Statystyka matematyczna - wykład jedenasty[1]
Szeregi czasowe – część I.
kierunek: matematyka I°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

Instytut Informatyki Uniwersytet w Białymstoku

Spis treści

Dane statystyczne

Dane statystyczne możemy w ogólności podzielić na

1. dane przekrojowe (cross sectional data) – wiele jednostek obserwowanych w jednej jednostce czasu,
2. szeregi czasowe (time series data) – jedna jednostka obserwowana w wielu jednostkach czasu,
3. dane panelowe (panel data, cross sectional time series data) – wiele jednostek obserwowanych w wielu jednostkach czasu.

Pojęcie szeregu czasowego. I

Zajmujemy się szeregami czasowymi.

Definicja 1

Szeregiem czasowym nazywamy zbiór wartości badanej cechy, zaobserwowany w różnych momentach (przedziałach) czasu. Jest on uporządkowany chronologicznie.

Uwaga 1

W rachunku prawdopodobieństwa odpowiednikiem szeregu czasowego jest ciąg zmiennych losowych, będący szczególnym przypadkiem procesu stochastycznego.

Szeregi czasowe tworzą m.in.

- dane giełdowe,
- dane dotyczące urządzeń fizycznych,

Pojęcie szeregu czasowego. II

- dane dotyczące pogody,
- dane biologiczne.

Uwagi

1. Niech $t = 1, \ldots, n$ będą momentami czasu (ewentualnie przedziałami czasu), natomiast y_t wynikami obserwacji pewnego zjawiska w danych momentach lub okresach czasu. Wtedy szereg czasowy jest zbiorem
$$\{y_t : t = 1, \ldots, n\} \equiv \{(t, y_t) : t = 1, \ldots, n\}.$$
2. Szereg czasowy można przedstawić jako tablicę[2], bądź jako wykresy – punkty o współrzędnych (t, y_t).
3. Niech teraz $\{Y_t : t = 1, \ldots, n\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych, zaś $\{y_t : t = 1, \ldots, n\}$ konkretną realizacją tego ciągu. Wtedy szereg czasowy jest ciągiem zmiennych losowych
$$\{(t, Y_t) : t = 1, \ldots, n\}$$
o określonym rozkładzie łącznym.

[2] Zobacz dowolny rocznik statystyczny.

Składniki szeregu czasowego. I

Składowe szeregu czasowego:

1. tendencja rozwojowa – trend,
2. wahania cykliczne/koniunkturalne – składowa cykliczna,
3. wahania okresowe/sezonowe – składowa sezonowa,
4. wahania przypadkowe – część resztowa.

Uwaga 2

Składowe wymienione w punktach od 1 do 3 określa się mianem systematycznych, tworzą bowiem systematyczną część szeregu, tzn. możliwą do objaśnienia.

Składniki szeregu czasowego. II

- Trendem nazywamy własność szeregu ujawniającą się poprzez systematyczne, jednokierunkowe zmiany (wzrost lub spadek) poziomu badanego zjawiska w długim okresie czasu. W wypadku trendu na zjawisko oddziaływuje stale pewien zbiór wyników nazywany przyczynami głównymi.
- Wahania koniunkturalne to długookresowe, falowe inaczej rytmiczne wahania wokół tendencji rozwojowej. Obserwowane są one w dłuższych od roku okresach i ich analiza wymaga długoletnich obserwacji.
- Wahaniem okresowym nazywamy rytmiczne wahania wokół jego tendencji rozwojowej o określonym cyklu i okresie nie przekraczającym jednego roku. Reprezentują efekty powtarzające się z pewną prawidłowością, co roku w tych samych okresach. Występują one często pod wpływem czynników przyrodniczych lub kalendarza.

Składniki szeregu czasowego. III

4. Wahania przypadkowe nie podlegająca objaśnieniu (nie dająca się przypisać do wymienionych źródeł zmienności) nazywana jest składową przypadkową (niesystematyczną). Zawiera ona przypadkowe wahania szeregu wokół części systematycznej, które trudno jest zidentyfikować a priori.

Składowe szeregu czasowego połączone mogą być związkiem

1. addytywnym,
2. multiplikatywnym,
3. addytywno-multiplikatywnym.

