Metody probabilistyczne i statystyka - wykład czwarty[1]

dr Jarosław Kotowicz

Instytut Informatyki Uniwersytet w Białymstoku

wersja z roku ak. 2021/22

Spis treści

Pojęcie wielowymiarowej zmiennej losowej. I

Niech (Ω, Σ, P) będzie ustaloną przestrzenią probabilistyczną i $d \in \mathbb{N}$.

Definicja 1

Zmienną losową d-wymiarową nazywamy każde odwzorowanie mierzalne X z (Ω, Σ) w $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ tzn.

$$\forall_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} X^{-1}(A) \in \Sigma. \tag{1}$$

Lemat 1

Jeżeli odwzorowanie $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ spełniające warunek

$$\forall_{t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R}} X^{-1}(]-\infty, t_1] \times \ldots \times]-\infty, t_d]) \in \Sigma \tag{2}$$

jest d-wymiarową zmienną losową.

Pojęcie wielowymiarowej zmiennej losowej. II

Twierdzenie 1

Niech X będzie d-wymiarową zmienną losową, zaś $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ będzie funkcją borelowską. Wtedy $\varphi(X)$ jest m-wymiarową zmienną losową.

Rozkład prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}^d$. I

Definicja 2

Rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}^d$ nazywamy każdą miarę probabilistyczną μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Definicja 3

Rozkładem prawdopodobieństwa d-wymiarowej zmiennej losowej X nazywamy miarę probabilistyczną μ określoną na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ zależnością

$$\forall_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}\ \mu(B) := P(X^{-1}(B)). \tag{3}$$

Uwaga 1

Oznaczamy

$$P(X^{-1}(B)) = P\left(\{\omega : X(\omega) \in B\}\right) = P(\{X \in B\}).$$

Spis treści

Dystrybuanta wielowymiarowej zmiennej losowej. I

Niech (Ω, Σ, P) będzie ustaloną przestrzenią probabilistyczną. Niech ponadto $d \in \mathbb{N}$.

Definicja 4

Dystrybuantą rozkładu prawdopodobieństwa μ na $\mathbb{R}^d$ nazywamy funkcję $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, określoną wzorem

$$F(t_1, \ldots, t_d) := \mu(]-\infty, t_1] \times \ldots \times]-\infty, t_d]). \tag{4}$$

Uwaga 2

Jeżeli μ jest rozkładem d-wymiarowej zmiennej losowej X, to dystrybuantę rozkładu μ będziemy nazywać dystrybuantą zmiennej losowej X i wtedy

$$F(t_1, \ldots, t_d) = P\left(\{X_1 \leqslant t_1 \wedge \ldots \wedge X_d \leqslant t_d\}\right) \tag{5}$$

Dystrybuanta wielowymiarowej zmiennej losowej. II

Uwaga 3

W literaturze spotyka się również definicję dystrybuanty rozkładu z przedziałami otwartymi.

Twierdzenie 2

Dystrybuanta F rozkładu prawdopodobieństwa μ na $\mathbb{R}^d$ ma następujące własności:

i. *F jest niemalejąca względem każdego argumentu,*
ii. $\lim\limits_{\substack{\inf\limits_{1 \leqslant i \leqslant d} x_i \to -\infty}} F(x_1, \ldots, x_d) = 0$,
iii. $\lim\limits_{\substack{\inf\limits_{1 \leqslant i \leqslant d} x_i \to +\infty}} F(x_1, \ldots, x_d) = 1$,
iv. *F jest prawostronnie ciągła względem każdego argumentu.*

Dystrybuanta wielowymiarowej zmiennej losowej. III

Twierdzenie 3

Dla dystrybuanty F rozkładu prawdopodobieństwa μ na $\mathbb{R}^d$ zachodzi również warunek

$$\forall_{1 \leqslant k \leqslant d} x_k \leqslant y_k \Rightarrow \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^{\overline{1,d}}} (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{d} \varepsilon_k} F(U(\varepsilon)) \geqslant 0, \tag{6}$$

gdzie $U(\varepsilon) = (\varepsilon_1 x_1 + (1-\varepsilon_1) y_1, \dots, \varepsilon_d x_d + (1-\varepsilon_d) y_d)$.

