

Ćwiczenia.* Probabilistyka – lista 2

kierunek: matematyka,† studia II°

dr Jarosław Kotowicz

1 Niezależność, kowariancja, korelacja itp.

Zadanie 1.

Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość prawdopodobieństwa zadaną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x+y) \exp^{-(x+y)} & \text{dla } x > 0 \wedge y > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

- Oblicz współczynnik C .
- Oblicz rozkłady brzegowe, dystrybuantę i współczynnik kowariancji.

Zadanie 2. Niech u jest funkcją nieparzystą na \mathbb{R} równą 0 poza odcinkiem $(-1, 1)$ oraz

$$|u(r)| < \frac{1}{\sqrt{2\pi} e}$$

- Sprawdzić, że funkcja

$$f(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2)\right\} + u(r_1)u(r_2),$$

jest gęstością pewnego układu (X_1, X_2) .

- Czy zmienne (X_1, X_2) są niezależne?

Zadanie 3. X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładach jednostajnych na odcinkach $] - 1, 1[$ i $]1, 3[$ odpowiednio, $\Psi = (X, Y)$. Znajdź dystrybuantę rozkładu zmiennej losowej Ψ .

Zadanie 4. Niech K będzie kwadratem o boku długości 1 położonym na płaszczyźnie. Jakie warunki musi spełniać K aby rozkład prawdopodobieństwa o gęstości danej wzorem

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } (x, y) \notin K \\ 1 & \text{gdy } (x, y) \in K \end{cases}$$

był produktem swoich rozkładów brzegowych?

Zadanie 5. Niech $f(x, y, z) := g(x, y, z) + h(x, y, z)$, gdzie

$$g(x, y, z) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2} - 2\pi z\right) & \text{dla } z > 0 \\ 0 & \text{dla } z < 0 \end{cases}, \quad h(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy(z-1)}{1000} & \text{dla } x, y \in] - 1, 1[\wedge z \in]0, 2[, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y, z. \end{cases}$$

- Sprawdź, że f jest gęstością rozkładu pewnej trójwymiarowej zmiennej losowej (X, Y, Z) .
- Znajdź wszystkie możliwe gęstości brzegowe.

*©J.Kotowicz

†specjalności: matematyka finansowa oraz analiza danych i modelowanie

- Zbadaj, czy zmienne losowe $X, Y; X, Z; Y, Z; X, Y, Z$ są niezależne?

Zadanie 6. Wykaż, że dla przypadków, gdy

- $W_{X_i} = \{0, 1\}, i = 1, 2, P(\{X_i = 0\}) = p, 0 < p < 1,$
- $W_{X_i} = \{-1, 1\}, i = 1, 2, P(\{X_i = 1\}) = p, 0 < p < 1.$

warunkiem koniecznym i wystarczającym niezależności zmiennych losowych X_1, X_2 jest by $E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2).$

Zadanie 7. Niech $X, Y (Y \neq 0)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Wykaż, że zmienne losowe X oraz Y^{-1} są również niezależne.

Zadanie 8. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $P(\{X > 0\}) = 1.$ Wykaż, że zdarzenia $\{Y > 2\}$ i $\{-1 < X < 1\}$ są niezależne.

Zadanie 9. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $P(\{Y > 0\}) = 1.$ Wykaż, że zmienne losowe X, Y^2 są niezależne.

Zadanie 10. Niech (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie $\{(x, y) : x, y > 0, x + y < 1\}.$ Czy zmienne losowe X, Y są niezależne?

Zadanie 11. Zbadaj, czy zmienne losowe X, Y są niezależne, jeśli dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości

- $f(x, y) = \frac{1}{\pi} \cdot I_{\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}},$
- $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right),$
- $f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \cdot I_{\{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}}.$

Zadanie 12. Dana jest zmienna losowa X o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1].$ Określamy zmienne Y_1 i Y_2 następująco $Y_1 := \sin 2\pi X, Y_2 := \cos 2\pi X.$ Oblicz współczynnik korelacji $\rho(Y_1, Y_2).$ Czy Y_1, Y_2 są niezależne?

Zadanie 13. Niech ω oznacza wynik rzutu symetryczną kostką do gry, $X(\omega) = \lfloor \frac{\omega}{\sqrt{6}} \rfloor, Y(\omega) = \lfloor \frac{\omega}{\pi} \rfloor$ ($\lfloor a \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej a). Czy X, Y są niezależne?

Zadanie 14. Niech A, B będą zdarzeniami niezależnymi. $X = I_A, Y = I_B.$ Czy X, Y są zmiennymi losowymi niezależnymi? (I_C oznacza funkcję charakterystyczną zbioru C)

Zadanie 15. X, Y niezależne zmienne losowe. Oblicz $E((X + Y)^2)$ wiedząc, że

- $E(X) = \frac{1}{3}, E(Y) = \frac{2}{3}, D^2(X) = \frac{1}{2}, D^2(Y) = \frac{1}{2},$
- $E(X) = \pi, E(Y) = -\pi, D^2(X) = 1, D^2(Y) = 1.$

Zadanie 16. X, Y niezależne zmienne losowe. Oblicz $E((X - Y)^2)$ wiedząc, że

- $E(X) = 2, E(Y) = 2, D^2(X) = \frac{3}{2}, D^2(Y) = \frac{1}{2},$
- $E(X) = 2, E(Y) = 1, D^2(X) = \frac{1}{2}, D^2(Y) = \frac{1}{2}.$

Zadanie 17. Niech (ω_1, ω_2) będzie wynikiem dwukrotnego rzutu kostką. Czy zmienne losowe

$$X(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } 2|\omega_1 - \omega_2 \\ 0 & \text{gdy } 2 \nmid \omega_1 - \omega_2 \end{cases} \quad Y(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } 3|\omega_1 - \omega_2 \\ 0 & \text{gdy } 3 \nmid \omega_1 - \omega_2 \end{cases}$$

są niezależne?

Zadanie 18. Wykaż, że jeśli X, Y są niezależnymi i całkowalnymi z kwadratem zmiennymi losowymi, to zachodzi równość

- $D^2(XY) = (D^2(X))(D^2(Y)) + (E(Y))^2 D^2(X) + (E(X))^2 D^2(Y),$
- $D^2(XY) \geq D^2(X)D^2(Y).$