Lista druga* †
Metody probabilistyczne i statystyka
kierunek: Informatyka, studia I°

dr Jarosław Kotowicz

wersja z dnia 2 marca 2020

1 Przestrzeń probabilistyczna i prawdopodobieństwo

Zadanie 1. *Rzucamy 3 razy monetą. Opisać przestrzeń probabilistyczną odpowiadającą temu doświadczeniu (co to są* Ω, Σ, P*?).*

Zadanie 2. *Rzucamy 5 kostkami do gry. Wypisać wszystkie zdarzenia elementarne. Czy możemy to zrobić w rozsądnym czasie. Jak inaczej opisać zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych?*

Zadanie 3. *Cyfry* $0, 1, 2, \ldots, 9$ *ustawiono losowo. Jakie jest prawdopodobieństwo, że*

a. *między 0 i 1 znajdują się dokładnie cztery cyfry?*

b. *7, 8 i 9 będą stały obok siebie?*

Zadanie 4. *Rzucamy dwiema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą.*

Zadanie 5. *W urnie są 2 kule białe i 4 czarne. Losujemy 2 kule bez zwracania. Co jest bardziej prawdopodobne, wyciągnięcie kul*

a. *tego samego koloru;*

b. *różnych kolorów?*

Zadanie 6. *W urnie znajdują się kule białe i czarne. Udowodnić, że prawdopodobieństwo wylosowania ze zwracaniem dwóch kul tego samego koloru jest nie mniejsze niż 0.5.*

Zadanie 7. *W* n *rozróżnialnych komórkach rozmieszczono losowo* r *nierozróżnialnych cząstek, zakładamy, że wszystkie możliwe rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne. Oblicz prawdopodobieństwo, że*

a. *ustalona komórka zawiera dokładnie* k *cząstek* ($k \leqslant r$)*;*

b. *dokładnie* m *komórek zostało pustych* ($m \leqslant n$)*;*

c. *w każdej komórce są co najmniej dwie cząstki* ($r \geqslant 2n$)*.*

Zadanie 8. *Na ile sposobów można* k *jednozłotówek i* m *pięciozłotówek rozmieścić w* n *ponumerowanych kasetkach?*

Zadanie 9. *Rzucamy* n *kostkami, obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia* n_1 *jedynek,* n_2 *dwójek,* $\ldots$ *,* n_6 *szóstek, gdzie* $\sum_{i=1}^{6} n_i = n$*.*

Zadanie 10. *Z 52 kart wylosowano 6. Jaka jest szansa, że wśród wylosowanych kart będą karty czerwone i czarne?*

Zadanie 11. *Z 52 kart losujemy 3. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kart jest przynajmniej jeden as.*

Zadanie 12. *Przy okrągłym stole usiadło dziesięć dziewcząt i dziesięciu chłopców. Jaka jest szansa, że osoby tej samej płci nie siedzą obok siebie? Jakie jest prawdopodobieństwo, że trzy ustalone osoby będą siedziały obok siebie?*

† Zadania 1–22, 70–82 i 123–140 pochodzą od dr U. Ostaszewskiej ze strony znajdującej się pod adresem http://math.uwb.edu.pl/%7Euostasze/rachiie16.html.

Zadanie 13. *W zbiorze 2n osób ($n \geqslant 1$) wyróżniono dwie. Czy bardziej prawdopodobne jest, że siadając losowo wokół stołu przy którym jest 2n miejsc, wyróżnione osoby znajdą się obok siebie, czy na przeciw?*

Zadanie 14. *Pięć zeszytów wrzucamy do trzech szuflad. Co jest bardziej prawdopodobne*

a. w pewnej szufladzie będą co najmniej trzy zeszyty;

b. co najmniej jedna szuflada będzie pusta?

Zadanie 15. *(problem roztargnionej sekretarki) Do n zaadresowanych kopert włożono w sposób losowy n listów do różnych adresatów. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że chociaż jeden list trafi do właściwej koperty. Wyznaczyć granicę tego prawdopodobieństwa gdy $n \to \infty$.*

Zadanie 16. *Rzucamy dwiema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma liczb równych wyrzuconym oczkom wynosi co najmniej 5.*

Zadanie 17. *Z 52 kart wylosowano 13. Jaka jest szansa, że wśród wylosowanych kart będą reprezentowane wszystkie wartości?*

Zadanie 18. *Ze zbioru liczb {1, 2, 3, ..., 150} losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej*

a. przez 10;

b. przez 4;

c. przez 10 i przez 4;

d. przez 10 lub przez 4.

Zadanie 19. *Ze zbioru $A = \{1, 2, 3, \dots, 102\}$ losujemy dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 3.*

Zadanie 20. *Winda rusza z siedmioma pasażerami i zatrzymuje się na 10 piętrach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy z pasażerów wysiądzie na innym piętrze?*

Zadanie 21. *Z urny zawierającej n kul, w tym 6 białych, losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo wylosowania dwóch białych kul będzie większe od 0.25?*

Zadanie 22. *Niech P_1 i P_2 będą prawdopodobieństwami określonymi na σ-ciele Σ podzbiorów Ω. Udowodnić, że funkcja*

$$P(A) = \frac{1}{3}P_1(A) + \frac{2}{3}P_2(A)$$

spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa.

