Ćwiczenia z przedmiotu Procesy stochastyczne
Procesy stochastyczne
kierunek: matematyka, studia II°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1. *Udowodnić fakty podane na wykładach.*

Zadanie 2. *Niech ciąg zmiennych $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ opisuje ilość orłów wyrzuconych w n pierwszych rzutach moneta z N rzutów. Zbadaj, czy $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $(\mathcal{F}_n^X)$-martyngałem.*

Zadanie 3. *Niech dany będzie ciąg $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niezależnych zmiennych losowych całkowalnych z kwadratem o parametrach $E(X_n) = 0$, $D^2(X_n) = \sigma^2$. Pokazać, że ciąg $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $(\mathcal{F}_n^X)$-martyngałem, gdzie $Y_n := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_n\right)^2 - n\sigma^2$.*

Zadanie 4. *Gramy w następująca grę: rzucamy moneta i jeśli wypadnie orzeł, wygrywamy 1 zł, a jeśli reszka, to przegrywamy 1 zł. Wygrana w n–tej grze to zmienna losowa X_n, a łączna wygrana po n grach to $Y_n := \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Zbadaj, czy ciąg $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $(\mathcal{F}_n^X)$-martyngałem.*

Zadanie 5. *Rozważyć poprzednie zadanie dla wygranej a zł i przegranej b zł.*

Zadanie 6. *Zadajemy proces Poissona następująco: $X_0 = 0$, $X_1 \sim Poiss(\lambda_1)$, $X_2 - X_1 \sim Poiss(\lambda_2)$ oraz $X_2 - X_1$ jest niezależne od X_1. $X_k - X_{k-1} \sim Poiss(\lambda_k)$ oraz $X_k - X_{k-1}$ jest niezależne od wcześniejszych przyrostów. Zbadaj, czy ciąg $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $(\mathcal{F}_n^X)$-martyngałem.*

Zadanie 7. *Niech $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $P(\{\xi_i = \pm 1\}) = 0{,}5$. Niech $X_n := \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ oraz $Y_n := (-1)^n \cos(\pi X_n)$. Zbadaj, czy $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $(\mathcal{F}_n^\xi)$-martyngałem.*

Zadanie 8. *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie $(\mathcal{F}_n)$-martyngałem. Udowodnij, że wtedy $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $(\mathcal{F}_n)$-podmartyngałem*

Zadanie 9. *Niech $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem całkowalnych zmiennych losowych o tej własności, że*

$$E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n^Y) = aY_n + bY_{n-1} \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

gdzie $a, b \in]0, 1[$ oraz $a + b = 1$. Rozważmy ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ określony wzorem

$$X_{n+1} := \alpha Y_{n+1} + Y_n \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Znaleźć wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ jest $(\mathcal{F}_n^Y)$-martynagłem.

Zadanie 10. *Niech $(X_n)_{n\geqslant 0}$ będzie $(\mathcal{F}_n)$-martyngałem. Udowodnić, że zmienne $D_n := X_n - X_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, są parami nieskorelowane.*

Zadanie 11 (Proces gałazkowy)**.** *Niech $Y_{n,k}$, gdzie $n, k \in \mathbb{N}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie i średniej m. Rozważmy ciąg $(X_n)_{n\geqslant 0}$określony wzorem*

$$X_0 := 1, \quad X_n := (Y_{n,1} + \ldots + Y_{n,X_{n-1}})\mathbb{I}_{\{X_{n-1}>0\}} \ \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Pokazać, że ciąg $\left(\frac{X_n}{m^n}\right)_{n\geqslant 1}$ jest $(\mathcal{F}_n^X)$-martyngałem.

1 Jednostajna całkowalność

Zadanie 12. *Udowodnij, że jeżeli zmienna losowa ξ jest całkowalna, to*

$$\forall_{a\geqslant 0}|\xi|I_{\{x\in\Omega:|\xi(x)|\geqslant a\}} \leqslant |\xi|$$
$$\lim_{a\to+\infty}|\xi|I_{\{x\in\Omega:|f(x)|\geqslant a\}} = 0 \quad P\text{-}p.n.$$
$$\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{\{x\in\Omega:|\xi(x)|\geqslant a\}}|\xi|dP = 0.$$

Zadanie 13. *Udowodnij, że rodzina $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ zmiennych losowych jest jednostajnie całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jednostajnie całkowalna jest rodzina $\{|X_\alpha| : \alpha \in I\}$.*

Zadanie 14. *Niech rodzina $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ zmiennych losowych będzie jednostajnie całkowalna. Udowodnij, że jeżeli funkcję F określimy wzorem*

$$\mathbb{R}_+ \ni a \mapsto F(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\alpha\in I}\int\limits_{\{x\in\Omega:|X_\alpha(x)|\geqslant a\}}|X_\alpha|dP,$$

to będzie ona funkcję nierosnącą.

