Metody probabilistyczne i statystyka - wykład piąty[1]

dr Jarosław Kotowicz

Instytut Informatyki Uniwersytet w Białymstoku

wersja z roku ak. 2020/21

Spis treści

Kowariancja i korelacja zmiennej losowej. I

Definicja 1

Niech jednowymiarowe zmienne losowe X i Y będą całkowalne tzn. $X, Y \in L^1(\Omega)$. Załóżmy, że ich iloczyn jest zmienną losową całkowalną. Wówczas kowariancją zmiennych losowych X i Y nazywamy liczbę równą

$$\mathrm{cov}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))). \tag{1}$$

Wniosek 1

Jeżeli spełnione są założenia definicji 1, to

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \tag{2}$$

Kowariancja i korelacja zmiennej losowej. II

Definicja 2

Niech spełnione są założenia definicji 1 wówczas mówimy, że zmienne losowe X i Y są nieskorelowane wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.

Uwaga 1

Korzystając z definicji kowariancji i jej własności warunek definicji zmiennych nieskorelowanych sformułować możemy następująca

$$\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0. \tag{3}$$

Powyższy warunek można zapisać w postaci

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = 0. \tag{4}$$

Kowariancja i korelacja zmiennej losowej. III

Uwaga 2

Jednowymiarowe zmienne losowe nieskorelowane nie są tym samym, co zmienne niezależne.

Wniosek 2

Jednowymiarowe zmienne losowe niezależne całkowalne z kwadratem, czyli należące do $L^2(\Omega)$*, są nieskorelowane.*

Przykład 1

Niech $X \in \mathcal{N}(0,1)$ *oraz* $Y = X^2$*. Wówczas zmienne losowe* X *i* Y *są zależne i nieskorelowane.*

Kowariancja i korelacja zmiennej losowej. IV

Wniosek 3

Niech jednowymiarowe zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ całkowalne z kwadratem oraz są niezależne, to wówczas

$$\mathbb{D}^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}^2(X_i). \tag{5}$$

Wniosek 4

Niech jednowymiarowe zmienne losowe X i Y spełniają warunki $X, Y \in L^2(\Omega)$, to kowariancja zmiennych losowych X i Y istnieje oraz

$$|\operatorname{cov}(X, Y)| \leqslant \sqrt{\mathbb{D}^2(X)\mathbb{D}^2(Y)}. \tag{6}$$

Kowariancja i korelacja zmiennej losowej. V

Definicja 3

Niech jednowymiarowe zmienne losowe X *i* Y *spełniają warunki* $X, Y \in L^2(\Omega)$ *oraz* $\mathbb{D}^2(X) > 0$ *i* $\mathbb{D}^2(Y) > 0$*. Współczynnikiem korelacji zmiennych losowych* X *i* Y *nazywamy liczbę* $\rho(X, Y)$ *równą*

$$\rho(X, Y) := \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{D}^2(X)\mathbb{D}^2(Y)}}. \tag{7}$$

Kowariancja i korelacja zmiennej losowej. VI

Twierdzenie 1

Niech jednowymiarowe zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ *będą całkowalne z kwadratem. Wówczas istnieje wariancja ich sumy oraz*

$$\mathbb{D}^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}^2(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{cov}(X_i, X_j). \tag{8}$$

Wniosek 5

Niech jednowymiarowe zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ *będą całkowalne z kwadratem oraz są parami nieskorelowane. Wówczas*

$$\mathbb{D}^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}^2(X_i). \tag{9}$$

Spis treści

Macierz kowariancji i korelacji zmiennych losowych. I

Definicja 4

Rozważmy n-wymiarową zmienną losową X o składowych $X_1, \ldots, X_n$ tzn. $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Niech $X_i \in L^2(\Omega)$ dla $i \in \overline{1, n}$. Macierz

$$Q := (\mathrm{cov}(X_i, X_j))_{i,j \in \overline{1,n}}$$

nazywamy macierzą kowariancji n-wymiarowej zmiennej losowe X.

Macierz kowariancji i korelacji zmiennych losowych. II

Definicja 5

Rozważmy n-wymiarową zmienną losową X o składowych $X_1, \ldots, X_n$. Niech $X_i \in L^2(\Omega)$ oraz $\mathbb{D}^2(X_i) \neq 0$ dla $i \in \overline{1, n}$. Macierz

$$Q_\rho := (\rho(X_i, X_j))_{i,j \in \overline{1,n}}$$

nazywamy macierzą korelacji n-wymiarowej zmiennej losowe X.