2 Prawdopodobieństwo warunkowe, całkowite i wzór Bayesa

Zadanie 23. *W hurtowni znajdują się lodówki trzech fabryk A, B, C. Lodówki fabryki A stanowią 45% wszystkich lodówek w hurtowni, B 40%, reszta C. Wadliwość lodówek z każdej fabryk wynosi odpowiedni 0,1% 0,05% 0,02%. Wylosowano lodówkę, która okazała się wadliwa. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z fabryki A.*

Zadanie 24. *Na pewnym kierunku studiów skład grupy studenckiej przedstawiał się następująco: I grupa 14 studentek i 11 studentów, II 12 studentek i 12 studentów, III 17 studentek i 5 studentów. Z listy zawierającej spis wszystkich osób studiujących na tym kierunku wylosowano osobę, która okazała się studentką. Oblicz prawdopodobieństwo, że należy ona do grupy III.*

Zadanie 25. *Wiadomo, że 1 osoba na 38 spośród przekraczających (pewną) granicę przemyca narkotyki. Specjalnie wytresowany pies zatrzymuje co 27 osobę spośród nie przemycających narkotyków i przepuszcza (nie zatrzymuje) co 9 osobę spośród przemycających narkotyki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba, która przeszła przez granicę nie zatrzymana przez psa jest przemytnikiem narkotyków?*

Zadanie 26. *Z trzech klubów zaproponowano odpowiednio: 4, 6, 5 kandydatów do reprezentowania kraju w zawodach. Prawdopodobieństwa wygranej w zawodach dla zawodników kolejnych klubów wynoszą odpowiednio: 0,9 , 0,7 , 0,8. Wylosowany z grona kandydatów zawodnik wygrał. Z którego klubu najprawdopodobniej on pochodzi?*

Zadanie 27. *Mamy 5 urn: w 2 są po 2 kule białe i po 1 czarnej, w 1 10 kul czarnych, w pozostałych 2 są po 3 kule białe i po 1 czarnej. Losujemy urnę, a następnie z niej losujemy jedna kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie ona biała.*

Zadanie 28. *W pierwszej urnie znajduje się a białych i b czarnych kul. W drugiej b białych i a czarnych kul. Przenosimy jedną kulę z pierwszej urny do drugiej, a następnie wyciągamy kulę z drugiej urny. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest to biała kula.*

Zadanie 29. *Dane są dwie urny. I zawiera 5 kul białych i 3 czarne, a II 6 białych i 2 czarne. Z losowo wybranej urny wzięto kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie to kula czarna.*

Zadanie 30. *Mamy 5 urn typu A i 7 urn typu B. W każdej z urn typu A jest po 7 kul białych, 3 czarnych i 5 niebieskich, a w każdej z urn typu B: 4 białe, 4 czarne i 7 niebieskich. Z losowo wybranej urny wzięto dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kul różnokolorowych.*

Zadanie 31. *Dane są dwie urny. Jedna zawiera 17 kul białych i 2 czarne, druga 5 białych i 23 czarne. Rzucamy kostką do gry. Jeśli otrzymaliśmy co najwyżej dwa oczka to losujemy z urny pierwszej, jeśli 3,4,5 to z drugiej, a jeśli 6 to rzucamy kostką jeszcze raz. Jeśli w drugim losowaniu otrzymamy 1 lub dwójkę losujemy z urny I, w przeciwnym wypadku z urny II.*

- *Oblicz prawdopodobieństwo, że losując dwie kul z urny otrzymamy dwie kule jednakowych kolorów;*
- *Wylosowano dwie jednokolorowe kul. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodzą one z urny pierwszej.*

Zadanie 32. *W magazynie hurtowni znajdują się suszarki produkowane w trzech różnych zakładach A_1, A_2, A_3. Zapasy hurtowni stanowią odpowiednio $40\%, 35\%, 25\%$ produkcji zakładów A_1, A_2, A_3. Wiadomo, że zakłady produkują średnio $1\%, 2\%, 3\%$ braków. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo sprawdzona suszarka okaże się*

- *dobra;*
- *wybrakowana;*
- *Wylosowana suszarka okazała się dobra. Jakie jest prawdopodobieństwo, że została wyprodukowana w zakładzie A_2?*

Zadanie 33. *Treść zadania 32 z tym, że suszarki z każdego zakładu są składowane w oddzielnych pomieszczeniach. Rozwiąż zadanie przy takich założeniach.*

Zadanie 34. *W pudełku znajduję się 120 oporników A i 80 serii B. Losujemy jeden opornik. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to opornik wadliwy, jeżeli w serii A jest 4% wadliwych, a w B 5%.*

Zadanie 35. *W magazynach hurtowni znajdują się sanki produkowane przez fabryki A, B, C Zapasy stanowią odpowiednio 40%, 35% i 25%. Wiadomo, że zakładu produkują odpowiednio 1%, 2% oraz 3% braków. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania sanek dobrych.*

Zadanie 36 (Reguła łańcucha). *Niech*

$$\forall_{1\leqslant k\leqslant n-1}, P(\bigcap_{l=1}^{k} A_l) > 0.$$

Udowodnić, że

$$P(\bigcap_{l=1}^{n} A_l) = P(A_n/\bigcap_{l=1}^{n-1} A_l) \cdot P(A_{n-1}/\bigcap_{l=1}^{n-2} A_l) \cdot \ldots \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_1).$$

Zadanie 37. *W każdej z wyprodukowanej przez warsztat partii kłódek średnio 98 % jest dobra, a na każde 100 kłódek dobrych przypada średnio 75 kłódek I gatunku. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana kłódka jest I gatunku.*

Zadanie 38. *Strzelec trafia w tarczę z prawdopodobieństwem 0,9. Na każde 10 strzałów w sam środek trafia 2. Oblicz prawdopodobieństwo, że strzelając do tarczy strzelec trafi w sam środek.*

