Statystyka matematyczna - wykład trzynasty[1]
Szeregi czasowe – część II.
Analiza dynamiki.
kierunek: matematyka I°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

Instytut Informatyki Uniwersytet w Białymstoku

Spis treści

Ogólne założenia i motywacja

Będziemy zakładali, że obserwujemy zjawisko w momentach czasu $t \in \overline{0, n}$. Ponadto będziemy rozważać szereg czasowy $\{y_t : t \in \overline{0, n}\}$.

Uwaga 1

Metody indeksowe są metodami dynamicznej analizy zjawiska na podstawie szeregu czasowego poprzez wyznaczanie różnych mierników zmian tego zjawiska w rozpatrywanych momentach czasu.

Najprostsze miary dynamiki zjawisk

I podział

1. o stałej podstawie – jednopodstawowe,
2. o zmiennej podstawie – łańcuchowe.

II podział

1. przyrosty (nazywane też tempami wzrostu),
    - absolutne,
    - wyględne,
2. indeksy indywidualne.

Absolutne przyrosty wartości I

Definicja 1

Niech $s \in \overline{1, n}$.
Absolutnym przyrostem wartości szeregu czasowego $\{y_t : t \in \overline{0, n}\}$ *w okresie* $(s-1, s)$ *nazywamy liczbę równą*

$$\Delta_s := y_s - y_{s-1}.$$

Absolutne przyrosty wartości II

Uwaga 2

Można zdefiniować również absolutny przyrost wartości szeregu czasowego w momencie s w stosunku do momentu $s^\star$, gdzie $s^\star \in \overline{0,n}$. Przyrost ten definujemy następująco:

$$\Delta_{s,s^\star} := y_s - y_{s^\star}.$$

Oczywiście wtedy

$$\Delta_{s,s-1} = \Delta_s.$$

Względne przyrosty wartości I

Definicja 2

Niech $s \in \overline{1, n}$ *i* $s^\star \in \overline{0, n}$
Względnym przyrostem wartości szeregu czasowego $\{y_t : t \in \overline{0, n}\}$ *w okresie* $(s-1, s)$ *w stosunku do okresu* $s^\star$ *nazywamy liczbę równą*

$$\delta_{s,s^\star} := \frac{\Delta_s}{y_{s^\star}},$$

gdzie $y_{s^\star}$ *oznacza poziom badanego zjawiska w pewnym wybranym momencie czasu* $s^\star$*.*

Względne przyrosty wartości II

Uwaga 3

Można zdefiniować również względny przyrost wartości szeregu czasowego w momencie s w stosunku do momentu $s^\star$, gdy przyrost absolutny mierzony jest w stosunku do momentu $t^\star$

$$\delta_{s,s^\star,t^\star} := \frac{\Delta_{s,t^\star}}{y_{s^\star}}.$$

Przyjmując $\delta_s = \delta_{s,s-1}$ mamy

$$\delta_{s,s^\star} = \delta_{s,s^\star,s-1} \quad \delta_s = \delta_{s,s-1,s-1}$$

Przyrosty łańcuchowe i przyrosty jednopodstawowe

Definicja 3

Jeśli w każdym momencie s jako moment odniesienia mamy $s^\star = s - 1$, tzn. podstawą porównania jest wartość zjawiska y_{s-1}, w momencie poprzednim, to takie względne przyrosty nazywamy łańcuchowymi. Jeśli natomiast podstawa porównania jest stała, tzn. $s^\star = const$, dla wszystkich wartości δ_s, to takie względne przyrosty nazywamy jednopodstawowymi.

Uwagi

1. Przyrosty absolutne (bezwzględne) informują o ile jednostek wzrósł lub zmalał poziom badanego zjawiska w badanym okresie w stosunku do okresu przyjętego za podstawę (jednopodstawowe) lub w stosunku do okresu poprzedniego (łańcuchowe).
2. Przyrosty względne (najczęściej wyrażane w procentach) informują o ile procent poziom badanego zjawiska był niższy lub wyższy w okresie badanym w stosunku do okresu przyjętego za podstawę (jednopodstawowe) lub w stosunku do okresu poprzedniego (łańcuchowe). Przyrosty względne często nazywane są tempami wzrostu.