Twierdzenie 4

Jeżeli funkcja $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ spełnia tezy twierdzeń 2 i 3, to istnieje taki rozkład prawdopodobieństwa μ na $\mathbb{R}^d$, że F jest jego dystrybuantą.

Dystrybuanta wielowymiarowej zmiennej losowej. IV

Twierdzenie 5

Jeżeli μ i ν są rozkładami prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}^d$ o dystrybuantach F i G oraz $F = G$, to dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ zachodzi $\mu(A) = \nu(A)$.

Spis treści

Rozkłady ciągłe. I

Niech (Ω, Σ, P) będzie ustaloną przestrzenią probabilistyczną. Niech ponadto $d \in \mathbb{N}$.

Definicja 5

Jeżeli μ jest rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}^d$ i dla pewnej funkcji $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ całkowalnej w sensie Lebesgue'a mamy

$$\forall_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} \mu(A) = \int_A f(x) m_{\mathcal{L}}(dx), \tag{7}$$

to f nazywamy gęstością rozkładu μ.

Definicja 6

Jeżeli dla rozkładu prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}^d$ μ istnieje gęstość, to taki rozkład nazywamy ciągłym.

Rozkłady ciągłe. II

Twierdzenie 6

Niech f będzie gęstością rozkładu prawdopodobieństwa μ na $\mathbb{R}^d$. Wtedy

1. $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) m_{\mathcal{L}}(dx) = \mu(\mathbb{R}^d) = 1$,
2. $f \geqslant 0$ *p.w.*,
3. *Gęstość jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do zbiorów miary Lebesgue'a zero.*

Ponadto każda funkcja $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ spełniająca warunki (i) i (ii) jest gęstością.

Rozkłady dyskretne.

Definicja 7

Rozkład prawdopodobieństwa μ *na* $\mathbb{R}^d$ *nazywamy dyskretnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór co najwyżej przeliczalny* $S \subset \mathbb{R}^d$ *dla którego* $\mu(S) = 1$.

Spis treści

Jednowymiarowy rozkład brzegowy. I

Lemat 2

Niech μ będzie rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}^d$. Określmy dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i $1 \leqslant j \leqslant d$ funkcję

$$\mu_j(B) := \mu(\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \underbrace{B}_{j} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}). \tag{8}$$

Wtedy μ_j jest rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$.

Definicja 8

Funkcję μ_j występującą w lemacie 2 nazywamy jednowymiarowym rozkładem brzegowym.

Jednowymiarowy rozkład brzegowy. II

Twierdzenie 7

Rozkład prawdopodobieństwa μ *na* $\mathbb{R}^d$ *jest dyskretny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $1 \leqslant j \leqslant d$ *rozkład* μ_j *jest dyskretny.*

Twierdzenie 8

Jeżeli rozkład prawdopodobieństwa μ *na* $\mathbb{R}^d$ *jest ciągły, to wszystkie jednowymiarowe rozkłady brzegowe są ciągłe.*

Przykład 1

Niech $A = \{(x, y) : x = y\} \cap [0, 1]^2$*. Niech* μ *będzie rozkładem prawdopodobieństwa na* $\mathbb{R}^2$ *określonym następująco* $\mu(A) = 1$*. Wówczas rozkłady brzegowe są ciągłe, lecz* μ *nie jest rozkładem ciągłym.*

Wielowymiarowy rozkład brzegowy.

Lemat 3

Niech μ będzie rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}^d$. Niech $1 \leqslant k \leqslant d$ i niech $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant d$ będzie k-wyrazowym ciągiem indeksów. Określmy dla dowolnych $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dla $i = 1, \ldots, k$

$$\mu_{i_1,\ldots,i_k}(B_1 \times \ldots \times B_k) := \mu(\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \underbrace{B}_{i_1} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \underbrace{B}_{i_k} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}). \tag{9}$$

Wtedy $\mu_{i_1,\ldots,i_k}$ jest rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}^k$.