Składniki szeregu czasowego. IV

W przypadku sezonowości addytywnej mamy do czynienia z efektami sezonowymi polegającymi na zaniżeniu lub zawyżeniu wartości zjawiska w okresach tego samego typu, np. we wszystkich styczniach, czy np. w II kwartale każdego roku, o w przybliżeniu stałą wartość przez cały czas obserwacji.
W przypadku sezonowości multiplikatywnej efekty sezonowe są w przybliżeniu stałe w ujęciu procentowym, tzn. gdy większe są wartości zjawiska, to większe i wahania sezonowe.
Wskaźnik addytywny jest dodawany do wartości trendu, multiplikatywny mnożony.
Występowanie w szeregu czasowym składowej sezonowej prowadzi do problemów z interpretowaniem zmian zjawiska z okresu na okres. Aby właściwie analizować aktualne tendencje dotyczące wskaźników krótkookresowych, konieczne jest wyeliminowanie wpływów sezonowych, w

Składniki szeregu czasowego. V

przeciwnym razie uprawnione jest ich porównanie tylko dla okresów jednoimiennych (np. styczeń 2004 do stycznia 2003).

Analiza szeregów czasowych. I

Celem analizy szeregów czasowych jest zbudowanie modelu pewnego zjawiska/procesu w oparciu o obserwowane zmiany w czasie pewnych mierzalnych wielkości opisujących ten proces.

Uwaga 3

Analiza szeregów czasowych (ang. time series) jest powiązana z metodami prognozowania (ang. forecasting).

Analiza szeregów czasowych sprowadza się do następujących trzech zagadnień

1. analiza opisowa szeregu czasowego (tj. obliczanie średniej arytmetycznej lub chronologicznej, wariancji, odchylenia standardowego),
2. porównanie poziomów zjawiska w czasie (tj. analiza dynamiki zjawisk z wykorzystaniem miar dynamiki),

Analiza szeregów czasowych. II

3. dekompozycja szeregu czasowego (tj. wyodrębnianie tendencji rozwojowej, wahań sezonowanych (okresowych) i wahań przypadkowych).

Dekompozycja szeregu czasowego polega na:

1. wyodrębnieniu trendu – ilustrującego działanie przyczyn głównych,
2. wyodrębnieniu wahań sezonowych – ilustrujących działania przyczyn sezonowych; polega na wyznaczeniu wskaźników sezonowości zwanych również wskaźnikami okresowości lub wskaźnikami wahań sezonowych,
3. wyodrębnieniu wahań przypadkowych - ilustrujących działania przyczyn przypadkowych; efekt ich oddziaływania wyraża się za pomocą odchylenia standardowego reszt (odpowiednio obliczonego).

Wyrównywanie szeregów czasowych. I

Szereg czasowy o znacznych wahaniach sezonowych poddaje się wyrównywaniu, w celu otrzymania szeregu, w którym dobrze widoczny jest trend rozwojowy.
Tak więc wyrównywanie szeregów czasowych jest to zabieg prowadzący do

- eliminacji wahań,
- wyodrębnienia tendencji rozwojowej badanego zjawiska (tendencja rosnąca, malejąca, bądź stabilizacja).

Wyrównanie sezonowe szeregu czasowego polega na usunięciu z szeregu składowej sezonowej (szereg wyrównany jest to złożenie wszystkich składowych, poza składową sezonową). Aby można było wykonać tę operację, należy, w przypadku większości metod wyrównania sezonowego, wyodrębnić wszystkie składowe, a więc dokonać dekompozycji.
Procedurę wyrównań sezonowych podzielić można na 2 etapy. Pierwszy jest określany jako wstępne wyrównanie (pre-adjustment), w drugim dokonuje się właściwa dekompozycja i eliminowanie wpływu efektów sezonowych.

Wstępne wyrównanie. I

Podczas procedury wstępnych wyrównań wykonywane są zwykle następujące czynności:

1. określenie charakteru związku między składowymi (czy ma charakter addytywny czy multiplikatywny), np. poprzez testowanie potrzeby zastosowania wstępnej transformacji logarytmicznej,
2. wykrywanie wartości odstających (nietypowych zaburzeń) występujących w szeregu,
3. wyrównanie dniami roboczymi,
4. wstępna identyfikacja modelu,
5. wyznaczenie wartości prognozowanych szeregu poza okresem podlegającym obserwacji („*przedłużenie*" szeregu na jego końcach), jeżeli jest to konieczne z punktu widzenia stosowanej metody wyrównania.