Zadanie 39. *Udowodnić następujące twierdzenie: Jeśli $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$, dla $i \neq j$ zachodzi $A_i \cap A_j = \emptyset, P(A_)> 0, P(B) > 0$, to dla dowolnego k zachodzi wzór: $P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$*

Zadanie 40. *Do dyspozycji są armaty: I z 1 pociskiem oraz II z 2 pociskami. Do zniszczenia są dwa cele: A i B. Prawdopodobieństwo trafienia w cel A z armaty I wynosi $p_I(A) = 0,8$. Analogicznie $p_I(B) = 0,75, p_{II}(A) = 0,5, p_{II}(B) = 0,35$. W przypadku trafienia w cel prawdopodobieństwa jego zniszczenia są równe odpowiednio: $P_I(A) = 0,4, P_I(B) = 0,5, P_{II}(A) = 0,5, P_{II}(B) = 0,6$. Jak wykorzystać armaty, aby prawdopodobieństwo zniszczenia obu celów było największe? Oblicz je.*

Zadanie 41. *Wiadomo, że w trakcie n rzutów monetą przynajmniej raz wypadł orzeł. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczba orłów jest większa lub równa 2.*

Zadanie 42. *Mamy dwie urny typu A_1 zawierające 3 białe i 7 czarnych kul, trzy urny typu A_2 zawierające 2 białe, 3 czarne i 5 zielonych kul oraz pięć urn typu A_3 zawierających 1 białą i 9 czarnych kul. Wyciągnięto kulę, która okazała się być biała. Jakiemu typowi urny odpowiada największe prawdopodobieństwo pochodzenia kuli i jaka jest jego wartość liczbowa?*

Zadanie 43. *Z partii przedmiotów, z których m jest dobrych i n wadliwych wybrano r sztuk. Przy kontroli okazało się, że pierwszych k spośród r wybranych jest dobrych. Oblicz prawdopodobieństwo, że następny przedmiot będzie dobry.*

Zadanie 44. *Wylosowany kamień domina okazał się nie być podwójnym (tzn. na jego połowach są różne ilości oczek). Jakie jest prawdopodobieństwo, że następny dobrany losowo spośród pozostałych będzie można do niego przystawić?*

Zadanie 45. *Partia towaru liczy N sztuk. Weryfikacja jakości odbywa się w ten sposób, że po wykryciu wadliwych k sztuk w próbie n elementów partia taka będzie odrzucona,*
$(1 < k < n < N)$. *Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że partia zawierająca n wadliwych sztuk będzie przyjęta.*

Zadanie 46. *Wykaż, że jeśli $P(A) = a, P(B) = b$, gdzie $b \neq 0$, to $P(A \mid B) \geqslant 1 - \frac{1-a}{b}$.*

Zadanie 47. *Zbadaj, dla jakich zdarzeń A, B spełniony jest warunek $P(A) = P(A \mid B) + P(A \mid B')$.*

Zadanie 48. *Danych jest k_1 urn zawierających po m_1 kul białych i n_1 kul czarnych oraz k_2 urn zawierających po m_2 kul białych i n_2 kul czarnych. Z losowo wybranej urny wylosowano kulę która okazała się biała. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kula ta pochodzi z jednej z urn typu pierwszego.*

Zadanie 49. *Rzucamy dwoma jednorodnymi kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 3, jeśli wiadomo, że na jednej kostce było jedno oczko.*

Zadanie 50. *W urnie znajduje się 6 kul białych i 6 czarnych. Losujemy bez zwracania 2 kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano za drugim razem kulę czarną, jeśli wiadomo, że za pierwszym razem wylosowano kulę białą.*

Zadanie 51. *W szkole liczącej 800 uczniów przeprowadzono ankietę z której wynikało, że 300 uczniów ma problemy z matematyką. Na 100 uczniów mających kłopoty z matematyką było 10 z ocena niedostateczna z tego przedmiotu. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybierając jednego ucznia będzie on miał ocenę niedostateczną z matematyki.*

Zadanie 52. *Wśród bliźniąt 64% to bliźnięta tej samej płci. Oblicz prawdopodobieństwo, że drugie z bliźniąt jest dziewczynką pod warunkiem, że*

- *pierwsze jest dziewczynką;*
- *pierwsze jest chłopcem,*

jeśli wiadomo, że prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi 51%.

Zadanie 53. *Trzy fabryki A, B, C dostarczają uszczelki do magazynu w stosunku ilościowym 3:2:4. Fabryka A produkuje średnio 5% braków, B 2%, zaś C 3%. Losujemy z magazynu jedną uszczelkę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dobrej.*

Zadanie 54. *Dane są dwie urny. I zawiera 4 kule białe, 5 kul czarnych i 3 niebieskie, a II 2 białe, 4 czarne i 2 kule niebieskie. Rzucamy symetryczną monetą. Jeśli wypadł orzeł to losujemy z urny I, w przeciwnym wypadku z urny II. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy kule czarną.*

Zadanie 55. *Dane są dwie urny. I zawiera 6 kul białych i 4 czarne, a II 5 białych i 5 kul czarnych. Rzucamy raz jednorodną kostką do gry, Jeśli wypadły co najmniej 4 oczka losujemy 2 kule z urny I, w przeciwnym wypadku z urny II. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy dwie kule białe.*

Zadanie 56. *Strzelec A trafia do tarczy 8 razy na 10, zaś B 9 razy na 10. Sędzia rzuca dwoma symetrycznymi monetami. Jeśli wypadnie co najmniej jeden orzeł, to strzela A, w przeciwnym wypadku B. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia w tarczę.*

