

## Ćwiczenia 5 – 2015.10.29

**Zadanie 1 (Praca domowa)** Rozpatrzmy opcje europejskie na ten sam instrument podstawowy o ustalonym czasie trwania  $T$  i ustalonej cenie wykonania  $K$ . Niech teraz  $P^e(S)$  oznacza cenę opcji sprzedaży przy bieżącej cenie instrumentu podstawowego  $S$ , który w trakcie trwania opcji nie wypłaca dywidendy. Udowodnij, że funkcja  $S \mapsto P^e(S)$

- jest malejąca,
- spełnia warunek Lipschitza ze stałą równa 1,
- jest wypukła,

**Zadanie 2** Rozpatrzmy opcje europejskie na ten sam instrument podstawowy o ustalonym czasie trwania  $T$  i ustalonej cenie wykonania  $K$ . Niech teraz  $C^e(S)$  oznacza cenę opcji kupna przy bieżącej cenie instrumentu podstawowego  $S$ . Udowodnij, że funkcja  $S \mapsto C^e(S)$

- jest rosnąca,
- spełnia warunek Lipschitza ze stałą równa  $L$ ,
- jest wypukłą.

gdzie  $L = e^{-qT}$  dla opcji na instrument bazowy, który generuje ciągły dochód ze stopa  $q$ , lub  $L = 1$  w pozostałych przypadkach.

**Uwaga 1** Rozważamy

1. wyłącznie rynek jednookresowy dwustanowy, gdzie stan świata  $\omega_1$  jest interpretowany jako korzystny dla inwestora, a  $\omega_2$  niekorzystny;
2. oznaczenia z wykładu;
3. inwestorów o różnym podejściu do ryzyka
  - (a) skłonnego do ryzyka ( $P(\{\omega_1\})$  bliskie 1),
  - (b) obojętnego względem ryzyka ( $P(\{\omega_1\}) = .5$ ),
  - (c) z awersją do ryzyka ( $P(\{\omega_1\})$  bliskie 0).

**Zadanie 3** Niech instrument ryzykowny kosztuje 1.5 w chwili początkowej  $t = 0$ , a w chwili końcowej  $T$  może kosztować

- $S_T(\omega_1) = \begin{cases} 10 & \text{gdy } \omega = \omega_1 \\ 2 & \text{gdy } \omega = \omega_2 \end{cases}$ ,
- $S_T(\omega_1) = \begin{cases} 9 & \text{gdy } \omega = \omega_1 \\ 2 & \text{gdy } \omega = \omega_2 \end{cases}$ .

Natomiast dla instrumentu pozbawionego ryzyka jego wartość w chwili początkowej  $t = 0$  to 1, a w chwili końcowej  $T$  to 2. Rozważmy pozycję dłużną w europejskiej opcji kupna, której funkcja wypłaty wynosi  $(S_T - K)^+$ , gdzie  $K$  równe jest odpowiednio 5 i 4. Wykonaj następujące polecenia

1. Policz cenę opcji, jako zdyskontowaną na chwilę początkową wartość oczekiwaną funkcji wypłaty (podejście z matematyki ubezpieczeniowej/elementarnej matematyki finansowej) dla różnego typu inwestorów przyjmując, że  $P(\{\omega_1\})$  jest równe 0.9, 0.5 i 0.1.

2. Dla tak wyznaczonych cen opcji wyznacz wypłatę ze strategii, polegającej na kupnie instrumentu bazowego w chwili początkowej za kwotę równą cenie opcji. Porównaj wyniki z wypłatą z opcji.
3. Sprawdź, czy model rynku z tym procesem cen i procesem konta bankowego jest modelem bez możliwości arbitrażu.
4. Wyznacz strategię replikującą wypłatę z tej opcji.
5. Policz wartość początkową strategii replikującej wypłatę z tej opcji.
6. Wyznacz miarę martyngałową tj.  $\gamma$ , a następnie zdyskontowaną wartość oczekiwaną względem tej miary funkcji wypłaty.
7. Porównaj dwa ostatnie wyniki.

**Zadanie 4** Niech instrument ryzykowny kosztuje 260 w chwili początkowej  $t = 0$ , a w chwili końcowej  $T$  może kosztować

$$S_T(\omega_1) = \begin{cases} 340 & \text{gdy } \omega = \omega_1 \\ 220 & \text{gdy } \omega = \omega_2 \end{cases}.$$

Inwestor uważa, że prawdopodobieństwo zaistnienia korzystnego stanu świata wynosi 0.2. Niech wolna od ryzyka stopa procentowa od chwili początkowej do chwili końcowej wynosi  $r = 1\%$ . Rozważmy pozycję długa w europejskiej opcji kupna, której funkcja wypłaty wynosi  $(S_T - 290)^+$ . Wykonaj następujące polecenia

1. Sprawdź, czy model rynku z tym procesem cen i procesem konta bankowego jest modelem bez możliwości arbitrażu.
2. Wyznacz strategię replikującą wypłatę z tej opcji.
3. Policz wartość początkową strategii replikującej wypłatę z tej opcji.
4. Wyznacz miarę martyngałową tj.  $\gamma$ , a następnie zdyskontowaną wartość oczekiwaną względem tej miary funkcji wypłaty.
5. Porównaj dwa ostatnie wyniki.

**Zadanie 5** Udowodnij, że przy założeniu  $u \leq 1 + r$  strategia  $\varphi = (S_0, -1)$  jest arbitrażem.

**Zadanie 6** Udowodnij, że przy założeniu  $d \geq 1 + r$  strategia  $\varphi = (-S_0, 1)$  jest arbitrażem.

**Zadanie 7** Na podstawie zadań 5 i 6 uzasadnij implikację:

$$\text{JEŻELI } S^d < (1 + r)S_0 < S^u, \text{ TO RYNEK JEST WOLNY OD ARBITRAŻU.}$$