Ćwiczenia siódme*
Probabilistyka – lista 5
kierunek: matematyka, studia II°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

13 listopada 2015r.

Zadanie 1 (Egzamin Aktuarialny). *Załóżmy, że X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną λ równą 10.*

1. *Wyznacz rozkład warunkowy zmiennej X_3 pod warunkiem $X_1 + X_2 + X_3 = 9$,*
2. *Oblicz $D^2(X_3 + X_4 | X_1 + X_2 + X_3 = 9)$.*

Zadanie 2 (Egzamin Aktuarialny). *Niech będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości $f(x, y) = 2x^2 + \frac{4}{3}xy\mathbb{I}_{\{0<x<1\}}\mathbb{I}_{\{0<y<1\}}$. Niech $S = X + Y$ i $V = Y - X$.*

1. *Wyznacz gęstość układu (V, S).*
2. *Wyznacz gęstość warunkową $f_{V|S}$.*
3. *Oblicz $E(V|S = 1)$.*

Zadanie 3 (Egzamin Aktuarialny). *Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1, a zmienna losowa Y rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 2. Obie zmienne są niezależne.*

1. *Wyznacz gęstość układu $(Y, X + Y)$.*
2. *Wyznacz gęstość warunkową $f_{Y|X+Y}$.*
3. *Oblicz $E(Y|X + Y = 3)$.*

Zadanie 4 (Egzamin Aktuarialny). *Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości $f(x, y) = \frac{2}{x^3}\mathbb{I}_{\{x>1\}}\mathbb{I}_{\{1<y<2\}}$. Niech $S = X + Y$ i $V = X - Y$.*

1. *Wyznacz gęstość układu (V, S).*
2. *Wyznacz gęstość warunkową $f_{V|S}$.*
3. *Oblicz $P(\{V < 1\}|\{S = 4\})$.*

Zadanie 5 (Egzamin Aktuarialny). *Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładów o gęstościach $f_X(x) = 32x^2e^{-4x}\mathbb{I}_{\{x>0\}}$, $f_Y(x) = 16xe^{-4x}\mathbb{I}_{\{x>0\}}$*

1. *Wyznacz rozkłady zmiennych $X - Y$ i $X + Y$.*
2. *Wyznacz rozkład warunkowy X pod warunkiem $X + Y$.*
3. *Wyznacz rozkład warunkowy Y pod warunkiem $X + Y$.*
4. *Oblicz $E(X - Y|X + Y = s)$.*

Zadanie 6 (Egzamin Aktuarialny)**.** *Niech U i V będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0,1)$. Niech*

$$X = \frac{U^{\frac{1}{2}}}{U^{\frac{1}{2}} + V^4} \quad i \quad Y = U^{\frac{1}{2}} + V^4.$$

1. *Wyznacz gęstość układu (X,Y).*
2. *Wyznacz rozkład (X,Y).*
3. *Oblicz $E(X|Y<1)$.*

Zadanie 7 (Egzamin Aktuarialny)**.** *Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład prawdopodobieństwa o funkcji gęstości $f(x,y) = 8xy\mathbb{I}_{\{0<y<x<1\}}$. Niech $U = X+Y$ i $V = X-Y$.*

1. *Wyznacz gęstość warunkową $f_{V|U}$.*
2. *Oblicz $E(V|U=\frac{4}{3})$.*

Zadanie 8. *Rozpatrzmy wektor losowy (X,Y) o rozkładzie jednostajnym na trójkącie $\{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$.*

1. *Oblicz $P(\{X \leqslant 1\}|\{Y = 12\})$.*
2. *Oblicz $E(X|Y=\frac{1}{2})$ oraz $E(X|Y=y)$.*

Zadanie 9. *Niech (X,Y) ma gęstość*

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & \text{dla } x,y>0, x^2+y^2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

1. *Oblicz gęstości warunkowe.*
2. *Oblicz $E(Y|X=x)$.*

Zadanie 10. *Wyznacz rozkład warunkowy $X|[X]$ oraz $[X]|X$, gdzie X ma rozkład Exp(1), a $[x]$ to cecha z x.*

Zadanie 11. *Wyznacz rozkład warunkowy $X|X+Y$, jeśli X,Y są niezależnymi zmiennymi losowymi*

1. *o rozkładzie $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$,*
2. *o rozkładach kolejno $Poiss(\lambda)$, $Poiss(\mu)$.*

Zadanie 12. *W urnie znajduje sie 21 kul ponumerowanych od 1 do 21. Losujemy jedna kule. Zmienna X przyjmuje wartość 1, gdy wyciągniemy kule z numerem parzystym oraz 0 w przeciwnym przypadku. Zmienna Y przyjmuje 1, gdy wyciągniemy kule z numerem podzielnym przez 3 oraz 0 w przeciwnym przypadku.*

1. *Wyznacz rozkład łączny wektora $((X+Y)^2, Y)$.*
2. *Wyznacz rozkład warunkowy $(X+Y)^2|Y$.*
3. *Porównaj wyznaczony rozkład warunkowy z rozkładem brzegowym $(X+Y)^2$ z punktu 1.*

Zadanie 13. *Gęstość rozkładu wektora losowego (X,Y) ma postać $f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{8}e^{-y}\mathbb{I}_{\{y>0\}}\mathbb{I}_{\{|x|<y\}}$.*

1. *Wyznacz gęstości rozkładów warunkowych $X|Y$ i $Y|X$.*
2. *Oblicz $P(X>0|Y>1)$ i $P(Y>1|X>0)$.*

Zadanie 14. *Gęstość rozkładu wektora (X,Y) dana jest wzorem $f(x,y) = \frac{1}{4}\mathbb{I}_{(0,2)}(x)I_{(0,2)}(x-y)$.*

1. *Wyznacz gęstość warunkową $f_{Y|X}$.*

2. *Oblicz* $P(|Y| < 1|X = 1)$ *i* $E(Y|X)$.

Zadanie 15. *Rozkład wektora losowego* (X, Y) *ma gęstość* $f(x, y) = 4xye^{-(x^2+y^2)}\mathbb{I}_{(0,1)}(x)\mathbb{I}_{(0,1)}(y)$ *Wyznacz rozkłady warunkowe* $f_{X|Y}$ *i* $f_{Y|X}$.

Zadanie 16. *Niech* X, Y *będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na* $(0, 1)$. *Wyznacz rozkład warunkowy* $U = \min(X, Y)$ *względem* $V = \max(X, Y)$.

Zadanie 17. *Niech* $f_{X|Y}(x|y) = cxy^{?2}\mathbb{I}_{\{0<x<y\}}\mathbb{I}_{\{0<y<1\}}$. *Wyznacz stałą c, a następnie oblicz* $P(\frac{1}{4} < X < 12|Y = 58)$.

Zadanie 18. *Łączna gęstość* X *i* Y *dana jest wzorem* $f(x, y) = 21x^2y^3\mathbb{I}_{\{0<x<y<1\}}$.

1. *Wyznacz* $E(X)$ *i* $E(X|Y = y)$.
2. *Znajdź rozkład zmiennej losowej* $Z = E(X|Y)$ *i na jego podstawie oblicz* $E(Z)$. *Wynik porównaj z* $E(X)$.

Zadanie 19. *Łączna gęstość* X *i* Y *dana jest wzorem* $f(x, y) = 2\exp\{-(x + y)\}\mathbb{I}_{\{0<x<y<1\}}$. *Znajdź* $E(Y|X = x)$.