Wstępne wyrównanie. II

Występowanie nietypowych zaburzeń w szeregu, będących efektem sporadycznych, nieregularnych zdarzeń, powoduje – jeśli nie zostaną one zidentyfikowane i odpowiednio potraktowane – zniekształcenia w analizie szeregów oraz utrudnia lub wręcz uniemożliwia ich modelowanie. Dlatego stosowane są specjalne algorytmy wykrywania takich zaburzeń, a następnie eliminowania ich wpływu poprzez odpowiednie uwzględnienie w modelu, korektę lub wykluczenie obserwacji z analizy.
Stosowane procedury wyrównania rozróżniają następujące typy zaburzeń, testując ich występowanie i odpowiednio je traktując:

1. pojedyncze obserwacje odstające (AO), gdy zaburzenie dotyczy pojedynczej obserwacji, po czym szereg wraca do wcześniejszej trajektorii, np. strajk, anomalie pogodowe, błędy rejestracji,

Wstępne wyrównanie. III

2. zmiana poziomu (LS), mająca miejsce, gdy zaburzenie powoduje zmianę wartości zjawiska, która utrzymuje się w następnych okresach, tj. zjawisko rozwija się dalej na zmienionym poziomie, następuje przesunięcie jego trajektorii – np. zmiany nomenklatury, zmiany w definicjach,
3. zmiana przejściowa (TC), gdy efekt zaburzenia stopniowo wygasa i szereg wraca do wcześniejszej trajektorii, jednak zajmuje to kilka kolejnych okresów.

W celu realizacji wyrównania dniami roboczymi testowane są różne warianty regresorów: dla poszczególnych dni tygodnia, ich kombinacji, efektu roku przestępnego oraz efektu Wielkanocy. Dla układu regresorów uznanego za optymalny szacowane są efekty dni roboczych i eliminowane z szeregu.

Wstępne wyrównanie. IV

Produktem wyjściowym wyrównań wstępnych jest szereg „*wyczyszczony*” z efektów analizowanych na tym etapie, pozbawiony „*zaburzeń*” utrudniających rzeczywistą analizę sezonowości.

Dekompozycja i eliminowanie wpływu efektów sezonowych. I

Jest ona realizowana w drugim etapie procedury wyrównania i obejmuje:

1. dekompozycję szeregu na składowe,
2. przyporządkowanie efektów regresji do poszczególnych składowych,
3. właściwe wyrównanie sezonowe, polegające na usunięciu z szeregu składowej sezonowej,
4. diagnostykę modelu, uzyskanej dekompozycji szeregu oraz wyrównania.

Szeregi czasowe wygładzamy stosując metody

1. mechaniczną oraz
2. analityczną.

Metody mechaniczne wyrównywania szeregów

1. za pomocą średnich

Dekompozycja i eliminowanie wpływu efektów sezonowych. II

1. ruchomych,
2. ruchomych scentrowanych,

2. wyrównywanie wykładnicze,

Uwaga 4

Im dłuższa średnia ruchoma, tym większe straty na informacji, ale i lepsze wygładzenie oraz możliwość zaobserwowania tendencji rozwojowej badanego zjawiska.

Metoda analityczne to dopasowanie odpowiedniej funkcji do danych szeregu czasowego z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów.

Wyrównywanie za pomocą średnich ruchomych. I

Obliczamy średnie ruchome i zastępujemy nimi pierwotne wyrazy szeregu czasowego.
Średnie ruchome obliczamy zazwyczaj z nieparzystej ilości sąsiadujących ze sobą wyrazów szeregu, aby uzyskany wynik móc przyporządkować całkowitej wartości t znajdującej się w środku przedziału.
Średnie ruchome obliczmy według wzoru

$$\overline{y_t} = \frac{1}{2q+1} \sum_{n=-q}^{q} y_{t+n}. \tag{1}$$

Wyrównywanie za pomocą średnich ruchomych. II

Uwaga 5

- *Tak wiec mamy średnie ruchome 3 - okresowe dla $q = 1$, średnie ruchome 5 - okresowe dla $q = 2$ itd.*
- *Nowy szereg czasowy złożony z obliczonych średnich ruchomych jest krótszy od pierwotnego o $2q$ wyrazów.*
- *Im większą liczbę wyrazów bierzemy do obliczenia średnich ruchomych, tym silniej wyrównanym szereg.*

Przykład 1

Rozważmy szereg czasowy: $20, 22, 19, 20, 27, 15, 17, 16, 14, 23, 25, 24, 19, 28, 21, 25, 20, 26, 11, 15, 21, 30, 26, 28, 10.$
Wyznaczyć średnie 3-okresowe.