Uwaga 3

1. *Pojęcia macierzy kowariancji i korelacji możemy też rozważać w przypadku n zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$. Mówimy wtedy o macierzy kowariancji i korelacji zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$.*
2. *W dalszej części wykładu oba podejścia będziemy stosować wymiennie.*

Macierz kowariancji i korelacji zmiennych losowych. III

Twierdzenie 2

Dla dowolnej n-wymiarowej zmiennej losowej macierz kowariancji, o ile istnieje, ma własności

1. *jest symetryczne,*
2. *jest nieujemnie określona tzn.*

$$\forall_{(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{n} t_i t_j Q_{i,j} \geqslant 0, \tag{10}$$

3. *jeśli jej rząd jest równy k i $k < n$, to istnieje $n-k$ równań liniowych wiążących zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$.*

Spis treści

Momenty zmiennych losowych dwuwymiarowych. I

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, zaś $X = (X_1, X_2)$ będzie dwuwymiarową zmienną losową określoną na tej przestrzeni.

Istnieje naturalne uogólnienie momentów zmiennych jednowymiarowych.[1]

Momenty zmiennych losowych dwuwymiarowych. II

Definicja 6

Niech k, l będą dowolnymi liczbami całkowitymi nieujemnymi, natomiast a i b liczbami rzeczywistymi.
Załóżmy, że dla zmiennej losowej X spełniony jest warunek $X_1^k X_2^l \in L^1(\Omega)$.

1. *Momentem rzędu $k+l$ (odpowiadającemu parze (k,l)) względem punktów a i b zmiennej losowej X nazywamy liczbę równą $\mathbb{E}((X_1-a)^k(X_2-b)^l)$ i oznaczamy $\mu_{k,l}^{a,b}$.*
2. *Momentem zwykłym rzędu $k+l$ (odpowiadającemu parze (k,l)) zmiennej losowej X nazywamy momentem rzędu $k+l$ (odpowiadającemu parze (k,l)) względem punktów 0 i 0 i oznaczamy $m_{k,l}$.*

Momenty zmiennych losowych dwuwymiarowych. III

Definicja 7

Niech k, l będą dowolnymi liczbami całkowitymi nieujemnymi, natomiast dwuwymiarową zmienną losową X spełniającą warunki $X_1^k X_2^l, X_1, X_2 \in L^1(\Omega)$.
Momentem centralnym rzędu $k+l$ (odpowiadającemu parze (k,l)) zmiennej losowej X nazywamy momentem rzędu $k+l$ (odpowiadającemu parze (k,l)) względem punktów $\mathbb{E}(X_1)$ i $\mathbb{E}(X_2)$ i oznaczamy $\mu_{k,l}$.

Momenty zmiennych losowych dwuwymiarowych. IV

Lemat 1

Niech k, l będą liczbami naturalnymi i $X = (X_1, X_2)$ dwuwymiarową zmienną losową.

1. *Jeżeli $X_1 \in L^k(\Omega)$, to $m_{k,0} = \mathbb{E}(X_1^k)$ (czyli jest równe momentowi zwykłemu rzędu k pierwszej składowej zmiennej X).*
2. *Jeżeli $X_2 \in L^l(\Omega)$, to $m_{0,l} = \mathbb{E}(X_2^l)$ (czyli jest równe momentowi zwykłemu rzędu l drugiej składowej zmiennej X).*
3. *Jeżeli $X_1 \in L^2(\Omega)$, to $\mu_{2,0} = \mathbb{D}^2(X_1)$ (czyli jest równe momentowi centralnemu rzędu 2 pierwszej składowej zmiennej X).*
4. *Jeżeli $X_2 \in L^2(\Omega)$, to $\mu_{0,2} = \mathbb{D}^2(X_2)$ (czyli jest równe momentowi centralnemu rzędu 2 drugiej składowej zmiennej X).*
5. *Jeżeli $X_1, X_2, X_1X_2 \in L^1(\Omega)$, to $m_{1,1} = \mathbb{E}(X_1X_2)$ i $\mu_{1,1} = \mathrm{cov}(X_1, X_2)$.*

Spis treści

Różne pojęcia zbieżności. I

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ciągiem jednowymiarowych zmiennych losowych określonych na tej przestrzeni.

Definicja 8

Mówimy, że ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ zmiennych losowych jest zbieżny prawie na pewna do zmiennej losowej X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P\left(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1 \tag{11}$$

i oznaczamy $X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X$.

Różne pojęcia zbieżności. II

Definicja 9

Mówimy, że ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ zmiennych losowych jest zbieżny według prawdopodobieństwa do zmiennej losowej X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} P\left(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) = 0 \tag{12}$$

i oznaczamy $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$.

Różne pojęcia zbieżności. III

Definicja 10

Mówimy, że ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *zmiennych losowych jest zbieżny według p-tego momentu, dla* $0 < p < +\infty$, *do zmiennej losowej* X *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$X \in L^p(\Omega) \wedge \forall_{n\in\mathbb{N}} X_n \in L^p(\Omega) \wedge \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0. \tag{13}$$

i oznaczamy $X_n \xrightarrow{\mathrm{L^p}} X$.

