Lista siódma[*] [†]
Rachunek prawdopodobieństwa
kierunek: Informatyka i ekonometria, studia I°

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1. *Z kwadratu o boku a losowany jest punkt. Wartością zmiennej losowej X jest odległość od najbliższego boku. Wyznaczyć rozkład X.*

Zadanie 2. *Dane są dwa koła współśrodkowe o promieniach 1 i 2. Z większego koła losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od mniejszego z okręgów. Podać rozkład zmiennej losowej.*

Zadanie 3. *Z odcinka $[0,1]$ losujemy dwie liczby. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X przyjmującej wartości równe*

a) minimum z wylosowanych liczb;

b) maksimum z wylosowanych liczb;

c) sumie wylosowanych liczb.

Zadanie 4. *Z kwadratu $[0,1]^2$ losujemy punkt (x,y). Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie współrzędnych wylosowanego punktu. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X.*

Zadanie 5. *Czy można dobrać stałe a, b tak, aby funkcja $F(x) = a \operatorname{arc\,tg}(x) + b$ była dystrybuantą pewnego rozkładu? Jeśli tak, to je podać wraz z uzasadnieniem.*

Zadanie 6. *Wyznaczyć zbiór wszystkich trójek a, b i c, dla których funkcja*

$$F(t) = \begin{cases} at^2 & \text{dla } t < 0 \\ bt + c & \text{dla } 0 \leqslant t < 2 \\ 1 & \text{dla } t \geqslant 2 \end{cases}$$

jest

a) dystrybuantą zmiennej losowej,

b) dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym,

c) dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie ciągłym.

Zadanie 7. *Wyznaczyć dystrybuanty dla rozkładów opisanych w zadaniach z poprzedniej listy.*

Zadanie 8. *Funkcja*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -1 \\ \frac{1}{4} & \text{dla } -1 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{dla } 2 \leqslant x < 4 \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 4 \end{cases}.$$

jest dystrybuantą zmiennej losowej X. Wtedy (odpowiedzieć tak lub nie):

[†] Zadania 1–13 pochodzą od dr U. Ostaszewskiej znajdującej się pod adresem http://math.uwb.edu.pl/%7Euostasze/rachiie16.html.

a) $P(X \leqslant 2) > P(X > 2)$;

b) $W_X = \{-1, 1, 2, 3\}$;

c) $P(X = 3) = \frac{7}{8}$;

d) $P(X^2 - 1 = 0) = \frac{1}{2}$.

Zadanie 9. *Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem*

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & dla\ t < 0 \\ 0.1 + t & dla\ 0 \leqslant t < 0.5 \\ 0.4 + t & dla\ 0.5 \leqslant t < 0.55 \\ 1 & dla\ t \geqslant 0.55 \end{cases}.$$

Wyznaczyć $P(X = \frac{1}{2})$, $P(X \in [0, \frac{1}{2}])$, $P(X < 0.55)$.

Zadanie 10. *Czy można dobrać parametr a tak, aby podane funkcje były gęstościami pewnego rozkładu zmiennej losowej? Odpowiedź uzasadnij. W przypadku odpowiedzi pozytywnej policzyć ich dystrybuanty.*

a) $f(x) = \begin{cases} ax & dla\ x \in [0, 4] \\ 0 & dla\ x \notin [0, 4] \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} ax & dla\ x \in [-1, 4] \\ 0 & dla\ x \notin [-1, 4] \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} ax^2 & dla\ x \in [0, 3] \\ 0 & dla\ x \notin [0, 3] \end{cases}$;

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x \cdot (2 - x) & dla\ x \in [0, a] \\ 0 & dla\ x \notin [0, a] \end{cases}$

Zadanie 11. *Funkcje* f_i, $i = 1, 2, 3$ *są gęstościami rozkładów jednostajnych na odcinkach* $(i-1, i)$. *Wtedy są gęstościami także funkcje (odpowiedzieć tak lub nie):*

a) $f_1 + f_2 + f_3$,

b) $f_2 \cdot f_3$,

c) $|f_3 - f_1|$,

d) $\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$,

e) $\max(f_1, f_2)$.

Zadanie 12. *Zmienna losowa ma rozkład* $\mathcal{N}(0, 1)$. *Oblicz prawdopodobieństwo*

- $P(X > 0)$,
- $P(X > 2)$,
- $P(|X| < 1)$,
- $P(|X| > 1)$,
- $P(0 < X < 3)$,
- $P(-1 < X < 3)$.

Zadanie 13. *Zmienna losowa ma rozkład* $\mathcal{N}(1, 2)$. *Oblicz prawdopodobieństwo*

- $P(|X| > 3)$,
- $P(X^2 \leqslant \frac{3}{4} + X)$.