Statystyka matematyczna - wykład trzeci[1]
Podstawy teorii estymacji.
Estymacja przedziałowa.
kierunek: informatyka i ekonometria I°

dr Jarosław Kotowicz

Instytut Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku

Spis treści

1. Estymacja przedziałowa
   - Przedział ufności dla wartości oczekiwanej
   - Przedział ufności dla wariacji σ^2
   - Przedział ufności dla frakcji (wskaźnika struktury)

2. Problem minimalizacji próby w estymacji przedziałowej

3. Podsumowanie

Wstęp. I

Rozważamy

1. ustalone populację i cechę w tej populacji, która ma rozkład o dystrybuancie F zależnej od pewnego parametru θ ze zbioru parametrów Θ,
2. pewne (znane) funkcje $\gamma\colon \Theta \to \mathbb{R}$,
3. model statystyczny $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$.

Estymacja przedziałowa, to metoda służącą do oszacowania przedziału liczbowego, który prawdopodobnie zawiera wartość szacowanej (nieznanej) wielkości $\gamma(\theta)$ dla każdej wartości parametru θ.

Wstęp. II

Uwaga

1. *Przedział ten nazywa się przedziałem ufności.*[a]
2. *Przedziały ufności dla nieznanych wielkości (różnych funkcji γ) buduje się na podstawie rozkładu estymatorów tych wielkości.*
3. *Do wyznaczenia przedziałów ufności wykorzystuje się dokładny rozkład estymatora (rozkład ustalony na podstawie znajomości rozkładu zmiennej w populacji, z której losowana jest próba) lub rozkład graniczny (rozkład do którego dąży estymator w miarę wzrostu liczebności próby do nieskończoności).*

[a] Twórcą pojęcia „*przedział ufności*” był statystyk polskiego pochodzenia Jerzy Spława-Neyman.

Pojęcie przedziału ufności i jego interpretacja. I

Definicja

Niech dane będą liczba α *z przedziału* $]0,1[$*, próba losowa* $X_1,\ldots,X_n \sim_{iid} F(\cdot;\theta)$ *oraz funkcja* γ *nieznanego parametru* θ*. Rozważmy dwie statystyki* $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}(X_1,\ldots,X_n)$ *i* $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}(X_1,\ldots,X_n)$*. Mówimy, że przedział* $]\underline{\gamma};\overline{\gamma}[$ *jest przedziałem ufności dla* $\gamma(\theta)$ *na poziomie ufności* $1-\alpha$*, jeżeli*

$$P_\theta(\{\underline{\gamma}(X_1,\ldots,X_n) < \gamma(\theta) < \overline{\gamma}(X_1,\ldots,X_n)\}) \geqslant 1-\alpha$$

dla każdego θ*.*

Wtedy liczbę $1-\alpha$ nazywamy współczynnikiem (poziomem) ufności.

Pojęcie przedziału ufności i jego interpretacja. II

Uwaga

W przypadku, gdy rodzina rozkładów $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ *składa się z rozkładów ciągłych, to wówczas możemy żądać, aby był spełniony warunek*

$$P_\theta(\{\underline{\gamma}(X_1, \ldots, X_n) < \gamma(\theta) < \overline{\gamma}(X_1, \ldots, X_n)\}) = 1 - \alpha$$

dla każdego θ*.*

Interpretacja

Przy wielokrotnym pobieraniu prób losowych n elementowej i wyznaczeniu na ich podstawie przedziału $]\underline{\gamma}(X_1, \ldots, X_n), \overline{\gamma}(X_1, \ldots, X_n)[$ *średnio* $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ *przedziałów pokryje nieznaną wartość* $\gamma(\theta)$ *tzn. wartość* $\gamma(\theta)$ *będzie należała do tego przedziałów, a* $\alpha \cdot 100\%$ *tej wartości nie pokryje.*

Pojęcie przedziału ufności i jego interpretacja. III

W zastosowaniach praktycznych oznacza to, iż mamy $(1-\alpha)\cdot 100\%$ ufności, że wyznaczony na podstawie próby przedział będzie „*pokrywał*" szacowaną wielkość $\gamma(\theta)$.