Indeksy (wskaźniki) dynamiki

Uwaga 4

Obszerną klasę mierników dynamiki zjawisk stanowią indeksy (wskaźniki) dynamiki wartości y_t.

Definicja 4

Niech $t, t^\star \in \overline{0, n}$.
Indeksem dynamiki wartości y_t *nazywamy liczbę równą*

$$i_{t/t^\star} := \frac{y_t}{y_{t^\star}},$$

gdzie, jak poprzednio, $y_{t^\star}$ *oznacza poziom badanego zjawiska w ustalonym momencie* $t^\star$ *stanowiący podstawę porównania dla wartości zjawiska* y_t *w kolejnych momentach czasu* $t \in \overline{0, n}$.

Indeksy dynamiki łańcuchowe i jednopodstawowe

Uwaga 5

I tu również można mówić o indeksach dynamiki łańcuchowych i jednopodstawowych.

Definicja 5

Jeśli $t \in \overline{1, n}$ *i podstawą w wskaźniku dynamiki jest zawsze moment poprzedni, tzn.* $y_{t^\star} = y_{t-1}$ *dla każdego* y_t*, to indeksy dynamiki* $i_{t/t-1}$ *są nazywane łańcuchowymi.*
Jeśli natomiast podstawa porównania jest stała dla wszystkich wartości y_t*, tzn.* $t^\star = const$*, to takie indeksy dynamiki są nazywane jednopodstawowymi.*

Indeksy indywidualne

Definicja 6

Indeksami indywidualnymi nazywamy takie indeksy dynamiki, które dotyczą porównywania jednorodnych zmieniających się w czasie wartości liczbowych.

Uwaga 6

Indeksy indywidualne (i) *są wielkościami niemianowanymi i mogą być wyrażone w ułamku lub w procentach. Jeżeli* $i > 1$*, to oznacza to wzrost poziomu badanego zjawiska w okresie badanym w stosunku do okresu przyjętego za podstawę (jednopodstawowe) lub w stosunku do okresu poprzedniego (łańcuchowe) o* $(i-1)\cdot 100\%$*; jeżeli* $i < 1$*, to oznacza to spadek poziomu badanego zjawiska w stosunku do okresu bazowego o* $(i-1)\cdot 100\%$*; jeżeli* $i = 1$*, to poziom zjawiska w okresie badanym i bazowym jest taki sam.*

Uwagi

1. Między przyrostami względnymi a indeksami indywidualnymi występuje ścisły związek.
2. Mając przyrosty względne, można wyznaczyć indeksy indywidualne przez dodanie 100 (lub jedności, gdy indeksy wyrażone są jako wielkości ułamkowe).
3. Odwrotnie, można zamienić indeksy indywidualne na przyrosty względne poprzez odjęcie od indeksu indywidualnego 100 (lub jedności).
4. Indeksy indywidualne mają zastosowanie w przypadku, gdy badane zjawisko jest jednorodne.
5. Indeksy jednopodstawowe i łańcuchowe umożliwiają ocenę dynamiki zjawiska między dwoma wyróżnionymi okresami (badanym i bazowym).

Syntetyczne wielkości charakteryzujące szereg czasowy

Uwaga 7

- *W celu określenia prawidłowości w kształtowaniu się poziomu badanego zjawiska w czasie można wyznaczać, oprócz zdefiniowanych już wskaźników, syntetyczne wielkości charakteryzujące szereg czasowy.*
- *Zajmiemy się tylko pewnymi parametrami charakteryzującymi szereg czasowy.*
- *Jeśli bada się zjawisko w długim okresie, wtedy interesującym parametrem jest przeciętny poziom zjawiska.*
- *Przeciętny poziom może być określany dwojako, w zależności od charakteru zjawiska.*

Przeciętny poziom zjawiska – nieważona średnia arytmetyczna

Definicja 7

Jeśli szereg czasowy jest tzw. szeregiem okresów, tzn. wartości badanego zjawiska mają charakter strumieni i w związku z tym są sumowalne, miarą przeciętnego poziomu zjawiska jest nieważona średnia arytmetyczna

$$\overline{y} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n} y_t}{n+1}.$$