Zadanie 57. *W grupie uczniów, którzy mają przystąpić doustnego egzaminu maturalnego z matematyki znajdują się uczniowie z trzech klas czwartych $a, , b, c$. Wiadomo iż uczniowie klasy a stanowiący 10% całej grypy umieją odpowiedzieć na wszystkie pytania. Uczniowie klasy b stanowiący 30% grupy umieją odpowiedzieć na 50% pytań, zaś uczniowie klasy c tylko na 25% wszystkich pytań. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczeń odpowie na zadane pytanie.*

Zadanie 58. *Do sklepu dostarczono żarówki w 12 pudłach mających normę minimum 2000 godzin świecenia. 4 pudła z fabryki I produkującej średnio 60% żarówek zgodnych z normą, 5 pudeł z fabryki II produkującej średnio 72% żarówek zgodnych z normą, reszta z fabryki III, w której produkuję się 80% żarówek zgodnych z normą.*

- *Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że losując trzy żarówki z pudeł fabryk II lub III otrzymamy dokładnie dwie zgodne z normą;*

- *Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że losując jedną żarówkę z pudeł fabryk II lub III otrzymamy zgodną z normą;*
- *Kupiono żarówkę, która nie spełnia normy. Oblicz prawdopodobieństwo,że pochodzi ona z fabryki I.*

Zadanie 59. *Trzy fabryki A, B, C dostarczają na rynek ubiory pokrywając odpowiednio 45% , 20% i 30% zapotrzebowania Gatunek I stanowi odpowiednio 80%, 60% oraz 90% produkcji fabryk. Oblicz jaki procent ubiorów znajdujących się na rynku stanowią ubiory gatunku I.*

Zadanie 60. *Zakłady Z_1, Z_2, Z_3 produkują igły w ilościach odpowiednio równych 20000, 15000 i 25000 sztuk. Wiadomo, że zakłady te produkują odpowiednio 0,3 %, 0,2 % i 0,4 % braków. Produkcja zakładów gromadzona jest w trzech oddzielnych pomieszczeniach. Wylosowano jedną igłę, która okazała się brakiem. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z zakładu Z_1.*

Zadanie 61. *Dane są dwie urny zawierające odpowiednia m_1 i m_2 kul białych oraz n_1 i n_2 kul czarnych. Z każdej z urn losowana jest jedna kula, a następnie z wylosowanych kul wybierana jest jedna z nich. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymamy kulę białą?*

Zadanie 62. *W przędzalni zakładów bawełnianych znajduje się 200 przędzarek trzech różnych typów: 100 typu A, 60 typu B i 40 typu C. Każda z maszyn produkuje taką samą ilość przędzy danego gatunku, a ilość przędzy dla odpowiednich typów maszyn A,B,C wynoszą odpowiednio 87,5 % - I gatunek, 8,7 % - II gatunek, 1,7 % -III gatunek, reszta braki; 92,4 % - I gatunek, 6,2 % - II gatunek, 0,9 % -III gatunek, reszta braki; 90,8 % - I gatunek, 7,1 % - II gatunek, 1,2 % -III gatunek, reszta braki;*

- *Oblicz prawdopodobieństwo, że pobrana losowo cewka z przędzarki typu B będzie poniżej II gatunku;*
- *Losujemy 2 cewki z przędzarki typu A. Oblicz prawdopodobieństwo, że obie będą I gatunku;*
- *Losujemy po jednej cewce z przędzarki każdego typu. Oblicz prawdopodobieństwo, że wszystkie będą brakami.*

Zadanie 63. *W hurtowni znajdują się lodówki trzech fabryk A, B, C. Lodówki fabryki A stanowią 45% wszystkich lodówek w hurtowni, B 40%, reszta C. Wadliwość lodówek z każdej fabryk wynosi odpowiedni 0,1% 0,05% 0,02%. Wybieramy losowo jedną lodówkę. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie ona dobra.*

Zadanie 64. *Dane z poprzedniego zadania. Wylosowano lodówkę, która okazała się wadliwa. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z fabryki A.*

Zadanie 65. *W magazynie znajdują się identyczne towary trzech fabryk A, B, C w ilościach równych odpowiednio A - 45%, B - 40%, C - 15%. Wadliwość towaru z każdej fabryk wynosi odpowiedni 0,1% 0,2% 0,3%. Wybraliśmy losowo jedną sztukę towaru, która okazała się dobra. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z fabryki C.*

Zadanie 66. *Dane są dwie urny A i B. Urna A zawiera 17 kul białych, 3 czarne i 4 niebieskie, zaś urna B 10 białych, 5 czarnych i 15 niebieskich. Rzucamy kostką do gry, a następnie losujemy dwie kule z urny z godnie z następującą regułą: Jeśli w pierwszym rzucie wypadły jedno lub dwa oczka losujemy z urny A, a jeśli 3,4,5 to z urny B. Natomiast gdy wypadło sześć oczek, to rzucamy ponownie i dokonujemy losowania urny zgodnie z regułą podaną dla pierwszego rzutu kostką z tym, że w przypadku wyrzucenia 6 losujemy również z urny B. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul różnych kolorów.*

Zadanie 67. *W hurtowni znajdują się pralki z trzech zakładów Z_1, Z_2, Z_3. Pralki zakładu Z_1 stanowią 60% stanu magazynu hurtowni, Z_2 30%, a Z_3 10%. 90% pralek produkcji zakładu Z_1 stanowią pralki ze znakiem jakości Q, a w zakładach Z_2 i Z_3 stanowią odpowiednia 80% i 60%. W hurtowni kupiono jedną pralkę ze znakiem Q. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z zakładu Z_3.*