Zadanie 15. *Udowodnij, że dla dowolnej rodziny zmiennych losowych $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$, dowolnej liczby dodatniej a oraz dowolnego zdarzenia A zachodzi oszacowanie*

$$\sup_{\alpha\in I}\int\limits_A|X_\alpha|dP \leqslant aP(A) + \sup_{\alpha\in I}\int\limits_{\{x\in\Omega:|X_\alpha(x)|\geqslant a\}}|X_\alpha|dP.$$

Zadanie 16. *Udowodnij, że jeżeli rodzina $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ zmiennych losowych jest jednostajnie całkowalna, to dowolna zmienna losowa z tej rodziny jest całkowalna.*

Zadanie 17. *Udowodnij, że jeżeli rodzina $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ zmiennych losowych jest jednostajnie całkowalne, to spełnione są następujące warunki*

$$\sup_{\alpha\in I}\int\limits_\Omega|X_\alpha|dP < +\infty,$$
$$\forall_{\xi>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{A\in\Sigma}P(A) < \delta \Rightarrow \sup_\alpha\int\limits_A|X_\alpha|dP < \xi.$$

Ponadto jeśli spełnione są warunki (1), (1), to rodzina ta jest jednostajnie całkowalna.

Zadanie 18. *Udowodnij, że jeżeli rodziny $\{X_\alpha\colon\ \alpha \in I\}$ oraz $\{Y_\beta\colon\ \beta \in J\}$ zmiennych losowych , gdzie $I\cap J = \emptyset$, są jednostajnie całkowalne, to rodzina $\{X_\alpha\colon\ \alpha \in I\}\cup\{Y_\beta\colon\ \beta \in J\}$ jest też jednostajnie całkowalna.*

Zadanie 19. *Niech $G\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą i nieujemną taką, że $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{G(t)}{t} = +\infty$. Udowodnij, że jeśli zmienne losowe z rodziny $\{X_\alpha\colon\ \alpha \in I\}$ są całkowalne i $M = \sup\limits_{\alpha\in I}\int_\Omega G\left(|X_\alpha|\right)dP < +\infty$, to rodzina $\{X_\alpha\colon\ \alpha \in I\}$ jest jednostajnie całkowalna.*

Zadanie 20. *Udowodnij, ze ciag zmiennych losowych (X_n) jest jednostajnie całkowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja φ i taka stała C, że $E(\varphi(|X_n|)) < C$ dla każdego n oraz $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x} = \infty$.*

Zadanie 21. *Niech zmienna losowa ξ będzie całkowalna. Udowodnij, że jeśli rodzina $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ zmiennych losowych spełnia warunek $|X_\alpha| \leqslant \xi$ dla dowolnego $\alpha \in I$, to ta rodzina jest jednostajnie całkowalna.*

Zadanie 22. *Niech rodzina zmiennych losowych $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ będzie jednostajnie całkowalna. Udowodnij, że jeżeli $\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$ jest taką rodziną zmiennych losowych, że $|Y_\alpha| \leqslant |X_\alpha|$ P-p.n. dla dowolnego indeksu α, to rodzina $\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$ jest jednostajnie całkowalna.*

Zadanie 23. *Niech rodzina zmiennych losowych $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ będzie jednostajnie całkowalna. Udowodnij, że wówczas dla dowolnej liczby rzeczywistej γ rodzina $\{\gamma X_\alpha : \alpha \in I\}$ jest jednostajnie całkowalna.*

Jeżeli założymy dodatkowo $\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$ jest jednostajnie całkowalna rodziną zmiennych losowych, to udowodnij, że rodzina $\{X_\alpha + Y_\alpha : \alpha \in I\}$ jednostajnie całkowalna.

