

Lista szósta\* †  
Rachunek prawdopodobieństwa  
kierunek: Informatyka i ekonometria, studia I°

dr Jarosław Kotowicz

## 1 Jednowymiarowa zmienna losowa

**Zadanie 1.** *Z kwadratu o boku  $a$  losowane są dwa wierzchołki. Wartością zmiennej losowej  $X$  jest długość odcinka łączącego te wierzchołki. Wyznaczyć rozkład  $X$ .*

**Zadanie 2.** *Z sześciangu o krawędzi  $a$  losowane są trzy wierzchołki. Wartością zmiennej losowej  $X$  jest pole trójkąta wyznaczonego przez te wierzchołki, którego wierzchołkami są one. Wyznaczyć rozkład  $X$ .*

**Zadanie 3.** *Z kwadratu o boku  $a$  losowany jest punkt. Wartością zmiennej losowej  $X$  jest odległość od najbliższego boku. Wyznaczyć rozkład  $X$ .*

**Zadanie 4.** *Losujemy punkt z trójkąta równobocznego o boku  $a$ . Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od najbliższego boku. Podać rozkład zmiennej losowej.*

**Zadanie 5.** *Dany jest prostokąt o bokach  $a, b$ , gdzie  $a < b$ . Z prostokąta losujemy punkt. Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe odległości punktu od najbliższego dłuższego boku. Podać rozkład zmiennej losowej.*

**Zadanie 6.** *Dany jest prostokąt  $[0, 2] \times [0, 4]$ . Z prostokąta losujemy punkt. zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe odległości punktu od najbliższego dłuższego boku. Podać rozkład zmiennej losowej.*

**Zadanie 7.** *Dane są dwa koła współśrodkowe o promieniach 1 i 2. Z większego koła losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od mniejszego z okręgów. Podać rozkład zmiennej losowej.*

**Zadanie 8.** *Z okręgu o promieniu 1 losujemy dwa punkty  $P, Q$ . Wartością zmiennej losowej jest długość mniejszego łuku. Wyznaczyć rozkład  $X$ .*

**Zadanie 9.** *Z koła o promieniach 2 losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od brzegu koła. Podać rozkład zmiennej losowej.*

**Zadanie 10.**  *$A$  jest zdarzeniem losowym, które można zaobserwować w pojedynczym doświadczeniu  $P(A) = p > 0$ . Doświadczenia są w sposób niezależny wykonywane do tego momentu, kiedy  $A$  zostanie zaobserwowane po raz pierwszy. Wartością zmiennej losowej  $X$  jest numer tego doświadczenia kiedy  $A$  zostało zaobserwowane pierwszy raz (lub kiedy zostały przerwane próby). Wyznaczyć rozkład  $X$ .*

**Zadanie 11.** *Z pęku  $n$  kluczy wybierany jest jeden i pasowany do zamka. Klucz, który nie pasuje jest odkładany, a z pozostałych jest losowany kolejny klucz. Wartością zmiennej losowej  $X$  jest numer tej próby, w której klucz pasuje do zamka. Wiadomo, że tylko jeden klucz otwiera zamek. Wyznaczyć rozkład  $X$ .*

**Zadanie 12.** *Rzucamy raz symetryczną monetą. Zdarzeniu wypaść orzeł przyporządkowujemy liczbę 2, a wypadła reszka liczbę -1. Podać rozkład zmiennej losowej.*

\*©J.Kotowicz

†Zadania 30–47 pochodzą od dr U. Ostaszewskiej ze strony znajdującej się pod adresem <http://math.uwb.edu.pl/%7Euostasze/rachiie16.html>.

**Zadanie 13.** Rzucamy dwoma symetrycznymi monetami. Zdarzeniu wypadły dwie reszki przyporządkujemy liczbę 5, wypadły różne wyniki liczbę -3, zaś wypadły dwa orły liczbę 1. Podać rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 14.** Rzucamy pięcioma symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów. Podać rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 15.** Rzucamy dwoma kostkami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe sumie wyrzuconych oczek na obu kostkach. Podać rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 16.** Dokonujemy 10 jednakowych prób, które są niezależne. W każdej z prób może pojawić się zdarzenie  $A$  z prawdopodobieństwem  $p$ , ( $0 < p < 1$ ). Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wystąpień zdarzenia  $A$ . Znaleźć rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 17.** W urnie znajdują się 4 kule białe i 4 czarne. Losujemy z urny jednocześnie 4 kule. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wylosowanych kul czarnych. Podać rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 18.** Rzucamy kostką do gry i czworościanem na ścianach którego są liczby 0,0,1,2. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe

- sumie;
- iloczynowi

wyrzuconych oczek i liczby wypadłej na czworościanie. Podać rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 19.** Rzucamy trzema monetami na których znajdują się następujące liczby -1 i 1, 0 i 1 oraz 1 i 2. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podać rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 20.** Rzucamy kostką i monetą. Opisać zmienną losową, jeśli przyjmują wartości równe

- sumie oczek na kostce i wypadłych liczb na monecie (orzec - 0, reszka - 1);
- ilości wyrzuconych oczek na kostce;
- iloczynowi ilości oczek na kostce i wypadłych liczb na monecie (orzec - 0, reszka - 1).

**Zadanie 21.** Rzucamy kostką do gry i dwiema monetami. Na jednej z monet znajdują się liczby 1 i 2, a na drugiej 0 i 1. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi otrzymanych oczek i wyrzuconych liczb na monetach. Podać rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 22.**

Rzucamy kostką i dwoma symetrycznymi monetami, na których znajdują się odpowiednio liczby -1,1; 0,1. Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe sumie wyrzuconych oczek i iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podać rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 23.** Rzucamy kostką i trzema symetrycznymi monetami, na których znajdują się odpowiednio liczby -1,1; 0,1; -1,0. Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe sumie wyrzuconych oczek i iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podać rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 24.** Rzucamy dwoma kostkami i dwoma symetrycznymi monetami, na których znajdują się liczby 0,1. Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek powiększonych o iloczyn wyników otrzymanych na monetach. Podać rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 25.** Rzucamy dwoma kostkami do gry i monetą na której są cyfry 0 i 1. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi sumy oczek i wyrzuconej liczby na monecie. Podać rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 26.** Rzucamy dwoma kostkami i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby -1,1. Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe sumie liczby wypadłej na monecie i wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podać rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 27.** Ze zbioru  $N$  ponumerowanych elementów losujemy ze zwracaniem  $n$  elementów ( $1 < n < N$ ). Niech  $X, Y$  będą zmiennymi losowymi przyjmującymi odpowiednio wartość największego i najmniejszego wylosowanego numeru. Wyznaczyć rozkłady  $X, Y$ .

**Zadanie 28.** Uczeń rzuca 4 razy do kosza. Prawdopodobieństwo umieszczenia piłki w koszu wynosi  $\frac{1}{4}$ . Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej wyznaczonej przez ilość trafień do kosza.

**Zadanie 29.** Czy można dobrać parametr  $a$  tak, aby podane funkcje były gęstościami pewnego rozkładu zmiennej losowej? Odpowiedź uzasadnij. W przypadku odpowiedzi pozytywnej policzyć ich dystrybuanty.

- $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in [0, 4] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, 4] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in [-1, 4] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1, 4] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{dla } x \in [0, 3] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, 3] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x \cdot (2 - x) & \text{dla } x \in [0, a] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, a] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} a & \text{dla } x \in [c, c + \frac{1}{a}] \\ 0 & \text{dla } x \notin [c, c + \frac{1}{a}] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, 1] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ ae^{-x} & \text{dla } x \geq 0 \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [0, a] \\ x + 2 & \text{dla } x \in [0, a] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [0, \frac{\pi}{4}] \\ a \cos x & \text{dla } x \in [0, \frac{\pi}{4}] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [-1, a] \\ x & \text{dla } x \in [-1, a] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [-a, a] \\ x^2 & \text{dla } x \in [-a, a] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla } x \in [-1, a] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1, a] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [0, 1] \\ ax(2 + x) & \text{dla } x \in [0, 1] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [-1, a] \\ x^2 + x & \text{dla } x \in [-1, a] \end{cases};$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [-a, a] \\ |x| & \text{dla } x \in [-a, a] \end{cases};$

- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [-a, a] \\ \cos x & \text{dla } x \in [-a, a] \end{cases}$ .
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [0, a] \\ x^3 & \text{dla } x \in [0, a] \end{cases}$ .

## 2 Zadania różne

**Zadanie 30.** Rzucamy kostką, zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartość 0 jeśli liczba wyrzuconych oczek jest podzielna przez 3, 1 gdy liczba wyrzuconych oczek przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, 2 gdy liczba wyrzuconych oczek przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej  $X$ .

