

# Metody probabilistyczne i statystyka - wykład siódmy<sup>1</sup>

dr Jarosław Kotowicz

Instytut Informatyki Uniwersytet w Białymstoku

7 marca 2020

---

<sup>1</sup>©J.Kotowicz, 2020

# Spis treści

- 1 Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a
- 2 Funkcje charakterystyczne zmiennych losowych i rozkładów

# Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a. I

Będziemy rozważać schemat  $n$  prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym  $p$  (prawdopodobieństwo porażki oznaczmy  $q$ ) oraz ilością sukcesów równą  $k$ .

Przyjmijmy następujące oznaczenia

$$B(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (1)$$

$$h \stackrel{\text{ozn}}{=} \frac{1}{\sqrt{npq}} \quad (2)$$

$$\delta_k \stackrel{\text{ozn}}{=} k - np \quad (3)$$

$$x_k \stackrel{\text{ozn}}{=} \frac{\delta_k}{\sqrt{npq}} \equiv \delta_k h. \quad (4)$$

## Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a. II

Mamy wtedy

$$n - k = nq - \delta_k \quad (5)$$

$$\frac{k}{np} = 1 + x_k qh \quad (6)$$

$$\frac{n - k}{nq} = 1 - x_k ph. \quad (7)$$

## Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a. III

### Twierdzenie 1 (Moivre'a - Laplace'a lokalne)

Jeżeli  $h|x_k| \max\{p, q\} \leq \frac{1}{2}$ , to

$$B(k, n, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x_k^2}{2}} e^{R(n, k)}, \quad (8)$$

przy czym

$$|R(n, k)| \leq \frac{3}{4}|x_k|h + \frac{1}{3}|x_k|^3h + \frac{1}{3n}. \quad (9)$$

W szczególności jeżeli  $n$  i  $k$  zbiegają do nieskończoności w taki sposób, że  $hx_k^3$  zbiega do zera, to  $R(n, k)$  również zbiega do zera.

Przyjmijmy oznaczenie

$$x_{a \pm \frac{h}{2}} \stackrel{\text{ozn}}{=} x_a \pm \frac{h}{2}.$$

# Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a. IV

Przez  $\Phi$  będziemy oznaczać dystrybuantę rozkładu normalnego  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

# Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a. V

## Twierdzenie 2 (Moivre'a - Laplace'a globalne)

Jeżeli  $h \max\{|x_a|, |x_b|\} |x_k| \max\{p, q\} \leq \frac{1}{2}$ , to

$$P(\{\omega : a \leq S_n(\omega) \leq b\}) = \left[ \Phi(x_{b+\frac{1}{2}}) - \Phi(x_{a-\frac{1}{2}}) \right] e^{D(n,a,b)}, \quad (10)$$

gdzie

$$|D(n, a, b)| \leq \max_{k \in \{a, b\}} \left[ \frac{5}{4} |x_k| h + \frac{1}{3} |x_k|^3 h \right] + \frac{1}{3n} + \frac{h^2}{8}. \quad (11)$$

W szczególności jeżeli  $n$  zbiega do nieskończoności, zaś  $a$  i  $b$  zmieniają się tak, że  $\max\{x_a^3 h, x_b^3 h\}$  zbiega do zera, to  $D(n, a, b)$  również zbiega do zera oraz

$$P(\{\omega : a \leq S_n(\omega) \leq b\}) \sim \Phi(x_{b+\frac{1}{2}}) - \Phi(x_{a-\frac{1}{2}}) \quad (12)$$

$$P(\{\omega : a \leq S_n(\omega) \leq b\}) \sim \Phi(x_b) - \Phi(x_a) \quad (13)$$

# Spis treści

- 1 Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a
- 2 Funkcje charakterystyczne zmiennych losowych i rozkładów



# Pojęcie funkcji charakterystycznej.

Niech  $(\Omega, \Sigma, P)$  będzie przestrzenią probabilistyczną, zaś  $X$  jednowymiarową zmienną.

