

Ćwiczenia:* Teoria opcji – lista 10

kierunek: matematyka, specjalność: matematyka finansowa,
studia II°

dr Jarosław Kotowicz

Uwaga 1. Rozważamy klasyczny model Blacka-Scholesa.

Zadanie 1 (Praca domowa zadana na wykładzie).

1. W oparciu o lemat Itô udowodnij, że w klasycznym modelu Blacka-Scholesa proces cen instrumentu ryzykownego $(S_t)_{t \in [0, T]}$, gdzie $S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$ spełnia stochastyczne równanie różniczkowe $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$.
2. W oparciu o literaturę przedstaw twierdzenie Grisanowa.
3. W oparciu o literaturę przypomnij pojęcie martyngału lokalnego.

Zadanie 2 (strategia „buy-and-hold”). Udowodnij, że strategia „kup i trzymaj aktywo” tzn. $\varphi_t^1 \equiv a > 0$ i $\varphi_t^0 \equiv 0$ jest strategią samofinansującą się.

Zadanie 3. Udowodnij, że strategia polegająca na włożeniu pieniędzy na rachunek bankowy w chwili początkowej i reinwestycji odsetek w konto jest strategią samofinansującą się.

Zadanie 4. Udowodnij, że zbiór strategii samofinansujących się jest przestrzenią liniową.

Zadanie 5 (Lemat techniczny z probabilistyki). Policz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu logarytmiczno-normalnego tzn. udowodnij, że jeżeli $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ i $Y = \exp(X)$, to $E(Y) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$ i $D^2(Y) = \exp(2\mu + \sigma^2) (\exp(\sigma^2) - 1)$.

Zadanie 6. Niech $(S_t)_{t \in [0, T]}$ będzie procesem cen w klasycznym modelu Blacka-Scholesa. Pokaż, że

$$\frac{S_t - S_u}{S_u} = \exp\left(\left(t - u\right)\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma(W_t - W_u)\right) - 1.$$

Zadanie 7. Niech $(S_t)_{t \in [0, T]}$ będzie procesem cen w klasycznym modelu Blacka-Scholesa. Korzystając z dwóch poprzednich zadań udowodnij, że

$$\lim_{u \rightarrow t^-} \frac{1}{t - u} E\left(\frac{S_t - S_u}{S_u}\right) = \mu,$$
$$\lim_{u \rightarrow t^-} \frac{1}{t - u} D^2\left(\frac{S_t - S_u}{S_u}\right) = \sigma^2.$$

Zadanie 8. Rozważmy na rynku Blacka-Scholesa instrument ryzykowny z ceną początkową 40, oczekiwanym zwrotem 16% p.a., współczynnikiem zmienności 20% p.a.. Wyznacz 95% przedział ufności dla ceny akcji za trzy miesiące.

*©J.Kotowicz

Zadanie 9. Korzystając z zadań 5 i 6 pokaż, że średnia wartość ceny instrumentu ryzykownego w modelu Blacka-Scholesa rośnie ze stopa równa μ , czyli $E(S_t) = S_0 e^{t\mu}$.

Zadanie 10. Korzystając z danych zadania 8 w oparciu o zadanie 9 wyznacz średnią cenę instrumentu ryzykownego za trzy miesiące.