Własności zbieżności. I

Twierdzenie 3

Niech $X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X$ *oraz* $Y_n \xrightarrow{\text{p.n.}} Y$. *Wówczas*

1. *dla dowolnych* $a, b \in \mathbb{R}$ *zachodzi* $aX_n + bY_n \xrightarrow{\text{p.n}} aX + bY$,
2. $X_n Y_n \xrightarrow{\text{p.n}} XY$,
3. *jeśli* $P\left(\{\omega : X(\omega) \neq 0\}\right) = 1$, *to* $\mathbb{I}_{\{\omega : X(\omega) \neq 0\}} \frac{1}{X_n} \xrightarrow{\text{p.n}} \frac{1}{X}$.

Własności zbieżności. II

Twierdzenie 4

Następujące warunki są równoważne

$$X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X \tag{14}$$

$$\forall_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| \leqslant \varepsilon\}\right) = 1, \tag{15}$$

$$\forall_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) = 0, \tag{16}$$

$$\forall_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k,l\geqslant n}^{\infty} \{\omega : |X_k(\omega) - X_l(\omega)| \leqslant \varepsilon\}\right) = 1. \tag{17}$$

Własności zbieżności. III

Wniosek 6

Jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0} \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) < \infty,$$

to $X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X$.

Wniosek 7

Jeśli $X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X$, *to* $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$.

Twierdzenie 5

Jeśli $X_n \xrightarrow{\text{L}^\text{p}} X$, *to* $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$. *Gdy dodatkowo* $\exists_K \forall_{n\geqslant 1} |X_n| \leqslant K$, *to jeśli* $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$, *to* $X_n \xrightarrow{\text{L}^\text{p}} X$.

Własności zbieżności. IV

Twierdzenie 6

Niech $X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X$ *i niech istnieje* $\mathbb{R} \ni p > 0$ *oraz zmienna losowa* Z *taka, że*

1. $\forall_{n\in\mathbb{N}} |X_n|^p \leqslant Z^p$,
2. $\mathbb{E}(Z^p) < +\infty$.

Wtedy $X_n \xrightarrow{\mathrm{L^p}} X$.

Twierdzenie 7

Niech $p \geqslant 1$ *oraz* $X_n \xrightarrow{\mathrm{L^p}} X$. *Wtedy dla dowolnego* $q \in [1, p]$ *zachodzi* $X_n \xrightarrow{\mathrm{L^q}} X$.

Własności zbieżności. V

Przykład 2

Niech dany będzie ciąg $(A_n)_{n\geqslant 1}$ *zdarzeń niezależnych takich, że*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

Wtedy dla ciągu zmiennych losowych $(X_n)_{n\geqslant 1}$, *gdzie* $X_n = \mathbb{I}_{A_n}$, *zachodzi*

1. $X_n \xrightarrow{\mathrm{L^p}} 0$,
2. $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$

oraz nie zachodzi $X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} 0$.

Własności zbieżności. VI

Przykład 3

Niech $\Omega =]0,1]$ *i* $A_n :=]0, \frac{1}{n}]$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy dla ciągu zmiennych losowych* $(X_n)_{n \geqslant 1}$, *gdzie* $X_n = 2^n \mathbb{I}_{A_n}$ *zachodzi*

1. $X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} 0$
2. $X_n \xrightarrow{\text{P}} 0$

oraz nie zachodzi $X_n \xrightarrow{\text{L}^{\text{p}}} 0$.

Twierdzenie 8 (Twierdzenie Riesza)

Jeśli $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$, *to istnieje podciąg* (X_{n_k}) *taki, że* $X_{n_k} \xrightarrow{\text{p.n.}} X$.

Własności zbieżności. VII

Twierdzenie 9

Ciąg zmiennych losowych jest zbieżny według prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podciąg zawiera podciąg zbieżny prawie na pewno.

Wniosek 8

Niech $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$, f *będzie funkcją ciągłą na zbiorze* A *oraz* $P\left(\{\omega : X(\omega) \in A\}\right) = 1$, *to* $f(X_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} f(X)$.

Własności zbieżności. VIII

Twierdzenie 10

Niech $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ *oraz* $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} Y$. *Wówczas*

1. *dla dowolnych* $a, b \in \mathbb{R}$ *zachodzi* $aX_n + bY_n \xrightarrow{\mathrm{P}} aX + bY$,
2. $X_n Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} XY$,
3. *jeśli* $P(\{\omega : X(\omega) \neq 0\}) = 1$, *to* $\mathbb{I}_{\{\omega : X(\omega) \neq 0\}} \frac{1}{X_n} \xrightarrow{\mathrm{P}} \frac{1}{X}$.

Bibliografia

[1] Gerstenkorn Tadeusz i Śródka Tadeusz. *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa*. wyd. 6. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1980. ISBN: 83-01-00204-2.