zad 52 druga kropka

$X \sim U(0,1)$ stąd $f(x) = 1 \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$ f - gęstość

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$ F - dystrybuanta

$Y = 2X^2 - 1$ G - dyst. Y i g gęstość Y zależność $G' = g$

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(2X^2 - 1 \leq y) = P\left(X^2 \leq \frac{y+1}{2}\right) = \cancel{P(\ )}$$

$$= \begin{cases} 0 & \frac{y+1}{2} \leq 0 \\ P\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y+1}{2}}\right) & \frac{y+1}{2} > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ F\left(\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right) - F\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right) & y > -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ F\left(\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right) & y > -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ \sqrt{\frac{y+1}{2}} & y > -1 \wedge \sqrt{\frac{y+1}{2}} \leq 1 \\ 1 & y > -1 \wedge \sqrt{\frac{y+1}{2}} > 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{bo } -\sqrt{\frac{y+1}{2}} < 0 \text{ i } F\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right) = 0}$

ale $\sqrt{\frac{y+1}{2}} \leq 1 \iff y+1 \leq 2 \iff y \leq 1$ więc

$$= \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ \sqrt{\frac{y+1}{2}} & -1 < y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

stąd gęstość

$$g(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -1 \vee y > 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{\frac{y+1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} & -1 < y \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y \notin (-1,1) \\ \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y+1}} & y \in (-1,1) \end{cases}$$

ZAD 1.5

ZAD 55, X - ilość urn pustych : wartości 0, 1, 2, 3, 4

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0	$\frac{6}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$	0

0 i 4 nie może być tyle pustych

Należy wybrać model. Może być 1) nierozróżnialne kule
2 kule rozróżnialne.

Tutaj można wybrać: kule rozróżnialne.

$\overline{\overline{\Omega}} = 4^3$

1 urna pusta: 1) wybieramy urnę pustą $\binom{4}{1} = 4$
2) pozostałe kule rozmieszczamy po jednej w każdej urnie $3 \cdot 2 \cdot 1$

$$P(X=1) = \frac{4 \cdot 3!}{4^3} = \frac{3!}{4^2} = \frac{6}{16}$$

3 urny puste 1) wybieramy urnę do której wrzucamy wszystkie kule $\binom{4}{1} = 4$
2) wrzucamy do niej kule - 1

$$P(X=3) = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}$$

$$P(X=2) = 1 - P(X=1) - P(X=3) = 1 - \frac{6}{16} - \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{6}{16} + 2 \cdot \frac{9}{16} + 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16}(6 + 18 + 3) = \frac{27}{16}$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{6}{16} + 2^2 \cdot \frac{9}{16} + 3^2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16}(1 + 36 + 9) = \frac{46}{16}$$

$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{46}{16} - \left(\frac{27}{16}\right)^2 = \ldots$$

Model 1 na drugiej kartce

$\boxed{1.5}$

ZAD 55 (inny schemat)

X - ilość urn pustych ponieważ mamy 4 urny i 3 kule wartości X to 1, 2, 3.

Rozważmy zdarzenia

A_i - dokładnie i - urn jest pustych.

wtedy $P(X=i) = P(A_i)$

Rozważmy model. kule są nierozróżnialne (kombinacje z powt.)

wtedy $|\Omega| = \binom{4-1+3}{3} = \binom{6}{3} = \frac{4\cdot5\cdot6}{2\cdot3} = 20$

dla $i=3$

$|A_3| = \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{wybór trzech urn pustych}} \cdot 1 = 4 \leftarrow$ wszystkie kule do jednej urny

dla $i=2$

tyle zostało urn (dwie)

$|A_2| = \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{wybór 2 urn pustych}}\left[\binom{2-1+3}{3} - 2\right] = \frac{3\cdot4}{2}\left[\binom{4}{3}-2\right] = 6\cdot(4-2) = 6\cdot2 = 12$