Przeciętny poziom zjawiska – średnią chronologiczną

Definicja 8

Jeśli zaś szereg czasowy zawiera wartości zasobów w ustalonych momentach czasu (tzw. szereg momentów) i w związku z tym ich łączna suma jest pozbawiona interpretacji, oblicza się średnią chronologiczną

$$\overline{y}_c = \frac{\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + \sum\limits_{j=1}^{n-1} y_t}{n}.$$

Uwaga 8

Średnia chronologiczna jest średnią arytmetyczną ze średnich obliczonych dla par wartości zmiennej y_t w kolejnych sąsiednich momentach. Wyraża ona przeciętny stan zasobu w poszczególnych jednostkach czasu.

Średnią geometryczną indeksów łańcuchowych

Do oceny zmian badanego zjawiska w całym okresie (średniego tempa zmian zjawiska w czasie) wykorzystuje się średnią geometryczną indeksów łańcuchowych o postaci:

$$i_g = \sqrt[n]{\frac{y_1}{y_0} \cdot \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} \cdot \ldots \cdot \frac{y_n}{y_{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_0}}$$

Interpretacja średniej geometrycznej jest analogiczna jak indeksów indywidualnych.

Średniookresowe tempo zmian. I

Średnie tempo oznacza równomiernie rozłożony w czasie tak rozumiany przyrost wartości zmiennej, a zatem może być wyznaczone jako różnica między średnim indeksem łańcuchowym a jednością.
Stąd średniookresowe tempo zmian poziomu zjawiska y_t w okresie od momentu 0 do momentu n wynosi

$$r(0,n) = \overline{i_g} - 1,$$

gdzie $\overline{i_g}$ jest średnią geometryczną indeksów łańcuchowych $i_{t/t-1}$ dla $t \in \overline{1,n}$.

Uwaga 9

Zauważmy, że

$$\overline{i_g} = \sqrt[n]{\prod_{t=1}^{n} i_{t/t-1}} = \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_0}}.$$

Tabela miar dynamiki

Miary dynamiki	Jednopodstawowe	Łańcuchowe
Przyrosty absolutne	$y_2 - y_1, \ldots, y_n - y_1$	$y_2 - y_1, \ldots, y_n - y_{n-1}$
Przyrosty względne	$\frac{y_2-y_1}{y_1}, \ldots, \frac{y_n-y_1}{y_1}$	$\frac{y_2-y_1}{y_1}, \ldots, \frac{y_n-y_{n-1}}{y_{n-1}}$
Indeksy indywidualne	$\frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1}$	$\frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_{n-1}}$

Indywidualne indeksy dynamiki cen, ilości i wartości

W statystyce rozpatruje się trzy rodzaje indeksów indywidualnych dynamiki

1. indywidualny indeks dynamiki cen – i_p,
2. indywidualny indeks dynamiki ilości – i_q,
3. indywidualny indeks wartości wartości – i_w.

Są one równe odpowiednio

$$i_p = \frac{p_1}{p_0}, \quad i_q = \frac{q_1}{q_0}, \quad i_w = \frac{q_1 \cdot p_1}{q_0 \cdot p_0},$$

gdzie $p_1, q_1, q_1 \cdot p_1$ oznaczają odpowiednio cenę, ilość i wartość produktu w okresie badanym $(t = 1)$, $p_0, q_0, q_0 \cdot p_0$ - cenę, ilość i wartość produktu w okresie podstawowym $(t = 0)$.

Testy poprawności dla indywidualnych indeksy cen, ilości i wartości

Uwaga 10

Indeksy indywidualne wartości, ilości i cen podlegają pewnym formalnym warunkom poprawności, które są nazywane testami.