Definicja 9

Funkcję $\mu_{i_1,\ldots,i_k}$ występującą w lemacie 3 nazywamy k-wymiarowym rozkładem brzegowym.

Spis treści

Pojęcie niezależności. Podstawowe własności. I

Dana jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, Σ, P) oraz jednowymiarowe zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ określone na niej.

Definicja 10

Mówimy, że zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dowolnych zbiorów $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zachodzi równość

$$P\left(\{\omega : X_i(\omega) \in A_i \wedge i \in \overline{1, n}\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(\{\omega : X_i(\omega) \in A_i\}\right). \tag{10}$$

Pojęcie niezależności. Podstawowe własności. II

Twierdzenie 9

Dyskretne zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu $(a_1, \ldots, a_n) \in W_{X_1} \times \ldots \times W_{X_n}$ zachodzi równość

$$P\left(\{\omega : X_i(\omega) = a_i \wedge i \in \overline{1, n}\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(\{\omega : X_i(\omega) = a_i\}\right). \tag{11}$$

Niezależność i wielowymiarowe zmienne losowe. I

Dana jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, Σ, P) oraz jednowymiarowe zmienne losowe $X_1, \dots, X_n$ określone na niej.

Twierdzenie 10

Dla zmiennych losowych $X_1, \dots, X_n$ następujące warunki są równoważne

1. (i) *zmienne są niezależne,*
2. (ii) $\mu_{(X_1,\dots,X_n)} = \mu_{X_1} \otimes \dots \otimes \mu_{X_n}$,
3. (iii) *dla dowolnego $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ zachodzi równość*

$$F_{(X_1,\dots,X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t_i).$$

Niezależność i wielowymiarowe zmienne losowe. II

Twierdzenie 11

Niech dane będą zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ o rozkładach ciągłych z gęstościami równymi odpowiednio $g_1, \ldots, g_n$. Zmienne losowe są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_{(X_1,\ldots,X_n)}$ jest rozkładem ciągłym o gęstości

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} g_i(x_i). \tag{12}$$

Twierdzenie 12

Niech dane będą niezależne zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ całkowalne. Wówczas istnieje wartość oczekiwana ich iloczynu oraz

$$\mathbb{E}(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i). \tag{13}$$

Uogólnienie niezależności. I

Definicja 11

Zmienne losowe $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ *określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej nazywamy niezależnymi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego skończonego ciągu indeksów* $i_1, \ldots, i_n$*, gdzie* $i \in \mathbb{N}$*, zmienne losowe* $X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}$ *są niezależne.*

Twierdzenie 13

Niech $\{\mathcal{H}_t \colon t \in T\}$*,* $\mathcal{H}_t \subset \mathcal{H}$ *będzie rodziną niezależnych* σ*-ciał i niech zbiór* T *będzie sumą parami rozłącznych zbiorów* T_i*, gdzie* $i \in I$*. Wtedy niezależna jest rodzina* σ*-ciał*

$$\mathfrak{G}_i := \sigma\mathfrak{a}\left(\bigcup_{t\in T_i} \mathcal{H}_t\right) \qquad i \in I.$$

Uogólnienie niezależności. II

Twierdzenie 14

Załóżmy, że zmienne losowe $X_{1,1}, \ldots, X_{1,k_1}, \ldots, X_{n,1} \ldots, X_{n,k_n}$ *są niezależne. Wówczas zmienne losowe* $Y_j = \varphi_j(X_{j,1}, \ldots X_{j,k_j})$*, gdzie* $j = 1, \ldots, n$ *i* φ_j *– funkcje borelowskie takie, że* Y_j *są dobrze zdefiniowane, są niezależne.*