Średnie ruchome scentrowane. I

Definicja 2

Przy parzystej liczbie okresów stosujemy średnie ruchome scentrowane. Wyrażają się one wzorem

$$\overline{y_t} = \frac{1}{2q}\left[\frac{1}{2}y_{t-q} + \sum_{n=-q+1}^{q-1} y_{t+n} + \frac{1}{2}y_{t+q}\right], \tag{2}$$

gdzie $q = \frac{d}{2}$, *a* d *jest (parzysta) liczba podokresów w cyklu wahań.*

Przykład 2

Rozważmy szereg czasowy: $20, 22, 19, 20, 27, 15, 17,\ 16, 14, 23, 25, 24,$ $19, 28, 21, 25, 20,\ 26, 11, 15, 21,\ 30, 26, 28.$

Wyznaczyć średnie 4-okresowe.

Wyrównywanie wykładnicze. I

Oznaczmy przez S_t dla $t = 1, \ldots, n$, wyrównane wartości szeregu czasowego.
Konstruujemy je w następujący sposób.
Niech $\alpha \in]0, 1[$ będzie ustalona. Wtedy

$$S_1 := y_1 \tag{3}$$
$$S_t := \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1} \text{ dla } 2 \leqslant t \leqslant n. \tag{4}$$

α i $1-\alpha$ występujące w równaniu (4) są wagami, a S_t jest średnią ważoną.
Zachodzi następująca zależność

Wyrównywanie wykładnicze. II

Stwierdzenie 1

Średnie ważone S_t dla $t = 2, \ldots, n$ wyrażają się wzorem

$$S_t = \sum_{j=0}^{t-2} \alpha(1-\alpha)^j y_{t-j} + (1-\alpha)^{t-1} y_1. \tag{5}$$

Wyrównywanie wykładnicze. III

Uwaga 6

1. *Z powodu malejących wag obserwacje nowsze mają większy wpływ na wartość wyrównywaną niż obserwacje starsze.*
2. *Przy dobieraniu stałej α kierujemy się następującymi zasadami*
   - *Jeżeli jest duży udział wahań losowych, to do ich skutecznego wyeliminowania należy stałą przyjąć bliską zeru.*
   - *Jeżeli udział wahań losowych jest bardzo mały, to stałą dobieramy bliską jedynce otrzymując w ten sposób szereg dobrze odzwierciedlający trend.*
3. *W praktyce wystarczy brać $\alpha \in [0{,}1; 0{,}3]$.*

Dopasowanie krzywych MNK. I

Dopasowanie krzywych metodą najmniejszych kwadratów prowadzimy w celu uzyskania opisu trendu zjawiska za pomocą funkcji.
Stosowane są najczęściej następujące typy funkcji

1. funkcja liniowa $y = \alpha t + \beta$,
2. funkcja potęgowa $y = \alpha t^{\beta}$,
3. funkcja wykładnicza $y = \alpha \beta^{t}$,
4. funkcja kwadratowa $y = \alpha + \beta t + \gamma t^{2}$,
5. funkcja logistyczna $y = \frac{\alpha}{1+\beta e^{-\gamma t}}$.

Dopasowanie krzywych MNK. II

Estymacje parametrów α i β dla funkcji liniowej prowadzimy tak, jak w analizie regresji liniowej. Stosujemy wzory zastępując x_i przez zmienną czasową t. Pozostałe funkcje, za wyjątkiem logistycznej, transformujemy do postaci liniowej i następnie stosujemy metodę najmniejszych kwadratów.

Dopasowanie krzywych MNK. III

Uwaga 7

Wygładzanie szeregu czasowego polega tutaj na oszacowaniu liniowej funkcji trendu

$$\hat{y}_t = at + b.$$

Nieznane parametry a i b wyliczamy na podstawie danych z szeregu czasowego stosując następujące wzory:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sum_{t=1}^{n} (t - \overline{t})(y_t - \overline{y}_t)}{\sum_{t=1}^{n} (t - \overline{t})^2} \\ b &= \overline{y} - a\overline{t}, \end{aligned}$$

gdzie a oznacza okresowe tempo wzrostu lub ubytku wielkości badanego zjawiska, zaś b stan zjawiska w okresie wyjściowym.