Najważniejszymi są:

1. test odwracalności w czasie – jeśli dla dwóch momentów czasu $t = 0$ i $t = 1$ wyznacza się indeksy indywidualne, w których podstawą porównań jest raz $t = 0$, drugi raz natomiast $t = 1$, to iloczyn takich indeksów równy jest jedności,
2. test odwracalności czynników – zgodnie z nim indeks wartości równy jest iloczynowi indeksów ilości i cen,
3. test okrężny – wymaga, aby iloczyn łańcuchowych indeksów indywidualnych był równy indeksom o stałej podstawie.

Uwaga

W celu wyznaczenia dynamiki całego zespołu zjawisk bezpośrednio niesumowalnych (np. produkcji niejednorodnych produktów, spożycia różnych dóbr, cen różnych artykułów) stosuje się indeksy agregatowe (zespołowe). Ze względu na rodzaj badanych zjawisk wyróżnia się

1. indeksy agregatowe wielkości absolutnych,
2. indeksy agregatowe wielkości stosunkowych.

Agregatowy indeks wartości

Do określenia łącznej dynamiki wszystkich k produktów w dwóch porównywalnych okresach (badanym $t = 1$ i podstawowym $t = 0$) wyznaczamy agregatowy indeks wartości

$$I_w = \frac{\sum_{j=1}^{k} q_{1j} \cdot p_{1j}}{\sum_{j=1}^{k} q_{0j} \cdot p_{0j}}$$

Indeks ten informuje o łącznych zmianach wartości wszystkich produktów w okresie badanym w stosunku do okresu podstawowego, wynikających zarówno ze zmian ilości, jak i cen.

Agregatowy indeks ilości i cen według formuły Laspeyresa

Aby ocenić wpływ każdego z tych czynników (ilości oraz cen) oddzielnie oblicza się agregatowe indeksy ilości (I_q) i cen (I_p).
Przy konstrukcji tych indeksów stosujemy standaryzację polegającą na ustaleniu stałego poziomu jednego z dwóch czynników (cen lub ilości).
Przyjęcie stałego poziomu cen lub ilości z okresu podstawowego oznacza standaryzację według formuły Laspeyresa (I_q^L, I_p^L)

$$I_q^L := \frac{\sum_{j=1}^{k} q_{1j} \cdot p_{0j}}{\sum_{j=1}^{k} q_{0j} \cdot p_{0j}}, \quad I_p^L := \frac{\sum_{j=1}^{k} q_{0j} \cdot p_{1j}}{\sum_{j=1}^{k} q_{0j} \cdot p_{0j}}.$$

Agregatowy indeks ilości i cen według formuły Paaschego

Natomiast przyjęcie stałego poziomu cen lub ilości z okresu badanego - standaryzacją według formuły Paaschego (I_q^P, I_p^P)

$$I_q^P := \frac{\sum_{j=1}^{k} q_{1j} \cdot p_{1j}}{\sum_{j=1}^{k} q_{0j} \cdot p_{1j}}, \quad I_p^P := \frac{\sum_{j=1}^{k} q_{1j} \cdot p_{1j}}{\sum_{j=1}^{k} q_{1j} \cdot p_{0j}}.$$

Uwagi I

1. Jak łatwo można sprawdzić, ani agregatowy indeks cen, ani agregatowy indeks ilości nie spełniają warunków testów, o których mówiliśmy przy analizowaniu indeksów indywidualnych.
2. W poszukiwaniu indeksu *idealnego*, który spełnia warunki testu odwracalności w czasie i odwracalności czynników, I. Fisher zaproponował formułę indeksu, który jest średnią geometryczną z indeksów wyznaczonych według formuły Laspeyresa i Paaschego.
3. Indeksy te spełniają warunki testów, o których mowa wyżej, jednakże wiążą się z nimi pewne trudności interpretacyjne.
   - Z jednej strony, jeśli rozbieżności między indeksami Laspeyresa i Paaschego są znaczne, to indeks Fishera, jako średnia, ma niewielką wartość informacyjną.
   - Z drugiej strony, jeśli przyjąć, że indeksy Laspeyresa i Paaschego określają granice przedziału, w którym zawarta jest *prawdziwa* wartość indeksu, to indeks Fishera można uważać za dobre przybliżenie indeksu poprawnie mierzącego zmiany rozmiarów fizycznych lub cen.