Zadanie 68. *W hurtowni znajdują się trzy pomieszczenia, w których składowane oddzielnie są lodówki z trzech fabryk A, B, C. Ilość lodówek z fabryki A wynosi 60%, z fabryki B 30%, a z C 10%. Średnio 0,2% lodówek z fabryki A jest wadliwa, z fabryki B 0,3%,a z C 0,1%. Losujemy jedną lodówkę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie ona sprawna.*

Zadanie 69. *Treść, jak w zadaniu 68. Wiemy, że wylosowano lodówkę wadliwą. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z fabryki C.*

3 Zadania różne

Zadanie 70. *Udowodnić, że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa.*

Zadanie 71. *Rzucamy dwie kości do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie* *a. równa 7, jeśli wiadomo, że różnica ich jest równa 3,*

b. nie mniejsza od 7, jeśli wiadomo, że różnica ich jest równa 3,

c. nie mniejsza od 7, jeśli wiadomo, że różnica ich jest mniejsza od 3.

Zadanie 72. *Rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka, jeśli na każdej kostce wypadła inna liczba oczek?*

Zadanie 73. *Z talii 8 kart – czterech króli i czterech asów – wybieramy losowo dwie karty. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybrano 2 asy, jeśli wiemy, że:*

a. wybrano co najmniej jednego asa,

b. wśród wybranych kart jest czerwony as,

c. wśród wybranych kart jest as trefl.

Zadanie 74. *Oblicz* $P(A|B)$, *gdy* $P(A') = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ *oraz* $P(B|A) = \frac{1}{2}$.

Zadanie 75. *Podać przykład zdarzeń A i B, dla których*

a. $P(A) \leqslant P(A|B)$;

b. $P(A) = P(A|B)$;

c. $P(A) \geqslant P(A|B)$.

Zadanie 76. *Wybieramy losowo jeden ze zbiorów* $A = \{1, 2, \ldots, 62\}$ *lub* $B = \{1, 2, \ldots, 124\}$. *Z wybranego zbioru losujemy liczbę x. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba $x^2 + 1$ jest podzielna przez 10.*

Zadanie 77. *Urna zawiera n kul białych i m kul czarnych. Losujemy jedną kulę, a następnie wrzucamy ją ponownie do urny dorzucając dodatkowo k kul białych, jeśli była to kula biała lub k kul czarnych, jeśli była czarna. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej z tak uzupełnionej urny.*

Zadanie 78. *Mamy 5 urn typu A i 7 urn typu B. W każdej z urn typu A jest po 7 kul białych, 3 czarnych i 5 niebieskich, a w każdej z urn typu B: 4 białe, 4 czarne i 7 niebieskich. Z losowo wybranej urny wzięto dwie kule.*

a. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kul różnokolorowych.

b. Wylosowano kule jednakowego koloru. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodziły z urny typu A.

Zadanie 79. *W pewnej fabryce maszyny typu A, B, C dają odpowiednio 25%, 35% i 40% produkcji danego wyrobu. Maszyny te produkują odpowiednio 5%, 4% i 2% braków.*

a. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano towar dobry.

b. Wylosowano towar dobry. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodzi on z maszyny B?

Zadanie 80. *Pewna choroba występuje w 0.2% ogółu ludności. Przygotowano test do jej wykrycia. Test daje wynik pozytywny u 97% chorych i 1% zdrowych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba jest chora, jeśli test tej osoby dał wynik pozytywny.*

Zadanie 81. *Rzucamy dwiema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej na jednej kostce wypadła szóstka, jeśli wiadomo, że suma otrzymanych oczek wynosi co najmniej 9?*

Zadanie 82. *Dane są dwie urny A i B. Urna A zawiera 17 kul białych, 3 czarne i 4 niebieskie, zaś urna B 10 białych, 5 czarnych i 15 niebieskich. Rzucamy kostką do gry, a następnie losujemy dwie kule z urny z godnie z następującą regułą:*

Jeśli w pierwszym rzucie wypadły jedno lub dwa oczka losujemy z urny A, a jeśli 3,4,5 to z urny B. Natomiast gdy wypadło sześć oczek, to rzucamy ponownie i dokonujemy losowania urny zgodnie z regułą podaną dla pierwszego rzutu kostką z tym, że w przypadku wyrzucenia 6 losujemy również z urny B. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul różnych kolorów.

Zadanie 83. *Na trzech kolejnych zmianach dokonuje się przeglądu technicznego 2 spośród 6 maszyn, które należy poddać temu przeglądowi. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu tych trzech zmian wszystkie maszyny zostały poddane przeglądowi, gdyby kolejne zmiany nie przekazywały sobie informacji.*

Zadanie 84. *Trzy ściany czworościanu zostały pomalowane na biało, czerwono i zielono zaś czwarta w pasy biało-czerwono-zielone. Doświadczenie polega na rzucaniu czworościanu na płaszczyznę i obserwowaniu koloru ściany, na którą upadł czworościan. Zdarzenia B, C, Z określono następująco*

B – czworościan upadł na ścianę białą,

C – czworościan upadł na ścianę czerwoną,

Z – czworościan upadł na ścianę zieloną.