Motywacja

Wahania okresowe można zaobserwować w szeregach czasowych złożonych z obserwacji prowadzonych w okresach krótszych niż rok (np. szereg wieloletni i dane miesięczne).
W przypadku szeregu wieloletniego i danych miesięcznych mówimy o rocznym cyklu wahań z 12 podokresami. Występują również wahania tygodniowe i dobowe (np. zużycie energii).
Miarą wahań okresowych są wskaźniki wahań okresowych zwane wskaźnikami sezonowości.
Sposób konstrukcji wskaźników uzależniony jest od siły trendu szeregu czasowego (silny, umiarkowany lub nie występujący w ogóle) oraz od tego, w jaki sposób wahania okresowe rozkładają się na trend (addytywnie, czy multiplikatywnie).

Algorytm postępowania. I

Aby wyodrębnić wahania sezonowe (cykliczne) w szeregu o n okresach dzielimy ten szereg na s cykli. Podział musi być taki, aby w każdym cyklu występowała stała liczba k faz.

Postępujemy według następującego schematu

1. wygładzamy szereg czasowy analitycznie lub mechanicznie,
2. na podstawie wyznaczonej funkcji trendu obliczamy wartości teoretyczne,
3. uwalniamy szereg czasowy od trendu,
4. pozbywamy się wahań przypadkowych otrzymując SUROWE WSKAŹNIKI SEZONOWOŚCI i ewentualnie CZYSTE WSKAŹNIKI SEZONOWOŚCI.

Algorytm postępowania. II

Uwaga 8

(wskaźnik surowy - 1) $\times 100\%$*: „O ile procent poziom zjawiska w danej fazie cyklu jest wyższy (znak plus) lub niższy (znak minus) od poziomu jaki byłby osiągnięty, gdyby nie było wahań cyklicznych, a rozwój następował zgodnie z trendem".*

Wskaźniki wahań okresowych dla szeregu czasowego bez trendu

W tym przypadku wielkość wahań określa się porównując średnie wartości badanej zmiennej obliczone dla poszczególnych podokresów, ze średnią wartością tej zmiennej.
Niech $\{y_t^{(i)} : t = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, d\}$ będzie n - elementowym szeregiem czasowy, gdzie

- t - bieżący numer obserwacji,
- i - numer podokresu cyklu,
- N_i - liczba numerów obserwacji, dotyczących i - tego podokresu cyklu, czyli

$$N_i = \{t : t = 1, \ldots, n \wedge t = i + kd \wedge k = 0, 1, 2 \ldots\}.$$

- n_i - liczebność zbioru N_i.

Średnia wartość badanej cechy w ustalonym podokresie cyklu

Określamy średnią wartość badanej zmiennej w i - tym podokresie cyklu

$$\overline{y_i} = \frac{1}{n_i} \sum_{t \in N_i} y_t^{(i)}, \tag{6}$$

dla $i = 1, \ldots, d$.

Niech $\overline{y}$ będzie średnią z całego szeregu czasowego tzn.

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} y_t.$$

Mamy wtedy

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{d} \overline{y_i} n_i.$$

Wskaźnik wahań okresowych

Definicja 3

Wskaźnik wahań okresowych O_i dla szeregu czasowego bez trendu definiujemy jako wielkość

$$O_i = \frac{\overline{y_i}}{\overline{y}}, \tag{7}$$

gdzie $i = 1, \ldots, d$.

Uwaga 9

Wyrażany jest on często procentowo.

Uwagi

1. Można mówić, że na skutek wahań okresowych wielkość zjawiska w i - tym podokresie jest o $(O_i - 1)$ wyższa lub niższa od średniego poziomu zjawiska w całym okresie.
2. Zachodzi ponadto warunek

$$\sum_{i=1}^{d}(O_i - 1) = 0. \tag{8}$$

Wskaźniki wahań okresowych dla szeregu czasowego bez trendu – miary absolutne

Można również dokonywać pomiary wielkości wahań okresowych za pomocą miar absolutnych wyrażających się wzorem

$$S_i = \overline{y_i} - \overline{y}. \tag{9}$$

Wskaźnik wahań okresowych dla szeregu z trendem

1. W przypadku, gdy występuje wyraźny trend, to średnia arytmetyczna nie reprezentuje dobrze poziomu badanego zjawiska.
2. Wielkość wahań okresowych ocenia się porównując pierwotny szereg czasowy z szeregiem wyrównanym.

Przypadek wahań multiplikatywnych. I

Mamy

- Indywidualne wskaźniki sezonowości $\frac{y_t}{\overline{y}_t}$ dla tych t dla których są określone średnie ruchome.
- Surowe wskaźniki wahań okresowych O_i'

  $$O_i' = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{t \in N_i} \frac{y_t}{\overline{y}_t},$$

  gdzie $i = 1, \ldots, d$ (d – liczba cykli).
- Jeżeli szereg obejmuje dużą liczbę cykli, to przy obliczaniu średnich można pominąć skrajne wartości (wskaźniki najmniejsze i największe) uznając je za nietypowe.