Agregatowy indeks ilości i cen według formuły Fishera

Jeżeli okresy badany i podstawowy nie są zbyt odległe można wyznaczyć agregatowe indeksy cen i ilości według formuły Fishera (I_q^F, I_p^F), jako średnie geometryczne indeksów odpowiednio cen i ilości według formuł standaryzacyjnych Laspeyresa i Paaschego.

$$I_q^F := \sqrt{I_q^L \cdot I_q^P}, \quad I_p^F := \sqrt{I_p^L \cdot I_p^P}.$$

Uwaga

Ponieważ

$$q_{1j} = i_{qj} \cdot q_{0j} \quad \text{i} \quad p_{1j} = i_{pj} \cdot p_{0j},$$

więc formuły na agregatowe indeksy ilości i cen można zapisać następująco

$$I_q^L = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} i_{qj} q_{0j} \cdot p_{0j}}{\sum\limits_{j=1}^{k} q_{0j} \cdot p_{0j}}, \quad I_p^L = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} i_{pj} q_{0j} \cdot p_{0j}}{\sum\limits_{j=1}^{k} q_{0j} \cdot p_{0j}}$$

$$I_q^P = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} q_{1j} \cdot p_{1j}}{\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{q_{1j} \cdot p_{1j}}{i_{qj}}}, \quad I_p^P = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} q_{1j} \cdot p_{1j}}{\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{q_{1j} \cdot p_{1j}}{i_{pj}}}.$$

Interpretacja agregatowego indeksu ilości

Agregatowe indeksy ilości można interpretować na dwa sposoby

I. I_q informuje, jak zmieniłaby się łączna wartość całego agregatu produktów w okresie badanym w stosunku do okresu podstawowego, gdyby ceny w obu porównywanych okresach były takie, jak w okresie podstawowym (formuła Laspeyresa) lub badanym (formuła Paaschego).

II. I_q jest średnią arytmetyczną (w przypadku I_q^L) lub średnią harmoniczną (w przypadku I_q^P) indywidualnych indeksów i_{qj} (z wagami równymi odpowiednio $q_{0j} \cdot p_{0j}$ i $q_{1j} \cdot p_{1j}$), a więc informuje o przeciętnych zmianach ilości wszystkich produktów w obu porównywalnych okresach.

Interpretacja agregatowego indeksu cen

Agregatowe indeksy cen również można interpretować na dwa sposoby.

I. I_p informuje, jak zmieniłaby się łączna wartość całego agregatu produktów w okresie badanym w stosunku do okresu podstawowego, gdyby ilości w obu porównywanych okresach były takie, jak w okresie podstawowym (formuła Laspeyresa) lub badanym (formuła Paaschego).

II. I_p jest średnią arytmetyczną (w przypadku I_p^L) lub średnią harmoniczną (w przypadku I_p^P) indywidualnych indeksów cen i_{pj} (z wagami równymi odpowiednio $q_{0j} \cdot p_{0j}$ i $q_{1j} \cdot p_{1j}$)), a więc informuje o przeciętnych zmianach cen wszystkich rozpatrywanych produktów w obu porównywalnych okresach.

Uwaga

Dla agregatowych indeksów wartości, ilości i cen zachodzi tzw. równość indeksowa:

$$I_w = I_p^L \cdot I_q^P = I_p^P \cdot I_q^L = I_p^F \cdot I_q^F .$$

Równość ta jest wykorzystywana w praktycznych obliczeniach, bowiem na podstawie informacji o dwóch indeksach można wyznaczyć trzeci indeks.

