

Ćwiczenia z przedmiotu PROCESY STOCHASTYCZNE

Całka stochastyczna

kierunek: matematyka, studia II°

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1. Udowodnić fakty podane na wykładach.

Zadanie 2. Obliczyć z definicji całki Itô:

$$1. \int_0^T dW_t = W_T,$$

$$2. \int_a^b dW_t = W_b - W_a,$$

$$3. \int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{T}{2},$$

$$4. \int_0^T t dW_t = TW_T - \int_0^T W_t dt,$$

$$5. \int_0^T W_t^2 dW_t = \frac{1}{3}W_T^3 - \int_0^T W_t dt.$$

Zadanie 3. Udowodnij, że $E\left(\int_0^T W_t dt\right) = 0$.

Zadanie 4. Korzystając z twierdzenia: $E\left(\int_0^T f(t, W_t) dt\right) = \int_0^T E(f(t, W_t)) dt$ oblicz wartości oczekiwane całek

$$1. E\left(\int_0^T W_t dW_t\right),$$

$$2. E\left(\int_0^T t dW_t\right),$$

$$3. E\left(\int_0^T W_t^2 dW_t\right),$$

$$4. E\left(\int_0^T W_t^4 dW_t\right).$$

Zadanie 5. Korzystając z formuły Itô dla procesu Wienera

$$dF(t, W_t) = \left(F'_t + \frac{1}{2}F''_{xx}\right) dt + F'_x dW_t$$

oblicz następujące różniczki:

1. $d(W_t^2)$,
2. $d(tW_t)$,
3. $d(tW_t^2)$,
4. $d(W_t^3)$,
5. $d(W_t^k)$.

Zadanie 6. Korzystając z formuły Itô dla procesu Wienera wyprowadź wzór na całkowanie przez części

$$\int_0^T F'_x(t, W_t) dW_t = F(T, W_T) - F(0, W_0) - \int_0^T \left(F'_t + \frac{1}{2} F''_{xx} \right) dt.$$

Zadanie 7. Oblicz wartości oczekiwane całek:

1. $E \left(\int_0^T t^2 dW_t \right)$,
2. $E \left(\int_0^T f(t) dW_t \right)$.

Zadanie 8. Znajdź rozkład zmiennej $5W_1 - W_3 + W_7$.

Zadanie 9. Dla jakich parametrów a i b , zmienne $aW_1 - W_2$ oraz $W_3 + bW_5$ są niezależne?