$\uparrow$ wykluczamy przypadek umieszczenia kul tylko w 1 urnie

dla $i=1$

$|A_1| = |\Omega| - |A_3| - |A_2| = 20 - 4 - 12 = 4$

Rozkład

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{4}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{4}{20}$

i $E(X) = 1\cdot\frac{4}{20} + 2\cdot\frac{12}{20} + 3\cdot\frac{4}{20} = \frac{1}{20}\cdot(4+24+12) = 2$

$E(X^2) = 1^2\cdot\frac{4}{20} + 2^2\cdot\frac{12}{20} + 3^2\cdot\frac{4}{20} = \frac{4}{20}[1+12+9] = \frac{88}{20} = \frac{22}{5}$

$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{22}{5} - 2^2 = 4{,}4 - 4 = 0{,}4$

ZAD 1.5

ZAD 92

$$1=\int_0^3 cx^2dx = c\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^3 = \frac{c}{3}(27-0) = 9c \Rightarrow c=\frac{1}{9} \text{ bo } 9c=1$$

Chcemy policzyć Me czyli $\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \frac{1}{2}$

Mamy $\frac{1}{2}=\int_0^{Me}\frac{1}{9}x^2dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{Me} = \frac{1}{27}Me^3 \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{27}Me^3 \Rightarrow$

$(Me)^3=\frac{27}{2} \Rightarrow Me=\sqrt[3]{\frac{27}{2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

Zad 93 pierwsza kropka.

$$\mathbb{E}(X)=\int_\Omega X\,dP=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx = \int_0^3 x\cdot\frac{1}{9}x^2dx=\frac{1}{9}\int_0^3x^3dx=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}x^4\Big|_0^3=$$

$$=\frac{1}{36}\left[3^4-0^4\right]=\frac{1}{36}\cdot 9^2=\frac{9}{4}$$

$$\mathbb{E}(X^2)=\int_\Omega X^2dP=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^3x^2\cdot\frac{1}{9}x^2dx=\frac{1}{9}\int_0^3x^4dx=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5}x^5\Big|_0^3=$$

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5}3^5=\frac{1}{5}\cdot 3^3=\frac{27}{5}$$

$$\mathbb{D}^2(X)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2=\frac{27}{5}-\left(\frac{9}{4}\right)^2$$

Zad ~~7~~8, pierwsza kropka.

Klasyczna N. Czebyszewa w tym przypadku N. Czebyszewa-Bienaymé

$$\forall_{\varepsilon>0}\ P(|X-\mathbb{E}(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{\mathbb{D}^2(X)}{\varepsilon^2}$$

U nas $\varepsilon=4\mathbb{D}(X)=4\sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$. i ponieważ $X\sim N(0,1)$, to $\mathbb{E}(X)=0$ i $\mathbb{D}(X)=1$

Stąd.
$$P\left(|X-\underset{\parallel}{\mathbb{E}(X)}|\geq 4\sqrt{\mathbb{D}^2(X)}\right)\leq\frac{\mathbb{D}^2(X)}{4^2\cdot\mathbb{D}^2(X)}=\frac{1}{16}$$

Ale $P(|X|\geq 4)$ więc ostatecznie:

$$P(|X|\geq 4)\leq\frac{1}{16}.$$

Zad 80 pierwsza kropka.

$X\sim U(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ Odczytujemy z wykładu (u Państwa leży to Państwo

$$\mathbb{E}(X)=\frac{\sqrt{3}+(-\sqrt{3})}{2}=0$$

$$\mathbb{D}^2(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{3})^2}{12}=\frac{(2\sqrt{3})^2}{12}=1$$

Stąd.
$$P\left(|X|\geq\frac{3}{2}\right)=P\left(|X-\mathbb{E}(X)|\geq\frac{3}{2}\right)\leq\frac{\mathbb{D}^2(X)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{9}{4}}=\frac{4}{9}$$