

Ćwiczenia.* Probabilistyka – lista 7

kierunek: matematyka,† studia II°

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1. Wyznacz funkcję charakterystyczną rozkładu wykładniczego z parametrem λ . Na jej podstawie, korzystając z własności funkcji charakterystycznej, wyznacz wariancję zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym.

Zadanie 2. Niech X_1, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrami odpowiednio $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Korzystając z własności funkcji charakterystycznych pokaż, że zmienna losowa $Y = X_1 + \dots + X_n$ ma rozkład Poissona.

Zadanie 3. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych standaryzowanych. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Z = X - Y$.

Zadanie 4. Niech zmienna X ma rozkład normalny standaryzowany. Wyznacz funkcję charakterystyczną zmiennej X^2 .

Zadanie 5. Korzystając z poprzedniego zdania wyznacz funkcję charakterystyczną rozkładu $\chi^2(n)$.

Zadanie 6. Udowodnij, że jeżeli φ_1 i φ_2 są funkcjami charakterystycznymi, to $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ jest też funkcją charakterystyczną.

Zadanie 7. Uogólnij zadanie 6 na kombinację liniową, ściśle wypukłą skończonej ilości funkcji charakterystycznych.

Zadanie 8. Niech X_1, X_2 będą zmiennymi niezależnymi o rozkładzie Cauchy'ego z parametrem a , tzn. o gęstości $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$. Wiedząc, że funkcja charakterystyczna rozkładu Cauchy'ego z parametrem a jest postaci $\varphi(t) = \exp(-a|t|)$, pokaż, że $X_1 + X_2$ też ma rozkład Cauchy'ego. Wyznacz ten parametr.

Zadanie 9. Zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_n są niezależne i mają rozkład Cauchy'ego z parametrem $a = 1$. Wykaż, że $X = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ ma również rozkład Cauchy'ego.

Zadanie 10. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym X ma rozkład jednostajny na odcinku $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$, natomiast Y ma rozkład zadany równościami:

$$P\left(\left\{Y = 1 + \frac{1}{n}\right\}\right) = P\left(\left\{Y = -1 + \frac{1}{n}\right\}\right) = \frac{1}{2},$$

gdzie n jest ustaloną liczbą naturalną. Zmienna Z określona jest wzorem $Z = 2X + Y$. Wyznacz funkcję charakterystyczną zmiennej Z .

Zadanie 11. Rozkład dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) zadany jest gęstością

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(1 + xy(x^2 - y^2))\mathbb{I}_{\{(x, y): |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1\}}.$$

Wykaż, że zmienne losowe X i Y są zależne, a mimo to $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

*©J.Kotowicz

†specjalności: matematyka finansowa oraz analiza danych i modelowanie

Zadanie 12. Udowodnij, że jeżeli zmienna losowa X przyjmuje wartości całkowite, to

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad P(\{X = k\}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi_X(t) dt.$$

Zadanie 13. Wiedząc, że $\varphi(t) = \frac{1}{2 - \exp(it)}$ jest funkcją charakterystyczną rozkładu dyskretnego, którego zbiorem wartości jest zbiór liczb całkowitych nieujemnych, wyznacz ten rozkład.