Ćwiczenia czwarte*
Probabilistyka – lista 2
kierunek: matematyka, studia II°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

23 października 2015r.

1 Niezależność, kowariancja, korelacja itp.

Zadanie 1.
Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość prawdopodobieństwa zadaną wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} C(x+y)\exp^{-(x+y)} & \textit{dla } x > 0 \wedge y > 0 \\ 0 & \textit{w przeciwnym wypadku} \end{cases}.$$

- *Oblicz współczynnik C.*
- *Oblicz rozkłady brzegowe, dystrybuantę i współczynnik kowariancji.*

Zadanie 2. *Niech u jest funkcją nieparzystą na $\mathbb{R}$ równą 0 poza odcinkiem $(-1,1)$ oraz*

$$| u(r) | < \frac{1}{\sqrt{2\pi\ e}}.$$

- *Sprawdzić, że funkcja*

  $$f(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2)\} + u(r_1)u(r_2),$$

  jest gęstością pewnego układu (X_1, X_2).
- *Czy zmienne (X_1, X_2) są niezależne?*

Zadanie 3. *X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładach jednostajnych na odcinkach $]-1,1[$ i $]1,3[$ odpowiednio, $\Psi = (X, Y)$. Znajdź dystrybuantę rozkładu zmiennej losowej Ψ.*

Zadanie 4. *Niech K będzie kwadratem o boku długości 1 położonym na płaszczyźnie. Jakie warunki musi spełniać K aby rozkład prawdopodobieństwa o gęstości danej wzorem*

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \textit{gdy } (x,y) \notin K \\ 1 & \textit{gdy } (x,y) \in K \end{cases}$$

był produktem swoich rozkładów brzegowych?

Zadanie 5. *Niech $f(x,y,z) := g(x,y,z) + h(x,y,z)$, gdzie*

$$g(x,y,z) = \begin{cases} \exp(-\frac{x^2+y^2}{2} - 2\pi z) & \textit{dla } z > 0 \\ 0 & \textit{dla } z < 0 \end{cases}, \qquad h(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy(z-1)}{1000} & \textit{dla } x, y \in]-1,1[\wedge z \in]0,2[, \\ 0 & \textit{dla pozostałych x,y,z.} \end{cases}$$

- Sprawdź, że f jest gęstością rozkładu pewnej trójwymiarowej zmiennej losowej (X,Y,Z).
- Znajdź wszystkie możliwe gęstości brzegowe.
- Zbadaj, czy zmienne losowe $X,Y; X,Z; Y,Z; X,Y,Z$ są niezależne?

Zadanie 6. *Wykaż, że dla przypadków, gdy*

- $W_{X_i} = \{0,1\}$, $i=1,2$, $P(\{X_i=0\})=p$, $0<p<1$,
- $W_{X_i} = \{-1,1\}, i=1,2, P(\{X_i=1\})=p, 0<p<1$.

warunkiem koniecznym i wystarczającym niezależności zmiennych losowych X_1, X_2 *jest by* $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$.

Zadanie 7. *Niech* $X, Y (Y \neq 0)$ *będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Wykaż, że zmienne losowe* X *oraz* Y^{-1} *są również niezależne.*

Zadanie 8. *Niech* X,Y *będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że* $P(\{X>0\})=1$. *Wykaż, że zdarzenia* $\{Y>2\}$ *i* $\{-1<X<1\}$ *są niezależne.*

Zadanie 9. *Niech* X,Y *będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że* $P(\{Y>0\})=1$. *Wykaż, że zmienne losowe* X, Y^2 *są niezależne.*

Zadanie 10. *Niech* (X,Y) *ma rozkład jednostajny na trójkącie* $\{(x,y): x,y>0, x+y<1\}$. *Czy zmienne losowe* X,Y *są niezależne?*

Zadanie 11. *Zbadaj, czy zmienne losowe* X,Y *są niezależne, jeśli dwuwymiarowa zmienna losowa* (X,Y) *ma rozkład o gęstości*

- $f(x,y) = \frac{1}{\pi} \cdot I_{\{(x,y): x^2+y^2<1\}}$,
- $f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$,
- $f(x,y) = \frac{1}{4\pi} \cdot I_{\{(x,y): x^2+y^2<4\}}$.

Zadanie 12. *Dana jest zmienna losowa* X *o rozkładzie jednostajnym na odcinku* $[0,1]$. *Określamy zmienne* Y_1 *i* Y_2 *następująco* $Y_1 := \sin 2\pi X$, $Y_2 := \cos 2\pi X$. *Oblicz współczynnik korelacji* $\rho(Y_1,Y_2)$. *Czy* Y_1, Y_2 *są niezależne?*

Zadanie 13. *Niech* ω *oznacza wynik rzutu symetryczną kostką do gry,* $X(\omega) = [\frac{\omega}{\sqrt{6}}], Y(\omega) = [\frac{\omega}{\pi}]$ *([a] oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej a). Czy* X,Y *są niezależne?*

Zadanie 14. *Niech* A,B *będą zdarzeniami niezależnymi.* $X=I_A, Y=I_B$. *Czy* X,Y *są zmiennymi losowymi niezależnymi? (*I_C *oznacza funkcję charakterystyczną zbioru* C*)*

Zadanie 15. X,Y *niezależne zmienne losowe. Oblicz* $E((X+Y)^2)$ *wiedząc, że*

- $E(X) = \frac{1}{3}, E(Y) = \frac{2}{3}, D^2(X) = \frac{1}{2}, D^2(Y) = \frac{1}{2}$,
- $E(X) = \pi, E(Y) = -\pi, D^2(X) = 1, D^2(Y) = 1$.

Zadanie 16. X,Y *niezależne zmienne losowe. Oblicz* $E((X-Y)^2)$ *wiedząc, że*

- $E(X) = 2, E(Y) = 2, D^2(X) = \frac{3}{2}, D^2(Y) = \frac{1}{2}$,
- $E(X) = 2, E(Y) = 1, D^2(X) = \frac{1}{2}, D^2(Y) = \frac{1}{2}$.

Zadanie 17. *Niech* (ω_1,ω_2) *będzie wynikiem dwukrotnego rzutu kostką. Czy zmienne losowe*

$$X(\omega_1,\omega_2) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } 2 | \omega_1 - \omega_2 \\ 0 & \text{gdy } 2 \not| \omega_1 - \omega_2 \end{cases} \qquad Y(\omega_1,\omega_2) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } 3 | \omega_1 - \omega_2 \\ 0 & \text{gdy } 3 \not| \omega_1 - \omega_2 \end{cases}$$

są niezależne?

Zadanie 18. *Wykaż, że jeśli* X,Y *są niezależnymi i całkowalnymi z kwadratem zmiennymi losowymi, to zachodzi równość*

- $D^2(XY) = (D^2(X))(D^2(Y)) + (E(Y))^2 D^2(X) + (E(X))^2 D^2(Y)$,
- $D^2(XY) \geqslant D^2(X)D^2(Y)$.