Uwaga

1. *Poziom ufności* $1-\alpha$ *jest bliski jedności.*
2. *Zwykle poziom ufności przyjmuje się na poziomie 0,9; 0,95; 0,98; 0,99.*

Podstawą konstrukcji przedziału ufności dla danej wielkości $\gamma(\theta)$ jest „*dobry*" estymator tego parametru - tj. nieobciążony lub asymptotycznie nieobciążony, zgodny, najefektywniejszy lub asymptotycznie najefektywniejszy.
I tak będziemy wykorzystywać do konstrukcji przedziału ufności w przypadku

Pojęcie przedziału ufności i jego interpretacja. IV

1. wartości przeciętnej – średnią arytmetyczną z próby,
2. wariancji σ^2 – odpowiednią wariancję z próby,
3. frakcji (prawdopodobieństwa p) – częstość wystąpienia danego zdarzenia.

Sposób konstrukcji przedziału ufności związany jest z rozkładem odpowiedniego estymatora. Rozkład ten jest zależny od założeń dotyczących rozkładu cechy w zbiorowości generalnej oraz od liczebności próby.

Uwaga

Dla jednej wielkości $\gamma(\theta)$ mogą występować różne postacie przedziałów ufności.

Błędy estymacji przedziałowej. I

Definicja

Połowa długości przedziału ufności parametru $\gamma(\theta)$ jest nazywana bezwzględnym błędem losowym lub maksymalnym błędem szacunku, jaki popełniamy, szacując przedziałowe parametr $\gamma(\theta)$ za pomocą estymatora T_n, błąd ten oznaczamy przez d_{T_n}.
Natomiast

$$B(T_n) = \frac{d_{T_n}}{T_n} \cdot 100\%$$

nosi nazwę względnego błędu losowego lub względnej precyzji.

Definicja

Dokładnością estymacji przedziałowej nazywamy długość przedziału ufności.

Błędy estymacji przedziałowej. II

Uwaga

1. *Oszacowanie wielkości $\gamma(\theta)$ za pomocą przedziału ufności jest tym lepsze, im mniejszy jest ten błąd.*
2. *Praktycznie przyjmuje się, że przy względnym błędzie losowym wynoszącym do 5% wnioskowanie statystyczne jest całkowicie „bezpieczne". Jeśli błąd ten jest powyżej 5%, lecz nie przekracza 10%, rezultaty oszacowania są wątpliwe, a przy błędzie powyżej 10% wnioskowanie jest całkowicie niepewne. W tym ostatnim przypadku należy bądź zwiększyć próbę, bądź przyjąć mniejszy poziom ufności. Jest to szczególnie ważne przy szacowaniu prawdopodobieństwa sukcesu p.*
3. *Chcemy, aby długość przedziału ufności była jak najmniejsza.*

O czym będzie na dalszej części wykładu

Będziemy budować i rozważać przedziały ufności w następujących sytuacjach

1. Przedział ufności dla wartości oczekiwanej w populacji
   1. normalnej ze znanym odchyleniem standardowym,
   2. normalnej z nieznanym odchyleniem standardowym,
   3. o nieznanym rozkładzie i znanym odchyleniu standardowym,
   4. o nieznanym rozkładzie i nieznanym odchyleniu standardowym.
2. Przedział ufności dla wariacji dla populacji normalnej o nieznanych wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego.
3. Przedział ufności dla frakcji w rozkładzie Bernoulliego.

Spostrzeżenie

Estymatorem wartości oczekiwanej jest średnią z próby tzn.

$$\widehat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}.$$

Wiemy, że średnia z próby jest estymatorem zgodnym, nieobciążonym, najefektywniejszym i dostatecznym parametru m.
Stanowi więc ona podstawę konstrukcji przedziału ufności dla tego parametru. Stąd wiadomo, przy podanych wyżej założeniach, niezależnie od liczebności próby, czyli zarówno dla prób małych, jak i dużych, rozkład średniej arytmetycznej z próby jest rozkładem normalnym z parametrami m i $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Populacja normalna ze znanym odchyleniem standardowym. I

Rozkład cechy jest rozkładem $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Przyjmijmy oznaczenie $\theta = (m, \sigma)$.