Zadanie 85. *Średnio 20 mężczyzn na 100 i 15 kobiet na 100 ma grupę krwi 0. Z grupy osób w której jest 80 mężczyzn i 70 kobiet wylosowano jedna osobę. Okazało się, ze ma ona krew grupy 0. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze jest to kobieta?*

Zadanie 86. *Na 100 mężczyzn 5 nie rozróżnia kolorów, a na 100 kobiet 2 nie rozróżnia kolorów. Z grupy o jednakowej liczbie kobiet i mężczyzn wylosowano daltonistę. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze jest to mężczyzna?*

Zadanie 87. *W pewnej firmie są dwa telefony, każdy z nich jest zajęty z prawdopodobieństwem 0.7. Przy założeniu, że jeden z telefonów jest zajęty, drugi jest zajęty z prawdopodobieństwem 0.4. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze co najmniej jeden z nich będzie wolny?*

Zadanie 88. *Z przeprowadzonych badań wynika, ze 80% kobiet i 45% mężczyzn ogląda w telewizji programy typu „reality show". Z grupy złożonej z 1500 kobiet i 2000 mężczyzn wybrano losowo jedną osobę.*

a) *Jakie jest prawdopodobieństwo, ze wybrana osoba ogląda programy typu reality show?*

b) *Okazało się, ze wylosowana osoba ogląda programy typu „reality show". Jakie jest prawdopodobieństwo, ze jest to mężczyzn, a jakie ze jest kobieta?*

Zadanie 89. *W fabryce pewne detale produkowane są na trzech maszynach: A, B, C. Na maszynie A dziennie produkuje się 200 detali, z których 4% jest wadliwych, na maszynie B - 300 detali z których 5% jest wadliwych, natomiast na maszynie C - 400 detali, z których 2% jest wadliwych. Całodzienna produkcja składana jest w jednym pojemniku.*

a) *Jakie jest prawdopodobieństwo, ze wzięty z pojemnika w sposób losowy detal będzie wadliwy?*

b) *Wzięty z pojemnika w sposób losowy detal okazał się wadliwy. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze został on wyprodukowany na maszynie A?*

Zadanie 90. *Zenek uwielbia konkursy organizowane przez stację radiowe. prawdopodobieństwo wygrania koszulki w konkursie Radio Zet wynosi 0.2 Zakładając, ze oba konkursy są niezależne oblicz prawdopodobieństwo wygrania przez Zenka co najmniej jednej koszulki.*

Zadanie 91. *Każdy z dwu niezależnych systemów alarmowych działa z prawdopodobieństwem 0.9. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze oba zawiodą jednocześnie.*

Zadanie 92. *Firma ochrony mienia „Spokój" zainstalowała w domu pana Zenka instalację alarmową połączoną z siedzibą firmy. Przy próbie włamania alarm ten zadziała w 95% przypadków. Może się jednak zdarzyć i tak, ze alarm włączy się wtedy, gdy nie ma żadnego zagrożenia. Prawdopodobieństwo takiego fałszywego alarmu jest małe i wynosi 0.01. Biorą pod uwagę poziom zamożności pana Zenka oraz lokalizację jego domu, prawdopodobieństwo włamania oszacowano na 0.005. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze gdy włączy się alarm, naprawdę istnieje zagrożenie?*

Zadanie 93. *Produkowany wyrób może by zaklasyfikowany z jednakowym prawdopodobieństwem do jednej z trzech klas: I,II,III. Określamy zdarzenia – wylosowany wyrób będzie: I albo II klasy (zdarzenie A), I albo III klasy (zdarzenie B), II albo III klasy (zdarzenie C). Zbadać, czy zdarzenia A, B, C są:*

a) *niezależne parami,*

b) *niezależne zespołowo.*

Zadanie 94. *Pewien towar produkują 3 zakłady. Prawdopodobieństwo wyprodukowania przez te zakłady towaru pierwszej jakości wynosi odpowiednio 0.97, 0.90, 0.86. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, ze losowo wzięta sztuka towaru – spośród trzech sztuk pochodzących z różnych zakładów – jest pierwszej jakości.*

Zadanie 95. *Na przenośnik taśmowy trafiają jednakowe wyroby wytwarzane przez 3 automaty. Stosunek ilościowy produkcji automatów kształtuje się tak jak: 2:2:1. Poza tym wiadomo, ze automat pierwszy produkuje 85% wyrobów I gatunku, drugi – 80% I gatunku, trzeci – 90% I gatunku. Oblicz prawdopodobieństwo tego, ze losowo wzięty z przenośnika wyrób:*

a) *wyprodukowany został przez drugi automat,*

b) *jest wyrobem I gatunku wyprodukowanym przez drugi automat,* *c) jest wyrobem I gatunku,*

d) który okazał się I gatunku, jest wyprodukowany przez drugi automat.

Zadanie 96. *Mietek oszacował, ze prawdopodobieństwo umówienia się na randkę z Elą wynosi 0.5, natomiast prawdopodobieństwo umówienia się na randkę z Krysią wynosi 0.7, przy czym zdarzenia te są niezależne. Jakie jest prawdopodobieństwo ze Mietek umówi się randkę z przynajmniej jedną z dziewcząt?*

Zadanie 97. *Kazio dowiedział się, ze aby nie zostać wyrzuconym z egzaminu ustnego z rachunku prawdopodobieństwo trzeba odpowiedzieć poprawnie na przynajmniej jedno z trzech zadanych pytań (każde pytanie dotyczy innego działu). Z prowadzonych przez starszych kolegów Kazia obserwacji wynika, ze prawdopodobieństwo udzielenia poprawnej odpowiedzi na każde z pytań jest jednakowe i wynosi 1/3. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze Kazio nie zostanie wyrzucony z egzaminu?*

Zadanie 98. *Trzej strzelcy strzelają jednocześnie do tej samej tarczy. Pierwszy strzelec trafia w tarczę z prawdopodobieństwem 0.8, drugi z prawdopodobieństwem 0.6, a trzeci z prawdopodobieństwem 0.7. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń*

a) A – tarcza zostanie co najmniej raz trafiona,

b) B – tarcza zostanie dokładnie dwa razy trafiona.