Zadanie 24. *Udowodnij, że jeżeli $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ciągiem zmiennych losowych takich, że jest jednostajnie całkowalnym, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \xi$ P-p.n, to zmienna ξ jest całkowalna oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |X_n - \xi| dP = 0 \quad \textit{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n dP = \int_\Omega \xi dP.$$

Zadanie 25 (lemat)**.** *Udowodnij, że jeżeli ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ zmiennych losowych jest zbieżny w $L^p(\Omega, \Sigma, P)$ do zmiennej losowej ξ z $L^p(\Omega, \Sigma, P)$, to ciąg $(|X_n - \xi|^p)_{n\geqslant 1}$ jest jednostajnie całkowalny.*

Zadanie 26. *Niech będą spełnione założenia zadania 25. Udowodnij, że wówczas ciąg $(|X_n|^p)_{n\geqslant 1}$ jest jednostajnie całkowalny.*

Zadanie 27 (lemat)**.** *Niech $(X_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych klasy $L^p(\Omega, \Sigma, P)$, zaś ξ będzie zmienną losową takimi, że*

$$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$$
$$\forall_{\xi>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{A\in\Sigma} P(A) < \delta \Rightarrow \sup_{n\geqslant 1} \int_A |X_n - \xi|^p dP < \xi.$$

Udowodnij, że wtedy $\xi \in L^p(\Omega, \Sigma, P)$ oraz $X_n \xrightarrow{\mathfrak{L}^p} \xi$.

Zadanie 28. *Niech $(X_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych z $L^p(\Omega, \Sigma, P)$. Korzystając z wcześniejszych zadań udowodnij, że ciąg ten jest zbieżny w $L^p(\Omega, \Sigma, P)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zmienna losowa ξ taka, że*

$$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$$
$$\forall_{\xi>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{A\in\Sigma} P(A) < \delta \Rightarrow \sup_{n\geqslant 1} \int_A |X_n - \xi|^p dP < \xi.$$

Zadanie 29 (lemat)**.** *Niech $(X_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych z $L^p(\Omega, \Sigma, P)$, zaś ξ będzie zmienną losową takimi, że*

$$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$$
$$\forall_{\xi>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{A\in\Sigma} P(A) < \delta \Rightarrow \sup_{n\geqslant 1} \int_A |X_n|^p dP < \xi.$$

Udowodnij, że $\xi \in L^p(\Omega, \Sigma, P)$ oraz

$$\forall_{\xi>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{A\in\Sigma} P(A) < \delta \Rightarrow \sup_{n\geqslant 1} \int_A |X_n - \xi|^p dP < \xi.$$

Zadanie 30. *Niech $(X_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych z $L^p(\Omega, \Sigma, P)$. Korzystając z wcześniejszych zadań udowodnij, że ciąg ten jest zbieżny w $L^p(\Omega, \Sigma, P)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg ten jest zbieżny według miary oraz*

$$\forall_{\xi>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{A\in\Sigma} P(A) < \delta \Rightarrow \sup_{n\geqslant 1} \int_A |X_n|^p dP < \xi.$$

Zadanie 31. *Niech $(X_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych z $L^p(\Omega, \Sigma, P)$. Korzystając z wcześniejszego zadania udowodnij, że ciąg ten jest zbieżny w $L^p(\Omega, \Sigma, P)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

1. *Ciąg ten jest zbieżny według miary.*
2. *Ciąg $(|X_n|^p)_{n\geqslant 1}$ jest jednostajnie całkowalny.*

2 Zbieżność

Zadanie 32. *Niech* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *będzie* $(\mathcal{F}_n)$*-martyngałem. Czy* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *jest domykalny, jeśli*

- *ciag* $(E(X_n \ln X_n))$ *jest jednostajnie całkowalny, zbieżny?*
- (X_n) *jest zbieżny prawie na pewno?*
- (X_n) *jest zbieżny w* $L^1(\Omega, \Sigma, P)$*?*

Zadanie 33. *Podaj przykład martyngału* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *takiego, ze* $X_n \to 0$ *P-p.n. oraz* $E(|X_n|) \to +\infty$.

Zadanie 34. *Niech* $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ *będzie ciągiem niezależnych symetrycznych zmiennych losowych o wartościach* ± 1*. Wykaż, że* (ξ_n)*-nadmartyngał*

$$Z_n := e^{a(\xi_1+\ldots+\xi_n)-(na^2/2)}$$

jest zbieżny prawie na pewno. Czy jest zbieżny w $L^1(\Omega, \Sigma, P)$*?*

Zadanie 35. *Niech* $X_1, X_2, \ldots$ *będą niezależne o rozkładzie jednostajnym na* $[0, 2]$*. Wykaż, że*

$$M_n := \prod_{k=1}^{n} X_k$$

tworzą $(\mathcal{F}_n^X)$*-martyngał zbieżny do 0 prawie na pewno, ale nie w* $L^1(\Omega, \Sigma, P)$.