Rozważmy średnią z próby $\overline{X}$. Dokonując standaryzacji zmiennej losowej $\overline{X}$ tzn.

$$U = \frac{\overline{X} - m}{\sigma}\sqrt{n}$$

otrzymujemy

$$P_\theta(\{|U| < u_\alpha\}) = 1 - \alpha.$$

Stąd przekształcając wyrażenie $\left|\frac{\overline{X}-m}{\sigma}\sqrt{n}\right| < u_\alpha$ mamy

$$P_\theta\left(\left\{\overline{X} - \frac{u_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + \frac{u_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 1 - \alpha, \qquad (1)$$

gdzie liczba rzeczywista u_α jest taka, że $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Populacja normalna ze znanym odchyleniem standardowym. II

Uwaga

Zauważmy, że u_α *jest kwantylem rzędu* $1 - \frac{\alpha}{2}$.

Populacja normalna z nieznanym odchyleniem standardowym. I

Rozkład cechy jest rozkładem $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Przyjmijmy oznaczenie $\theta = (m, \sigma)$.
Jak już powiedzieliśmy estymatorem parametru m jest średnia z próby, której rozkład nie może być wyznaczony z powodu nieznajomości odchylenia standardowego σ.
Statystyką, którą tu stosujemy jest statystyka t-Studenta tzn.

$$T = \frac{\overline{X} - m}{S}\sqrt{n-1} \quad \text{lub} \quad T = \frac{\overline{X} - m}{\tilde{S}}\sqrt{n}.$$

Otrzymujemy

$$P_\theta\left(\left\{\overline{X} - \frac{t_{\alpha,n-1}S}{\sqrt{n-1}} < m < \overline{X} + \frac{t_{\alpha,n-1}S}{\sqrt{n-1}}\right\}\right) = 1 - \alpha, \tag{2}$$

$$P_\theta\left(\left\{\overline{X} - \frac{t_{\alpha,n-1}\tilde{S}}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + \frac{t_{\alpha,n-1}\tilde{S}}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 1 - \alpha, \tag{3}$$

Populacja normalna z nieznanym odchyleniem standardowym. II

gdzie $t_{\alpha,n-1}$ jest takie, że $P_\theta(\{|T| < t_{\alpha,n-1}\}) = 1 - \alpha$.

Uwaga

1. *Podobnie, jak w poprzednim wypadku $t_{\alpha,n-1}$ jest kwantylem rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$.*
2. *Dla $n > 120$ wartości $t_{\alpha,n-1}$ zastępuje się u_α.*
3. *Zwykle długość przedziału w przypadku znanego odchylenia standardowego jest mniejsza niż w przypadku, gdy odchylenie standardowe nie jest znane.*

Populacja o nieznanym rozkładzie, ale znanym odchyleniem standardowym

Rozkład graniczny estymatora wartości oczekiwanej ma rozkład normalnym.
W związku z tym przybliżamy średnią z próby rozkładem normalnym parametrami m i $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Dokonując standaryzacji tak, jak w pierwszym przypadku otrzymujemy

$$P_\theta\left(\left\{\overline{X}-\frac{u_\alpha\sigma}{\sqrt{n}}<m<\overline{X}+\frac{u_\alpha\sigma}{\sqrt{n}}\right\}\right)=1-\alpha, \tag{4}$$

dla dostatecznie dużych n tj. dla $n>120$. Oznaczyliśmy $\theta=(m,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Populacja o nieznanym rozkładzie z nieznanym odchyleniem standardowym

Dla $n > 120$ przyjmujemy $\sigma = S$ i sprowadzamy do ostatniego przypadku. Otrzymujemy

$$P_\theta\left(\left\{\overline{X} - \frac{u_\alpha S}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + \frac{u_\alpha S}{\sqrt{n}}\right\}\right) \approx 1 - \alpha. \tag{5}$$

Ponownie oznaczyliśmy $\theta = (m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Uwaga

Jeżeli próba jest mała, to nie możemy wyznaczyć przedziału ufności dla średniej.

Spostrzeżenia. I

Uwaga

1. *Przy zadanym poziomie ufności* $1 - \alpha$ *im większa jest liczebność, tym krótszy jest przedział ufności.*
2. *Przy ustalonej liczebności próby wraz ze wzrostem poziomu ufności rośnie rozpiętość (długość) przedziału ufności.*
3. *Im krótszy przedział, tym mniejszy błąd szacunku, co oznacza większy dokładność (precyzję) oszacowania.*

Spostrzeżenia. II

Przykład

Zakładając, że kwartalne wydatki na reklamę można uznać za cechę o rozkładzie $\mathcal{N}(m, \sigma)$, wylosowano do próby 100 zakładów usługowych i otrzymano następujący rozkład wydatków na reklamę:

Kwartalne wydatki	0-5	5-10	10-15	15-20
Liczba zakładów	10	20	40	30

- *Wyznacz na poziomie ufności* $1 - \alpha = 0{,}96$ *przedział ufności dla przeciętych kwartalnych wydatków na reklamę.*
- *Jaka będzie dokładność oszacowania, gdy poziom ufności będzie równy 0,9?*

Założenia

Uwaga

Przedział ufności dla wariancji można wyznaczyć tylko wówczas, gdy cecha X charakteryzująca zbiorowość generalną ma rozkład normalny $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

Estymatorem wariancji jest wariancja z próby wyrażona jednym ze wzorów

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \tag{6}$$

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \tag{7}$$

$$\dot{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2, \qquad \text{gdy znane jest } m. \tag{8}$$

Populacja normalna o znanej wartości oczekiwanej

Statystyką, którą tu stosujemy jest statystyka chi-kwadrat o n stopniach swobody tzn.

$$\chi^2 = \frac{n\dot{S}^2}{\sigma^2}.$$

Mamy wtedy

$$P_\theta(\{\chi^2 \geqslant \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}\}) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{oraz} \quad P_\theta(\{\chi^2 \geqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}\}) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

gdzie jak poprzednio $\theta = (m, \sigma)$. Otrzymujemy wtedy

$$P_\theta\left(\left\{\frac{n\dot{S}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}} < \sigma^2 < \frac{n\dot{S}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}}\right\}\right) = 1 - \alpha. \tag{9}$$

Populacja normalna o nieznanej wartości oczekiwanej. I

Statystyką, którą tu stosujemy jest statystyka chi-kwadrat o $n-1$ stopniach swobody tzn.

$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}.$$

Analogicznie, jak poprzednio mamy

$$P_\theta(\{\chi^2 \geqslant \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}\}) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{oraz} \quad P_\theta(\{\chi^2 \geqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

oraz

$$P_\theta\left(\left\{\frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right\}\right) = 1-\alpha. \tag{10}$$

Populacja normalna o nieznanej wartości oczekiwanej. II

Uwaga

Można również wykorzystać statystykę

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\tilde{S}^2}{\sigma^2},$$

która ma również $n-1$ stopni swobody.

Przykład ([1, Przykład 8.10])

Zakładamy, że czas pracy żarówek produkowanych ma rozkład $\mathcal{N}(750, \sigma)$. Na podstawie 16 elementowej próby losowej otrzymano $\dot{s}^2 = 2500$. Wyznaczymy 98-procentowy przedział ufności dla odchylenia standardowego czasu pracy żarówek.

ROZWIĄZANIE.

Populacja normalna o nieznanej wartości oczekiwanej. III

Najpierw wyznaczamy przedział ufności dla wariancji σ^2 na poziomie ufności $1-\alpha = 0{,}98$ (m jest znane i $n < 30$). Ponieważ szukamy

$$\chi^2_{0{,}99;16} \quad \text{i} \quad \chi^2_{0{,}01;16},$$

więc z tablic rozkładu χ^2 mamy

$$\chi^2_{0{,}99;16} = 5{,}812 \quad \text{i} \quad \chi^2_{0{,}01;16} = 31{,}999.$$

Stad

$$35{,}36 < \sigma < 82{,}96.$$

Populacja normalna o nieznanej wartości oczekiwanej. IV

Uwaga

1. *Statystyka* S *ma rozkład asymptotycznie normalny o parametrach* $\mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}\right)$.
2. *Z ostatniej obserwacji wynika, że przedział ufności dla odchylenia standardowego, gdy* $n > 30$ *wyznaczamy z jednego ze wzorów*

$$\frac{S}{1+\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}} < \sigma < \frac{S}{1-\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}}$$

lub

$$\frac{\dot{S}}{1+\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}} < \sigma < \frac{\dot{S}}{1-\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}}$$

w zależności od tego, czy znana, czy też nieznana jest wartość oczekiwana m. *Natomiast* u_α *spełnia warunek* $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Przedział ufności frakcji (parametru p) w rozkładzie Bernoulliego. I

Uwaga

Stosujemy, gdy liczebność próbki wynosi co najmniej 100.

