}{2}W^2(a) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}]^2 \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1}[W_{\tau_i} - W_{t_i}]^2 \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1}[W_{t_{i+1}} - W_{\tau_i}][W_{\tau_i} - W_{t_i}].\end{aligned}$$

**Zadanie 13.** *Niech $a$ i $b$ będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b$, $\{t_0, t_1, \dots t_n\}$ dowolnym podziałem odcinka $[a, b]$, zaś $\tau_i \stackrel{\text{def}}{=} \alpha t_{i+1} + (1-\alpha)t_i$ dla $i = 0, 1, \dots, n-1$, gdzie $\alpha \in [0, 1]$. Udowodnij, że*

$$E\left(\sum_{i=0}^{n-1}[W_{\tau_i} - W_{t_i}]^2\right) = \alpha(b-a)$$

$$E\left(\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(W_{\tau_i} - W_{t_i}\right)^2 - \alpha(b-a)\right]^2\right) \leqslant 2\alpha(b-a)\Delta,$$

*gdzie $\Delta$ jest średnicą tego podziału.*

**Zadanie 14.** *Niech $a$ i $b$ będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b$, $\{t_0, t_1, \dots t_n\}$ dowolnym podziałem odcinka $[a, b]$ tzn. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, zaś $\tau_i \stackrel{\text{def}}{=} \alpha t_{i+1} + (1-\alpha)t_i$ dla $i = 0, 1, \dots, n-1$, gdzie $\alpha \in [0, 1]$. Udowodnij, że*

$$E(\sum_{i=0}^{n-1}\left[W_{\tau_i} - W_{t_i}\right]\left[W_{t_{i+1}} - W_{\tau_i}\right]) = 0,$$

$$E\left(\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left[W_{\tau_i} - W_{t_i}\right]\left[W_{t_{i+1}} - W_{\tau_i}\right]\right)^2\right) \leqslant \alpha(1-\alpha)\Delta(b-a),$$

*gdzie $\Delta$ jest średnicą tego podziału.*

**Zadanie 15.** *Udowodnij, że* $(W_t)_{t\geqslant 0}$ *jest martyngałem względem naturalnej filtracji* $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$.

**Zadanie 16.** *Udowodnij, że* $(W_t^2)_{t\geqslant 0}$ *jest podmartyngałem, a* $(W_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ *martyngałem względem naturalnej filtracji* $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$.

**Zadanie 17.** *Udowodnij, że* $E\left(\exp(\lambda Y)\right) = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$ *dla* $Y \in \mathcal{N}(0,1)$.

**Zadanie 18.** *Udowodnij, że jeśli* $(W_t)_{t\geqslant 1}$ *jest procesem Wienera względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, *to dla dowolnej liczby rzeczywistej* $\lambda$ *proces* $\left(\exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)_t\right)_{t\geqslant 0}$ *jest* $(\mathcal{F}_t)_t$*-martyngałem.*

**Zadanie 19.** *Sprawdzić, czy* $2W_t - W_s$ *oraz* $W_t - 2W_s$ *są niezależne od* $W_s - W_r$, *gdzie* $0 \leqslant r < s < t$, *a* $(W_t)_{t\geqslant 0}$ *jest standardowym procesem Wienera.*

## Uzupełnienie wykładu

**Zadanie 20** (Fakt konieczny do dowodu twierdzenia 1 z wykładu 09)**.** *Niech* $(M_t)_{t\geqslant 0}$ *będzie* $(\mathcal{F}_t)$*-nadmartyngałem, dla którego istnieje całkowalna zmienna losowa* $\xi$ *taka, że dla dowolnego* $s \geqslant 0$ *zachodzi nierówność* $M_s \geqslant E(\xi|\mathcal{F}_s)$ *p.n.. Niech* $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ *będzie nierosnącym ciągiem momentów stopu względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. *Udowodnij, że rodzina zmiennych losowych* $(M_{\tau_n})_n$ *jest jednostajnie całkowalna.*

**Zadanie 21** (Twierdzenie 1 z wykładu 09 jest uogólnieniem tego twierdzenia)**.** *Niech* $(M_n)_{n\geqslant 1}$ *będzie* $(\mathcal{F}_n)$*-nadmartyngałem ograniczonym z dołu przez pewien* $(\mathcal{F}_n)$*-martyngał prawostronnie domknięty. Korzystając m.in. z poprzedniego zadania udowodnij, że jeśli* $\tau$ *i* $\sigma$ *są momentami stopu względem tej samej filtracji takimi, że* $P(\{\sigma \leqslant \tau\}) = 1$, *to zachodzi nierówność*

$$M_\sigma \geqslant E(M_\tau|\mathcal{F}_\sigma) \quad p.n..$$

**Zadanie 22** (Twierdzenie 2 z wykładu 09 jest uogólnieniem tego twierdzenia)**.** *Niech* $(M_n)_{n\geqslant 1}$ *będzie prawostronnie domkniętym* $(\mathcal{F}_n)$*-martyngałem, zaś* $\tau$ *i* $\sigma$ *niech będą momentami stopu względem filtracji* $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ *takimi, że* $P(\{\sigma \leqslant \tau\}) = 1$. *Wtedy*

$$M_\sigma = E(M_\tau|\mathcal{F}_\sigma) \quad (p.n.).$$