Przypadek wahań multiplikatywnych. II

- Oczyszczone wskaźniki wahań okresowych.

$$O_i = O'_i \frac{d}{\sum\limits_{i=1}^{d} O'_i}, \tag{10}$$

gdzie $i = 1, \ldots, d$.

Wtedy $\sum\limits_{i=1}^{d} O_i = d$.

Uwaga 10

Wartość wyrażenia $O_i - 1$ informuje o ile wartości zjawiska obserwowanego w i - tym podokresie cyklu są, na skutek wahań okresowych, wyższe lub niższe od poziomu zjawiska określanego przez trend.

Przypadek wahań addytywnych – stała amplituda wahań

1. Indywidualne różnice $y_t - \overline{y_t}$.
2. Średnich różnic dla jednoimiennych podokresów S_i'

$$S_i' = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{t \in N_i} y_t - \overline{y_t}.$$

3. Miara ta wyraża wielkość wahań okresowych w poszczególnych podokresach w jednostkach absolutnych. Aby suma odchyleń okresowych w obrębie cyklu miała wartość zero koryguje się je wzorem

$$S_i = S_i' - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} S_i'.$$

Eliminacja wahań okresowych – przypadek wahań multiplikatywnych

Procedura eliminacji wahań okresowych

$$\widetilde{y_t} = \frac{y_t}{O_i}, \tag{11}$$

gdzie $t \in N_i$.
Prognoza dla $t = T$ otrzymujemy według wzoru

$$y_t^P = \widehat{y_T} \times O_i, \tag{12}$$

gdzie $\widehat{y_T} \in N_i$ i jest wartością oszacowanej funkcji trendu dla $t = T$.

Eliminacja wahań okresowych – przypadek wahań addytywnych. I

Procedura eliminacji wahań okresowych

$$\widetilde{y_t} = y_t - S_i, \tag{13}$$

gdzie $t \in N_i$.
Prognoza dla $t = T$ otrzymujemy według wzoru

$$y_t^P = \widehat{y_T} + S_i, \tag{14}$$

gdzie $\widehat{y_T} \in N_i$ i jest wartością oszacowanej funkcji trendu dla $t = T$.
W obu przypadkach szereg czasowy o elementach $\widetilde{y_t}$ jest określony tylko przez trend zjawiska i odchylenia przypadkowe. Na podstawie tego szeregu metoda najmniejszych kwadratów można wyznaczyć funkcje trendu.
Aby wyodrębnić wahania sezonowe (cykliczne) w szeregu o n okresach dzielimy ten szereg na s cykli. Podział musi być taki, aby w każdym cyklu

Eliminacja wahań okresowych – przypadek wahań addytywnych. II

występowała stała liczba k faz. Działania mające na celu wyodrębnienie wahań sezonowych są następujące:

1. wygładzamy szereg czasowy $\{y_t\}$ analitycznie lub mechanicznie (np. średnia ruchoma k-okresowa),
2. na podstawie wyznaczonej funkcji trendu obliczamy wartości teoretyczne $\{\hat{y}_t\}$,
3. uwalniamy szereg czasowy od trendu. W tym celu wyliczamy wielkości $w_t = \frac{y_t}{\hat{y}_t}$. Wielkości te zawierają wahania przypadkowe i sezonowe.

Eliminacja wahań okresowych – przypadek wahań addytywnych. III

4. Pozbywamy się wahań przypadkowych w wielkościach w_t. W tym celu dla jednoimiennych okresów i (tj. okresów należących do tej samej fazy) wyliczamy ich średnia arytmetyczna

$$c_i' = \frac{\sum_{j=0}^{s-1} w_{i+j\cdot k}}{s} \quad i \in \overline{1,k}.$$

   Są to tzw. SUROWE WSKAŹNIKI SEZONOWOŚCI.

5. Suma takich wskaźników dla wszystkich faz powinna być równa k. Jeżeli tak nie jest, to należy surowe wskaźniki sezonowości podzielić przez odpowiedni współczynnik korygujący ($=$ [suma wskaźników surowych] / k). Otrzymamy w ten sposób CZYSTE WSKAŹNIKI SEZONOWOŚCI.