**Zadanie 31.** Przeznaczona do odbioru partia towaru zawiera jednakową liczbę sztuk I, II i III gatunku. Niech  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  oznaczają zdarzenia elementarne w doświadczeniu polegającym na wylosowaniu z tej partii towaru sztuki odpowiednio I, II, III gatunku. Zmienne losowe  $X, Y$  określamy w sposób następujący

$$\begin{aligned} X(\omega_1) &= 2, X(\omega_2) = 1, X(\omega_3) = 0 \\ Y(\omega_1) &= 0, Y(\omega_2) = 1, Y(\omega_3) = 2. \end{aligned}$$

Porównać rozkłady zmiennych losowych  $X, Y$ . Wyznaczyć ich dystrybuanty. Czy zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są równe?

**Zadanie 32.** Z pęku  $n$  kluczy wybierany jest jeden i pasowany do zamka. Klucz, który nie pasuje jest odkładany, a z pozostałych jest losowany kolejny klucz. Wartością zmiennej losowej  $X$  jest numer tej próby, w której klucz pasuje do zamka. Wiadomo, że tylko jeden klucz otwiera zamek. Wyznaczyć rozkład  $X$ .

**Zadanie 33.** Rzucamy pięcioma symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów. Podać rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 34.** Dane są 4 urny i 3 kule. Rozmieszczamy kule w urnach. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości pustych urn. Obliczyć rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 35.** Losujemy  $n$ -krotnie (ze zwracaniem) liczbę spośród liczb od 1 do  $N$ . Niech zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe największej spośród liczb uzyskanych w losowaniu. Obliczyć jej rozkład.

**Zadanie 36.** Dany jest odcinek  $(0, L)$  i punkt  $r$  należący do tego odcinka. Z odcinka losujemy dwa punkty  $x_1, x_2$ . Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartość 1, gdy punkt  $r$  znajduje się między wylosowanymi punktami oraz 0 w przeciwnym wypadku. Podać rozkład  $X$ .

**Zadanie 37.** Rzucamy dwoma kostkami i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby  $-1, 1$ . Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe sumie liczby wypadłej na monecie i wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podać rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 38.** Niech  $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $P(\omega) = \frac{1}{4}$  dla  $\omega = 0, 1, 2, 3$ . Definiujemy dwie zmienne losowe  $X(\omega) = \sin \frac{\pi\omega}{2}$  oraz  $Y(\omega) = \cos \frac{\pi\omega}{2}$ . Znaleźć rozkłady i dystrybuanty zmiennych losowych  $X$  i  $Y$ . Obliczyć  $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\})$ .

**Zadanie 39.** Z talii 52 kart wyciągamy 6 i takiemu losowaniu przypisujemy liczbę pików. Znaleźć rozkład określonej w ten sposób zmiennej losowej.

**Zadanie 40.** Dana jest gęstość określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}.$$

Nie licząc całki podać ile wynosi prawdopodobieństwo w punkcie  $\frac{\pi}{4}$ . Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 41.** Dla jakich wartości  $a$  funkcja  $f(x) = ax^2 \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$  jest gęstością?

**Zadanie 42.** Niech  $X$  ma rozkład o gęstości  $f(x) = \frac{a}{x^2+1}$ . Wyznaczyć wartość parametru  $a$  oraz obliczyć  $P(|X| > 1)$ ?

**Zadanie 43.** Niech  $X$  ma rozkład o gęstości  $f(x) = ce^{-|x|}$ . Wyznaczyć  $c$  i  $P(X > -1)$ .

**Zadanie 44.** Niech  $X$  ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [-1, 0) \\ x & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1, 1] \end{cases}.$$

Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że  $\{|X - \frac{1}{8}| < \frac{5}{8}\}$ .

**Zadanie 45.** Wiemy, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda > 0$  i  $P(X < 2) = \frac{3}{4}$ . Obliczyć  $\lambda$ .

**Zadanie 46.** Zmienna losowa  $X$  ma rozkład jednostajny na zbiorze  $A = [-1, 0] \cup [2, 4]$ . Wyznaczyć gęstość i  $P(|X - \frac{3}{2}| < 2)$ .

**Zadanie 47.** Czy można dobrać parametr  $a$ , by funkcja:

a)  $f(x) = \frac{a}{x^2} \mathbb{I}_{(1, \infty)}(x)$ ;

b)  $g(x) = \frac{a}{x} \mathbb{I}_{(1, \infty)}(x)$ ;

c)  $h(x) = a\sqrt{x} \mathbb{I}_{(0, 3)}(x)$

była gęstością?