4 Zgadnienie Bernoulliego itp.

Zadanie 99. *Co jest bardziej prawdopodobne: wygrać z równorzędnym przeciwnikiem*

- *2 partie z 3, czy*
- *3 partie z 5 ?*

Zadanie 100. *W centrali telefonicznej jest n linii, z których każda niezależnie od pozostałych może być zajęta. Prawdopodobieństwo, że dana linia jest wolna wynosi p. Znaleźć najbardziej prawdopodobną liczbę linii wolnych.*

Zadanie 101. *Zdarzenie A pojawia się z tym samym prawdopodobieństwem w ciągu niezależnych doświadczeń losowych. Prawdopodobieństwo, że A nastąpi w ciągu czterech doświadczeń przynajmniej raz wynosi $\frac{1}{2}$. Jakie jest prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w jednym doświadczeniu?*

Zadanie 102. *Jakie jest prawdopodobieństwo parzystej ilości sukcesów w schemacie Bernoulliego, jeśli $p = \frac{1}{2}$?*

Zadanie 103. *Jakie jest prawdopodobieństwo parzystej ilości sukcesów w schemacie Bernoulliego, jeśli p jest dowolne?*

Zadanie 104. *Ile razy należy rzucić kostką, aby prawdopodobieństwo wypadnięcia "5" było niemniejsze niż $\frac{1}{2}$?*

Zadanie 105. *Prawdopodobieństwo wypadku akrobaty przy pierwszym w danym dniu występie wynosi $\frac{1}{10000}$, natomiast przy drugim $\frac{1}{1000}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że akrobata nie będzie miał wypadku pod czas 100 kolejnych występów, przy założeniu, że*

- *ma jeden występ dziennie,*
- *ma dwa występy dziennie.*

Zadanie 106. *W ciągu godziny jest średnio 60 zgłoszeń. Telefonistka wyszła na pół minuty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w tym czasie:*

- *nie będzie żadnego zgłoszenia;*
- *będzie dokładnie jedno zgłoszenie?*

Wsk. Skorzystać z tw. Poissona. Czemu jest równa wartość oczekiwana dla rozkładu Poissona?

Zadanie 107. *Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że przy n niezależnych rzutach monetą liczba uzyskanych orłów będzie większa niż liczba uzyskanych reszek.*

Zadanie 108. *Centrala abonencka obsługuje 10 telefonów. Prawdopodobieństwo, że w ciągu t- minut zadzwoni jeden abonent wynosi 0,4. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu t minut zadzwoni:*

- *15 abonentów;*
- *ca najmniej 2 abonentów;*

- *nie więcej niż 3 abonentów.*

Zadanie 109. *Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w 10 rzutach monetą orzeł wypadnie*

- *dokładnie 2 razy;*
- *co najwyżej dwa razy;*
- *co najmniej dwa razy.*

Zadanie 110. *Jeżeli przeciętnie 5 dni w tygodniu jest deszczowych, to jakie jest prawdopodobieństwo, że 2 dni z 3 będą pogodne?*

Zadanie 111. *Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród 500 osób co najmniej 2 osoby będą miały urodziny w Nowy Rok, jeśli przyjmiemy, że rok liczy 365 dni.*

Zadanie 112. *Średnio 977 ziarna na 1000 kiełkuje. Jakie jest prawdopodobieństwo, że siejąc 1000000 ziaren 995000 wykiełkuje.*

Zadanie 113. *Prawdopodobieństwo trafienia samolotu z pojedynczego działa wynosi* $0,1$. *Samolot został ostrzelany salwą z 10 dział. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że samolot został trafiony.*

Zadanie 114. *Prządka obsługuje 1000 wrzecion. Wiadomo, że prawdopodobieństwo zerwania się nitki jednego wrzeciona w ciągu 1 minuty wynosi* $0,004$. *Oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu 1 minuty zerwą się co najwyżej 3 nitki na trzech wrzecionach.*

Zadanie 115. *Prawdopodobieństwo awarii sieci cieplnej na danym osiedlu w ciągu jednej doby wynosi* $0,2$. *Oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu 15 dni nastąpi:*

- *5 awarii;*
- *najwyżej dwie awarie.*

Zadanie 116. *Sześciu robotników korzysta z przerwami i niezależnie od siebie z energii elektrycznej. Każdy z nich podłączony jest średnio 8 minut w ciągu godziny. Sieć elektryczna jest przeciążona jeśli co najmniej 5 robotników pobiera energię elektryczną. Oblicz prawdopodobieństwo przeciążenia sieci.*

Zadanie 117. *Oblicz prawdopodobieństwo, że losują ze zwracaniem trzy razy po trzy kule z urny zawierającej 7 kul białych, 5 czarnych i 3 niebieskie otrzymamy dokładnie 2 razy różnokolorowe kule.*

Zadanie 118. *Grupa studentów licząca 22 osoby pisze kolokwium. Oblicz prawdopodobieństwo, że dokładnie dwie osoby zaliczą je, jeśli prawdopodobieństwo zaliczenia kolokwium przez pojedynczego studenta wynosi 0,1.*