Pojęcie wielkości stosunkowych

Wielkości stosunkowe są wskaźnikami natężenia wyrażonymi jako iloraz dwóch zjawisk logicznie ze sobą powiązanych.
Wielkości stosunkowe można rozpatrywać w układzie cząstkowym (jednostkowym, indywidualnym), czyli w odniesieniu do badanej jednostki oraz w układzie zespołowym (agregatowym, ogólnym), czyli dla logicznie jednorodnego zbioru k jednostek indywidualnych.
Wielkości stosunkowe jednostkowe (cząstkowe) i agregatowe (zespołowe) są równe odpowiednio

$$x_{jt} = \frac{y_{jt}}{z_{jt}}, \quad \overline{X}_t = \frac{\sum_{j=1}^{k} y_{jt}}{\sum_{j=1}^{k} z_{jt}},$$

dla $j \in \overline{1, k}$, gdzie k oznacza liczbę jednostek tworzących agregat (zespół). Dla $t = 0$ wielkość stosunkowa odnosi się do okresu podstawowego, a dla $t = 1$ - do okresu badanego.

Inne postacie jednostkowej i agregatowej wielkości stosunkowych

Jednostkowe wielkości stosunkowej i agregatowe wielkości stosunkowej można zapisać w jednej z równoważnych postaci

$$y_{jt} = x_{jt} \cdot z_{jt}, \quad z_{jt} = \frac{y_{jt}}{x_{jt}}, \quad \overline{X}_t = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} x_{jt} \cdot z_{jt}}{\sum\limits_{j=1}^{k} z_{jt}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} y_{jt}}{\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{y_{jt}}{x_{jt}}}.$$

Agregatowy indeks wszechstronny

Dla określenia dynamiki wielkości stosunkowej w całym zbiorze jednostek (agregacie, zespole) w okresie badanym w stosunku do okresu podstawowego wyznacza się agregatowy (zespołowy) indeks wszechstronny

$$I_X = \frac{\overline{X}_1}{\overline{X}_0} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} y_{j1}}{\sum\limits_{j=1}^{k} z_{j1}} : \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} y_{j0}}{\sum\limits_{j=1}^{k} z_{j0}}$$

gdzie $\overline{X}_1, \overline{X}_0$ oznaczają ogólną (zespołową) średnią wartość wielkości stosunkowej X łącznie w całym zespole jednostek odpowiednio w okresie badanym i podstawowym.

Uwaga

1. Indeks wszechstronny określa zmiany w ogólnym, średnim poziomie zmiennej X w okresie badanym w stosunku do okresu podstawowego, które są spowodowane jednoczesnymi zmianami cząstkowych poziomów y_j czynnika y oraz cząstkowych poziomów z_j czynnika z, a w efekcie również cząstkowych poziomów x_j zmiennej x.
2. Aby ocenić wpływ poszczególnych czynników i ich struktury na dynamikę ogólnej wartości zmiennej X wyznacza się agregatowe indeksy wpływu zmian strukturalnych i agregatowe indeksy o stałej strukturze.

Agregatowy indeks wpływu zmian strukturalnych czynnika z

Indeks $I_{z,x}$ wpływu zmian strukturalnych czynnika z, jakie byłyby zmiany globalnej wartości średniej zmiennej x w okresie badanym w stosunku do okresu podstawowego, gdyby cząstkowe poziomy x_j zmiennej x były w obu porównywalnych okresach identyczne, a zmiany ogólnej średniej byłyby spowodowane wyłącznie zmianami struktury czynnika z (a w konsekwencji również czynnika y).

$$I_{z,x} := \frac{\sum_{j=1}^{k} x_{jt} \cdot z_{j1}}{\sum_{j=1}^{k} z_{j1}} : \frac{\sum_{j=1}^{k} x_{jt} z_{j0}}{\sum_{j=1}^{k} z_{j0}}.$$

Uwaga

1. Cząstkowe poziomy x_{jt} są stałe.
2. Jeżeli $t = 0$, to jest agregatowy indeksy wpływu zmian strukturalnych czynnika z według formuły Laspeyresa $({}_L I_{z,x})$.
3. Jeżeli $t = 1$, to jest agregatowy indeksy wpływu zmian strukturalnych czynnika z według formuły Paaschego $({}_P I_{z,x})$.

