Statystyka matematyczna - wykład pierwszy*
Rozkłady i ich parametry.
kierunek: informatyka i ekonometria I°

dr Jarosław Kotowicz

Spis treści

1 Rozkłady dyskretne

Przykłady rozkładów dyskretnych.

Definicja 1. *Niech* (Ω, Σ, P) *będzie przestrzenią probabilistyczną, zaś* X *będzie dyskretną jednowymiarową zmienną losową. Mówimy, że zbiór* W_X *jest zbiorem wartości zmiennej losowej* X *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{A\subset\mathbb{R}} \quad A \cap W_X = \emptyset \Rightarrow P(\{\omega : X(\omega) \in A\}) = 0 \tag{1}$$

$$\forall_{x\in W_X} \quad P(\{\omega : X(\omega) = x\}) > 0. \tag{2}$$

Uwaga 1. *Podobnie można zdefiniować zbiór wartości rozkładu dyskretnego.*

Uwaga 2. *Rozkład dyskretny wyznaczają jednoznacznie zbiór wartości oraz funkcja prawdopodobieństwa, czyli prawdopodobieństwa przypisane tym wartościom.*

Przykład 1 (Rozkład jednopunktowy)**.**

$$W_X := \{x_0\} \ \ i \ P(\{\omega : X(\omega) = x_0\}) = 1. \tag{3}$$

Oznaczenie $\delta(x_0)$*.*

Przykład 2 (Rozkład dwupunktowy)**.** *Niech* $p \in]0, 1[$.

$$W_X := \{x_1, x_2\}, x_1 \neq x_2,$$

$$P(\{\omega : X(\omega) = x_1\}) = p, P(\{\omega : X(\omega) = x_2\}) = 1 - p. \tag{4}$$

W szczególnym przypadku, gdy $x_1 = 1$*, zaś* $x_2 = 0$ *taki rozkład nazywamy rozkładem zero-jedynkowym i oznaczamy* $Bin(1, p)$*.*

Uwaga 3. *Jeżeli zbiór wartości dyskretnej zmiennej losowej* X *jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych, to przyjmujemy następujące oznaczenie*

$$p_k \overset{\text{ozn}}{=} \begin{cases} P(\{\omega : X(\omega) = k\}) & dla\ k \in W_X \\ 0 & dla\ k \notin W_X \end{cases}. \tag{5}$$

Przykład 3 (Rozkład dwumianowy (Bernoulliego) z parametrami n i p)**.** *Niech* $p \in]0, 1[$ *oraz* $n \in \mathbb{N}$.

$$W_X := \{0, 1, \ldots, n\}, \ p_k := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{6}$$

Oznaczenie $Bin(n, p)$*.*

Przykład 4 (Rozkład Poissona z parametrem λ)**.** *Niech* $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

$$W_X := \{0\} \cup \mathbb{N},\ p_k := e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{7}$$

Oznaczenie $Po(\lambda)$.

Przykład 5 (Rozkład geometryczny z parametrem p)**.** *Niech* $p \in]0,1[$.

$$W_X := \mathbb{N},\ p_k := p(1-p)^{k-1}. \tag{8}$$

Oznaczenie $Geom(p)$.

Przykład 6 (Rozkład ujemny dwumianowy z parametrami p, r)**.** *Niech* $p \in]0,1[$ *oraz* $r \in \mathbb{N}$.

$$W_X := \{0\} \cup \mathbb{N},\ p_k := \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k. \tag{9}$$

Oznaczenie $NegBin(r,p)$.

Przykład 7 (Rozkład Pascala z parametrem p.[1])**.**

$$W_X := \{k, k+1, \ldots\},\ p_l := \binom{l-1}{k-1} p^k (1-p)^{l-k}. \tag{10}$$

Lub inaczej

$$W_X := \{0\} \cup \mathbb{N},\ p_l := \binom{l+k-1}{k-1} p^k (1-p)^l. \tag{11}$$

Przykład 8 (Rozkład hipergeometryczny z parametrami a, b, n)**.** *Niech* $a + b > n$ *oraz* $a \geqslant n$ *i* $b \geqslant n$.

$$W_X := \{0, 1, \ldots, n\},\ p_k := \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}. \tag{12}$$

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennych dyskretnych.