Stosujemy statystykę $\hat{p} = \frac{X}{n}$, gdzie X jest ilością wystąpień sukcesów w próbie n elementowej.
Rozkładem granicznym tej statystyki jest rozkład normalny
$\mathcal{N}\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.
Dokonując jego standaryzacji, wykorzystując rozkład normalny oraz zastępując $\frac{p(1-p)}{n}$ przez $\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$ otrzymujemy

$$P\left(\left\{\hat{p} - u_\alpha\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + u_\alpha\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right\}\right) \approx 1-\alpha, \qquad (11)$$

Przedział ufności frakcji (parametru p) w rozkładzie Bernoulliego. II

gdzie jak poprzednio u_α spełnia warunek $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Spis treści

1. Estymacja przedziałowa
   - Przedział ufności dla wartości oczekiwanej
   - Przedział ufności dla wariacji σ^2
   - Przedział ufności dla frakcji (wskaźnika struktury)
2. Problem minimalizacji próby w estymacji przedziałowej
3. Podsumowanie

Motywacja i uwagi

Cel – kształtowanie warunków estymacji przedziałowej, aby otrzymać oszacowanie o żądanej dokładności przy jak najmniejszej próbie.
Rozpatrywać będziemy następujące problemy:

1. minimalizacja liczebności próby w estymacji przedziałowej wartości średniej w populacji o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m, \sigma)$ cechy ze znanym odchyleniem standardowym,
2. minimalizacja liczebności próby w estymacji przedziałowej frakcji w populacji o rozkładzie dwumianowym cechy.

Minimalizacja wielkości próby w estymacji przedziałowej wartości oczekiwanej w populacji normalnej. I

Mamy wtedy przedział ufności $\left]\overline{X} - \frac{u_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \frac{u_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}\right[$ o długości $\frac{2u_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}$ (dokładność estymacji przedziałowej).
Dokładnością estymacji przedziałowej zależy od

1. wartości parametru σ określającego rozproszenie,
2. poziomu ufności $1-\alpha$ określającego u_α,
3. liczebności próby.

Dokładność można modyfikować poprzez

- poziom współczynnika ufności,
- liczebność próby.

Minimalizacja wielkości próby w estymacji przedziałowej wartości oczekiwanej w populacji normalnej. II

Uwaga

1. *Przypomnijmy, że połowę długości przedziału ufności nazywamy maksymalnym błędem szacunku.*
2. *W przypadku pierwszym skracanie przedziału może powodować zmniejszenie prawdopodobieństwa pokrycia parametru. W przypadku drugim zakładamy, że* $\frac{u_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} \leqslant d$*, gdzie* d *jest zadaną z góry liczbą. Stąd* $n \geqslant \frac{u_\alpha^2 \sigma^2}{d^2}$.
3. *W przypadku, gdy odchylenie standardowe nie jest znane, to rozważamy nieobciążony estymator wariancji* $\tilde{S}^2$ *zamiast* σ^2 *oraz wyznaczamy wartość krytyczną* t_α *dla rozkładu* $t-$*Studenta o* $n-1$ *stopniach swobody zastępując nią* u_α*, gdzie* n *jest, jak zwykle, liczebnością próby.*

Minimalizacja wielkości próby w estymacji przedziałowej wartości oczekiwanej w populacji normalnej. III

Przykład ([1, Przykład 8.13])

Załóżmy, że rozkład wagi uczniów pierwszych klas można ująć jako $N(m, \sigma)$. Na podstawie 10-elementowej próby otrzymano $\tilde{s}^2 = 16$. Ilu uczniów należy wylosować do próby, aby oszacować przeciętną wagę z maksymalnym błędem 0,5 kg na poziomie ufności $1 - \alpha = 0{,}98$?

ROZWIĄZANIE.

Korzystając z tablic rozkładu t-Studenta, dla 9 stopni swobody i $\alpha = 0{,}02$ otrzymujemy

$$t_{0{,}02;9} = 2{,}821.$$

Stąd

$$n = \frac{(2{,}821)^2 \cdot 16}{(0{,}5)^2} = 509{,}3,$$

Minimalizacja wielkości próby w estymacji przedziałowej wartości oczekiwanej w populacji normalnej. IV

a więc $n = 510$.

Minimalizacja próby w estymacji przedziałowej frakcji w populacji o rozkładzie dwumianowym

Mamy wtedy przedział ufności $\left]\hat{p} - u_\alpha\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + u_\alpha\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$.