Agregatowy indeks wpływu zmian strukturalnych czynnika y

Indeks $I_{y,x}$ wpływu zmian strukturalnych czynnika y, jakie byłyby zmiany globalnej wartości średniej zmiennej x w okresie badanym w stosunku do okresu podstawowego, gdyby cząstkowe poziomy x_j zmiennej x były w obu porównywalnych okresach identyczne, a zmiany ogólnej średniej byłyby spowodowane wyłącznie zmianami struktury czynnika y (a w konsekwencji również czynnika x).

$$I_{y,x} := \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} y_{j1}}{\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{y_{j1}}{x_{jt}}} : \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} y_{j0}}{\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{y_{j0}}{x_{jt}}}.$$

Uwaga

1. Cząstkowe poziomy x_{jt} są stałe.
2. Jeżeli $t = 0$, to jest agregatowy indeksy wpływu zmian strukturalnych czynnika y według formuły Laspeyresa $({}_L I_{y,x})$.
3. Jeżeli $t = 1$, to jest agregatowy indeksy wpływu zmian strukturalnych czynnika y według formuły Paaschego $({}_P I_{y,x})$.

Agregatowy indeks o stałej strukturze czynnika z

Indeks $I_{x,z}$ o stałej strukturze czynnika z określa, jakie byłyby zmiany ogólnej średniej wartości zmiennej x w okresie badanym w stosunku do okresu podstawowego, gdyby struktura czynnika z była stała w obu porównywalnych okresach, a zmiany ogólnej średniej były spowodowane jedynie zmianami cząstkowych wartości x_j (struktury) zmiennej x (a w konsekwencji również czynnika y).

$$I_{x,z} := \frac{\sum_{j=1}^{k} x_{j1} z_{jt}}{\sum_{j=1}^{k} z_{jt}} : \frac{\sum_{j=1}^{k} x_{j0} z_{jt}}{\sum_{j=1}^{k} z_{jt}} \equiv \frac{\sum_{j=1}^{k} x_{j1} z_{jt}}{\sum_{j=1}^{k} x_{j0} z_{jt}}.$$

Uwaga

1. Cząstkowe poziomy z_{jt} są stałe.
2. Jeżeli $t = 0$, to jest agregatowy indeksy o stałej strukturze czynnika z według formuły Laspeyresa $({}_{L}I_{x,z})$.
3. Jeżeli $t = 1$, to jest agregatowy indeksy o stałej strukturze czynnika z według formuły Paaschego $({}_{P}I_{x,z})$.

Agregatowy indeks o stałej strukturze czynnika y

Indeks $I_{x,y}$ o stałej strukturze czynnika y określa, jakie byłyby zmiany ogólnej średniej wartości zmiennej x w okresie badanym w stosunku do okresu podstawowego, gdyby struktura czynnika y była stała w obu porównywalnych okresach, a zmiany ogólnej średniej były spowodowane jedynie zmianami cząstkowych wartości x_j (struktury) zmiennej x (a w konsekwencji również czynnika y).

$$I_{x,y} := \frac{\sum_{j=1}^{k} y_{jt}}{\sum_{j=1}^{k} \frac{y_{jt}}{x_{j1}}} : \frac{\sum_{j=1}^{k} y_{jt}}{\sum_{j=1}^{k} \frac{y_{jt}}{x_{j0}}} \equiv \frac{\sum_{j=1}^{k} \frac{y_{jt}}{x_{j0}}}{\sum_{j=1}^{k} \frac{y_{jt}}{x_{j1}}}.$$

Uwaga

1. Cząstkowe poziomy y_{jt} są stałe.
2. Jeżeli $t = 0$, to jest agregatowy indeksy o stałej strukturze czynnika y według formuły Laspeyresa $({}_L I_{x,y})$.
3. Jeżeli $t = 1$, to jest agregatowy indeksy o stałej strukturze czynnika y według formuły Paaschego $({}_P I_{x,y})$.

Równość indeksowa

Dla agregatowych indeksów wielkości stosunkowych (podobnie jak dla indeksów wielkości absolutnych) zachodzi równość indeksowa

$$I_x = {}_L I_{z,x} \cdot {}_P I_{x,z} = {}_P I_{z,x} \cdot {}_L I_{x,z} = {}_L I_{y,x} \cdot {}_P I_{x,y} = {}_P I_{y,x} \cdot {}_L I_{x,y}.$$