Przykład 9. *Niech* $X \sim \delta(x_0)$. *Wtedy* $\mathbb{E}(X) = x_0$ *i* $Var(X) = 0$.

Przykład 10. *Niech* $p \in]0,1[$. *Niech zmienna losowa* X *ma rozkład dwupunktowy skupiony w punktach* x_1 *i* x_2 *tak, że* $P(\{x_1\}) = p$ *i* $P(\{x_2\}) = 1-p$. *Wtedy* $\mathbb{E}(X) = px_1 + (1-p)x_2$ *i* $Var(X) = p(1-p)(x_1 - x_2)^2$.

Natomiast, gdy $X \sim Bin(1,p)$, *to* $\mathbb{E}(X) = p$ *i* $Var(X) = p(1-p)$.

Przykład 11. *Niech* $\lambda \in \mathbb{R}_+$. *Jeżeli* $X \sim Po(\lambda)$, *to* $\mathbb{E}(X) = \lambda$ *i* $Var(X) = \lambda$.

Przykład 12. *Niech* $p \in]0,1[$. *Jeżeli* $X \sim Geom(p)$, *to* $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ *i* $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Przykład 13. *Niech* $p \in]0,1[, n \in \mathbb{N}$.

1. *Jeżeli* $X \sim Bin(n,p)$, *to* $\mathbb{E}(X) = np$ *i* $Var(X) = np(1-p)$.
2. *Jeżeli* $X \sim NegBin(n,p)$, *to* $\mathbb{E}(X) = \frac{n(1-p)}{p}$ *i* $Var(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}$.

Przykład 14. *Jeżeli zmienna losowa* X *ma rozkład hipergeometryczny z parametrami* a, b, n, *gdzie* $a + b > n$ *oraz* $a \geqslant n$ *i* $b \geqslant n$, *to* $\mathbb{E}(X) = \frac{an}{a+b}$ *i* $Var(X) = \frac{abn(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$.

2 Rozkłady ciągłe

Przykłady zmiennych losowych (rozkładów) ciągłych.

Uwaga 4. *Zmienne losowe ciągłe i rozkłady ciągłe są scharakteryzowane przez swoją gęstość.*

Definicja 2. *Indykatorem zbioru* A *nazywamy funkcję* $\mathbb{I}_A \colon A \to \mathbb{R}$ *zadaną wzorem*

$$\mathbb{I}_A(r) := \begin{cases} 1 & gdy\ r \in A \\ 0 & gdy\ r \notin A \end{cases}.$$

[1] Jest to szczególny przypadek rozkładu ujemnego dwumianowego.

Przykład 15. *Niech $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a < b$. Rozkład o gęstości*

$$f(r) := \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{]a,b[}(r) \tag{13}$$

nazywamy rozkład równomierny na odcinku $]a, b[$ i oznaczamy $\mathcal{U}(]a, b[)$.

Przykład 16. *Niech $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Rozkład o gęstości*

$$f(r) := \lambda e^{-\lambda r} \mathbb{I}_{]0,\infty[}(r) \tag{14}$$

nazywamy rozkładem wykładniczym z parametrem λ i oznaczamy $Exp(\lambda)$.

Przykład 17. *Niech $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Rozkład o gęstości*

$$f(r) := \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda |r|} \tag{15}$$

nazywamy rozkładem Laplace'a z parametrem λ i oznaczamy $L(\lambda)$.

Przykład 18. *Niech $a \in \mathbb{R}$ oraz $b \in \mathbb{R}_+$. Rozkład o gęstości*

$$f(r) := \frac{1}{\pi} \frac{b}{b^2 + (r-a)^2} \tag{16}$$

nazywamy rozkładem Cauchy'ego z parametrami a, b i oznaczamy $Cauchy(a, b)$.

Przykład 19. *Niech $m \in \mathbb{R}$ oraz $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Rozkład o gęstości*

$$f(r) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(r-m)^2}{2\sigma^2} \right\} \tag{17}$$

nazywamy rozkładem normalny lub rozkładem Gaussa, z parametrami m, σ i oznaczamy $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

Przykład 20. *Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Rozkład o gęstości*

$$f(r) := \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} r^{\alpha-1} e^{-\beta r} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(r) \tag{18}$$

nazywamy rozkładem gamma z parametrami α, β i oznaczamy $\Gamma(\alpha, \beta)$.