## Definicja 1

*Funkcją charakterystyczną zmiennej losowej  $X$  nazywamy funkcję  $\varphi_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  zadaną wzorem*

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}(e^{itX}) \equiv \mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\sin(tX)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

## Uwaga 1

*Ponieważ  $|e^{itX}| = 1$  więc funkcja charakterystyczna jest dobrze określona dla dowolnej zmiennej losowej  $X$ .*

# Własności funkcji charakterystycznej. I

## Twierdzenie 3

Niech  $\varphi_X$  będzie funkcją charakterystyczną zmiennej losowej  $X$ . Wtedy

- i)  $\varphi_X(0) = 1$ ,
- ii)  $|\varphi_X(t)| \leq 1$  dla dowolnego  $t \in \mathbb{R}$ ,
- iii)  $\varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(-t)}$  dla dowolnego  $t \in \mathbb{R}$ ,
- iv)  $\varphi_X$  jest jednostajnie ciągła, a więc ciągła.

## Wniosek 1

Funkcja charakterystyczna rozkładu  $\mu$  jest rzeczywista wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mu$  jest rozkładem symetrycznym.

# Własności funkcji charakterystycznej. II

## Definicja 2

Funkcję  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy dodatnio określoną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \sum_{1 \leq k, l \leq n} \psi(t_k - t_l) z_k \bar{z}_l \geq 0. \quad (15)$$

## Twierdzenie 4 (Bochnera)

Funkcja  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła, dodatnio określona i  $\varphi(0) = 1$ .

# Własności funkcji charakterystycznej. III

## Twierdzenie 5

Niech  $n \in \mathbb{N}$ . Jeżeli  $X \in L^n(\Omega)$ , to  $n$ -ta pochodna funkcji charakterystycznej  $\varphi_X^{(n)}$  istnieje i jest jednostajnie ciągła, a ponadto

$$\varphi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}(X^n). \quad (16)$$

## Uwaga 2

Używać będziemy symbolu Landaua  $o(x)$ , co znaczy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0.$$

# Własności funkcji charakterystycznej. IV

## Wniosek 2

Niech  $n \in \mathbb{N}$ . Jeżeli  $X \in L^n(\Omega)$ , to

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X^k) \cdot \frac{(it)^k}{k!} + o(t^n). \quad (17)$$

## Twierdzenie 6

Jeżeli dwa rozkłady prawdopodobieństwa na  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  mają równe funkcje charakterystyczne, to są sobie równe.

## Lemat 1

Niech  $Y = aX + b$  wtedy  $\varphi_Y(t) = e^{itb} \varphi(at)$  dla dowolnego  $t \in \mathbb{R}$ .

# Własności funkcji charakterystycznej. V

## Twierdzenie 7

Jeżeli  $X$  i  $Y$  są niezależnymi zmiennymi losowymi, to

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y. \quad (18)$$

## Lemat 2

Jeżeli  $\mu$  jest rozkładem prawdopodobieństwa z funkcją charakterystyczną  $\varphi$ , to dla każdego  $u > 0$  zachodzi

$$\mu \left( \left[ -\frac{2}{u}, \frac{2}{u} \right] \right) \geq 1 - \frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \varphi(s)) ds \quad (19)$$

## Własności funkcji charakterystycznej. VI

## Twierdzenie 8 (Lévy'ego - Craméra)

Niech  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  będzie ciągiem rozkładów prawdopodobieństwa na  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  i niech  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  będzie ciągiem ich funkcji charakterystycznych. Jeżeli  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$  dla wszystkich  $t \in \mathbb{R}$  i funkcja  $\varphi$  jest ciągła w zerze, to  $\varphi$  jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu  $\mu$ .

## Twierdzenie 9 (Lévy'ego)

Jeżeli  $\varphi$  jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej  $X$  o dystrybuancie  $F$ , to dla dowolnych  $a < b$  takich, że dystrybuanta  $F$  jest ciągła w punktach  $a$  i  $b$  zachodzi

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt. \quad (20)$$

## Własności funkcji charakterystycznej. VII

## Twierdzenie 10

Niech  $X$  będzie ciągłą zmienną losową o gęstości  $f$  i funkcji charakterystycznej  $\varphi$ . Jeżeli funkcja charakterystyczna  $\varphi$  jest całkowna, to

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itr} \varphi(t) dt. \quad (21)$$

## Twierdzenie 11

Niech  $X$  będzie dyskretną zmienną losową przyjmującą wartości całkowite z funkcją charakterystyczną  $\varphi$ . Wówczas

$$\forall k \in \mathbb{Z} p_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \varphi(t) dt. \quad (22)$$