Analogicznie jak w punkcie pierwszym zakładamy, że $u_\alpha\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leqslant d$, gdzie d jest zadaną z góry liczbą.

Stąd $n \geqslant \frac{u_\alpha^2(1-p)p}{d^2}$.

Uwaga

Należy podkreślić, że jeżeli nie jest znany rząd wielkości parametru p, to ustalamy, że $p = \frac{1}{2}$.

Spis treści

1 Estymacja przedziałowa
- Przedział ufności dla wartości oczekiwanej
- Przedział ufności dla wariacji σ^2
- Przedział ufności dla frakcji (wskaźnika struktury)

2 Problem minimalizacji próby w estymacji przedziałowej

3 Podsumowanie

Eksperyment opisany w [2]. I

Rink Hoekstra, Richard D. Morey, Jeffrey N. Rouder i Eric-Jan Wagenmakers w swojej pracy [2] rozważali następujący kwestionariusz, który wypełniali studenci, doktoranci i pracownicy naukowi uczelni w Niderlandach (Holandia).
Badacz przeprowadza eksperyment i stwierdza *„95% przedział ufności dla średniej wynosi od 0,1 do 0,4”*.
Proszę zaznaczyć każde z poniższych stwierdzeń jako *„prawda”* lub *„fałsz”*. Fałsz oznacza, że stwierdzenie nie wynika logicznie z cytowanego wyniku.

1. Prawdopodobieństwo, że średnia w populacji jest większa niż 0, wynosi co najmniej 95%.
2. Prawdopodobieństwo, że średnia w populacji wynosi 0, jest mniejsze niż 5%.
3. *„Hipoteza zerowa”*, że średnia w populacji równa się 0, jest prawdopodobnie nieprawidłowa.

Eksperyment opisany w [2]. II

4. Istnieje 95% prawdopodobieństwa, że średnia w populacji leży między 0,1 a 0,4.
5. Możemy być w 95% pewni, że średnia w populacji mieści się między 0,1 a 0,4.
6. Jeśli powtarzamy eksperyment w nieskończenie wiele razy, to w 95% przypadków średnia w populacji mieści się w przedziale od 0,1 do 0,4.
7. Jeśli powtarzamy eksperyment w nieskończenie wiele razy, to w 95% przypadków przedziały ufności skonstruowane na podstawie próby zawierają średnią w populacji.

Podsumowanie. I

95%-owy przedział ufności mówi o tym, że jeżeli losowalibyśmy wielokrotnie próbę losową (tzn. nieskończenie wiele razy) i na za każdym razem na podstawie próby wyznaczalibyśmy przedział ufności dla szacowanego parametru, to średnio 95 takich przedziałów na 100 będzie zawierało prawdziwą wartość szacowanego parametru.

Uwaga

Przypuśćmy, że otrzymaliśmy na podstawie próby losowej 95% przedział ufności $]A, B[$ *dla parametru* $\gamma(\theta)$*. Wtedy należy pamiętać i wiedzieć, że w statystyce matematycznej klasycznej (częstotliwościowej) zachodzą poniższe stwierdzenia.*

1. Prawdziwa wartość szacowanego parametru $\gamma(\theta)$ jest wartością stała i nieznaną.

Podsumowanie. II

2. Prawdziwa wartość szacowanego parametru $\gamma(\theta)$ w populacji albo jest w tym przedziale, albo jej tam nie ma.
3. Przedział ufności nie mówi o tym, że na 95% prawdziwa wartość parametru $\gamma(\theta)$ jest gdzieś pomiędzy A a B.
4. Nie możemy odnosić się do parametru $\gamma(\theta)$ mówiąc o jakimkolwiek prawdopodobieństwie jego dotyczącym.
5. Nie możemy mówić, że na 95% wartość parametru w populacji zawiera się w jakimś przedziale.

Bibliografia

St. Ostasiewicz, Z. Rusnak i U. Siedlecka. *Statystyka. Elementy teorii i Zadania*. Wyd. 5 poprawione. Wrocław: Wyd. Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, 2003.

Hoekstra Rink i in. "Robust misinterpretation of confidence intervals". W: *Psychonomic Bulletin & Review* 21.5 (2014), s. 1157–1164. ISSN: 1069-9384 (Print) 1531-5320 (Online). DOI: 10.3758/s13423-013-0572-3.