Uwaga 5. *Gęstość rozkładu gamma można też zdefiniować następująco:*
Niech $\kappa, \theta \in \mathbb{R}_+$.

$$f(r) := \frac{1}{\theta^\kappa \Gamma(\kappa)} r^{\kappa-1} e^{-\frac{r}{\theta}} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(r). \tag{19}$$

Oznaczenie $\Gamma(\kappa, \theta)$.

Uwaga 6. *α występujące w definicji 20 jest parametrem kształtu, a β natężenia. Natomiast κ w uwadze 5 jest jest parametrem kształtu, a θ skali.*

Uwaga 7. *Rozkład wykładniczy z parametrem λ jest rozkładem gamma z parametrami kształtu 1 i skali $\frac{1}{\lambda}$.*

Przykład 21 (Rozkład chi-kwadrat z n stopniami swobody.)**.** *Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozkład gamma z parametrami z parametrem kształtu $\frac{n}{2}$ i skali 2 nazywamy rozkładem chi-kwadrat o n-stopniach swobody.*
Oznaczenie $\chi^2(n)$.

Przykład 22. *Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Rozkład o gęstości*

$$f(r) := \frac{1}{B(\alpha, \beta)} r^{\alpha-1} (1-r)^{\beta-1} \mathbb{I}_{[0,1]}(r) \tag{20}$$

nazywamy rozkładem beta z parametrami α, β i oznaczamy $Beta(\alpha, \beta)$.

Uwaga 8. *Mamy*

$$B(p, q) := \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Przykład 23. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozkład o gęstości*

$$f(r) := \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{r^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \tag{21}$$

nazywamy rozkładem t-Studenta z n stopniami swobody i oznaczamy $t(n)$.

Uwaga 9. *Rozkład t-Studenta $t(1)$ jest rozkładem Cauchy'ego $Cauchy(0, 1)$.*

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennych ciągłych.

Przykład 24. *Niech* $a, b \in \mathbb{R}$ *oraz* $a < b$*. Jeżeli* $X \sim \mathcal{U}(]a, b[)$*, to* $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ *i* $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$*.*

Przykład 25. *Niech* $\lambda \in \mathbb{R}_+$*.*

1. *Jeżeli* $X \sim Exp(\lambda)$*, to* $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ *i* $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$*.*
2. *Jeżeli* $X \sim L(\lambda)$*, to* $\mathbb{E}(X) = 0$ *i* $Var(X) = \frac{2}{\lambda^2}$*.*

Przykład 26. *Niech* $a \in \mathbb{R}$ *oraz* $b \in \mathbb{R}_+$*. Jeżeli* $X \sim Cauchy(a, b)$*, to* X *nie posiada wartości oczekiwanej, a więc i wariancji.*

Przykład 27. *Niech* $m \in \mathbb{R}$ *oraz* $\sigma \in \mathbb{R}_+$*. Jeżeli* $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$*, to* $\mathbb{E}(X) = m$ *i* $Var(X) = \sigma^2$*.*

Przykład 28. *Niech* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$*. Jeżeli* $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$*, to* $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}$ *i* $Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$*.*
Niech $\kappa, \theta \in \mathbb{R}_+$*. Jeżeli* $X \sim \Gamma(\kappa, \theta)$*, to* $\mathbb{E}(X) = \kappa\theta$ *i* $Var(X) = \kappa\theta^2$*.*

Przykład 29. *Niech* $p, q \in \mathbb{R}_+$*. Jeżeli* $X \sim Beta(p, q)$*, to* $\mathbb{E}(X) = \frac{p}{p+q}$ *i* $Var(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$*.*

Przykład 30. *Niech* $n \in \mathbb{N}$*.*

1. *Jeżeli* $X \sim \chi^2(n)$*, to* $\mathbb{E}(X) = n$ *i* $Var(X) = 2n$*.*
2. *Jeżeli* $X \sim t(n)$*, to dla* $n > 1$ *istnieje wartość oczekiwana* X *i* $\mathbb{E}(X) = 0$*. Jeżeli natomiast* $n > 2$*, to istnieje wariancja i* $Var(X) = \frac{n}{n-2}$*.*