Zadanie 119. *W urnie znajduje się 18 kul czarnych i 12 białych. Losujemy kule pojedynczo za każdym razem zwracając. Oblicz prawdopodobieństwo*

- *wszystkie trzy kule są czarne;*
- *otrzymano dokładnie dwie kule czarne.*

Zadanie 120. *Pewne zdarzenie może zajść w dowolny dzień tygodnia z takim samym prawdopodobieństwem Oblicz prawdopodobieństwo nie zajścia zdarzenia w określony dzień tygodnia (np. w środę) w ciągu 12 kolejnych tygodni, jeśli wiadomo iż zdarzenie zachodzi każdego tygodnia.*

Zadanie 121. *Na przystanku tramwajowym czeka 10 pasażerów. Wiedząc, że tramwaj składa się z dwóch wagonów obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że do każdego wagonu wsiądzie po 5 pasażerów.*

Zadanie 122. *Prawdopodobieństwo pojawienia się zdarzenia A w pojedynczym doświadczeniu jest równe* $p > 0$. *Oszacować liczbę niezależnych doświadczeń n by prawdopodobieństwo zdarzenia, że chociaż w jednym z tych doświadczeń wystąpi zdarzenie A było większe lub równe niż* $p_0, p < p_0 < 1$.

5 Zadania różne

Zadanie 123. *Niech zdarzenia A, B są niezależne. Udowodnić, że są niezależne następujące zdarzenia*

- A, B';
- A', B;

- *A, $\emptyset$;*
- *A, Ω;*
- *A, $B \cup C$, jeśli $B \cap C = \emptyset$, A i C są niezależne;*
- *A', B'.*

Zadanie 124. *Niech $A \subseteq B$, A i C oraz B i C są niezależne. Udowodnij, że wtedy $B \setminus A$ i C są również niezależne.*

Zadanie 125. *Wykaż, że jeśli $P(A) = a$, $P(B) = b$, gdzie $b \neq 0$, to $P(A|B) \geqslant 1 - \frac{1-a}{b}$.*

Zadanie 126. *Rzucamy trzema kostkami do gry. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że na każdej kostce wypadła inna liczba oczek, B oznacza zdarzenie, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka? Czy zdarzenia A i B są niezależne?*

Zadanie 127. *Trzech studentów przygotowywało się niezależnie do egzaminu z rachunku prawdopodobieństwa. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że trzeci z nich zdał, jeśli wiadomo, że zdało dwóch, a prawdopodobieństwa zdania dla poszczególnych studentów wynoszą odpowiednio: $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.5$, $p_3 = 0.4$.*

Zadanie 128. *Rzucono 10 razy kostką. Jaka jest szansa otrzymania:*

a) 6 oczek co najmniej raz?

b) 5 oczek dokładnie 3 razy?

Zadanie 129. *Rzucono 10 razy symetryczną kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pierwszym rzucie otrzymano szóstkę, jeśli wiadomo, że otrzymano 3 szóstki?*

Zadanie 130. *Ile razy należy rzucić kostką, aby prawdopodobieństwo wypadnięcia pięciu oczek było nie mniejsze niż $\frac{1}{2}$?*

Zadanie 131. *Rzucamy n razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:*

a) sześć oczek pojawi się dokładnie raz;

b) sześć oczek pojawi się co najmniej raz.

Zadanie 132. *Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pan Kowalski nie trafi nawet czwórki grając przez rok dwa razy w tygodniu w Totolotka (typując 6 liczb z 49)?*

Zadanie 133. *Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba szóstek, przy 100 rzutach kostką?*

Zadanie 134. *Owad składa k jajeczek z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$. Potomek wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p, niezależnie od innych. Znaleźć prawdopodobieństwo, że liczba potomków będzie równa l.*

Zadanie 135. *Zdarzenia A i B są niezależne i takie, że $P(A \cup B) = 1$. Udowodnić, że $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.*

Zadanie 136. *Z talii 52 kart losujemy jedną. Zdarzenie A polega na tym, że wylosowana karta jest asem, B na tym, że wylosowana karta jest pikiem, C – wylosowana karta jest blotką. Zbadać niezależność zdarzeń A i C oraz niezależność zdarzeń A i B.*

Zadanie 137. *Rzucamy dwiema kości do gry i określamy trzy zdarzenia: A – pojawienie się parzystej liczby oczek na pierwszej kości, B – pojawienie się nieparzystej liczby oczek na drugiej kości i C – pojawienie się na obu kościach liczby oczek, których suma jest większa od 7. Zbadać niezależność zdarzeń A, B i C.*

Zadanie 138. *Na odcinku $[0, 1]$ umieszczamy losowo i niezależnie punkty x i y. Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że $x^2 + y^2 \leqslant 1$, natomiast B zdarzeniem polegającym na tym, że $x < y$. Czy zdarzenia A i B są niezależne?*

Zadanie 139. *Z kuli o promieniu R wylosowano N punktów. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że odległość od środka kuli do najbliżej położonego punktu jest większa lub równa a, $0 < a < R$.*

Zadanie 140. *Przeprowadzono serię doświadczeń według schematu Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w każdym doświadczeniu równym p. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania r-tego sukcesu dokładnie w $(k + r)$-tym doświadczeniu, $k = 0, 1, 2, \ldots$.*

Zadanie 141. *Wieloletnie obserwacje pogody w pewnej miejscowości wykazały, że w 20% dni w listopadzie pogoda jest bezchmurna, a w 20% dni pochmurnych pada deszcz. Oblicz procent dni w listopadzie kiedy pada deszcz oraz prawdopodobieństwo tego, że pewien z góry zadany dzień będzie deszczowy.*