Metody probabilistyczne i statystyka - wykład szósty[1]

dr Jarosław Kotowicz

Instytut Informatyki Uniwersytet w Białymstoku

wersja z roku ak. 2021/22

Spis treści

Pojęcie prawa wielkich liczb. I

Niech $(X_n)_{n \geqslant 1}$ będzie ciągiem jednowymiarowych i całkowalnych zmiennych losowych określonych na przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P). Wprowadźmy oznaczenie

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Definicja 1

Mówimy, że ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n \geqslant 1}$ spełnia mocne prawo wielkich liczb (MPWL) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{p.n.} 0. \tag{1}$$

Pojęcie prawa wielkich liczb. II

Definicja 2

Mówimy, że ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n\geqslant 1}$ spełnia słabe prawo wielkich liczb (SPWL) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0. \tag{2}$$

Warunki dostateczne - SPWL.

Twierdzenie 1

Niech ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n\geqslant 1}$ całkowalnych z kwadratem spełnia jeden z warunków

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathbb{D}^2(S_n)}{n^2} = 0$,
2. *zmienne losowe ciągu $(X_n)_{n\geqslant 1}$ są parami nieskorelowane i mają wspólnie ograniczoną wariancję.*

Wówczas ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ spełnia SPWL.

Słabe prawo wielkich liczb Bernoulliego. I

Twierdzenie 2

Jeżeli przez S_n oznaczymy liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego n prób z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p, to

$$\forall_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0. \tag{3}$$

Warunki dostateczne - MPWL. I

Lemat 1 (Twierdzenie Toeplitza)

Niech $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *będzie ciągiem liczb nieujemnych i niech ciąg* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *będzie ciągiem rosnącym liczb dodatnich określonych następująco* $b_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$*. Wówczas jeżeli ciąg* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *jest ciągiem zbieżnym o granicy równej* x*, to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = x. \tag{4}$$

Warunki dostateczne - MPWL. II

Lemat 2 (Twierdzenie Kroneckera)

Niech $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *będzie rosnącym ciągiem liczb dodatnich rozbieżnym do nieskończoności, a* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *ciągiem liczb rzeczywistych takim, że szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *jest zbieżnym. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k x_k = 0. \tag{5}$$

W szczególności jeśli $b_n = n$ *oraz* $x_n = \frac{y_n}{n}$*, to jeżeli szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n}$ *jest zbieżny, to* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_1+\ldots+y_n}{n} = 0$.

Warunki dostateczne - MPWL. III

Twierdzenie 3 (Kołmogorowa)

Niech $(X_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych całkowalnych z kwadratem. Niech $(b_n)_{n\geqslant 1}$ będzie rosnącym ciągiem liczb dodatnich takich, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ i szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{D}^2(X_n)}{b_n^2}$ jest zbieżny tzn. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{D}^2(X_n)}{b_n^2} < +\infty$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{b_n} = 0 \ P\text{-p.n.} \ . \tag{6}$$

W szczególności, jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{D}^2(X_n)}{n^2}$ jest zbieżny, to ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ spełnia MPWL.

Warunki dostateczne - MPWL. IV

Lemat 3

Niech X będzie nieujemną zmienna losową. Wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\{\omega : X(\omega) \geqslant k\}\right) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\{\omega : X(\omega) \geqslant k\}\right). \tag{7}$$

Wniosek 1

Jeżeli nieujemna zmienna losowa X jest całkowalna, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\{\omega : X(\omega) \geqslant k\}\right)$ jest zbieżny.

Warunki dostateczne - MPWL. V

Wniosek 2

Jeżeli dla nieujemnej zmiennej losowej X szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(\{\omega : X(\omega) \geqslant k\}\right)$ jest zbieżny to zmienna X jest całkowalna.

Twierdzenie 4 (MPWL Kołmogorowa)

Niech $(X_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach i całkowalnych. Wtedy ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ spełnia MPWL.

Twierdzenie 5 (Chinczyna)

Ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ zmiennych losowych parami niezależnych o jednakowym rozkładzie i całkowalnych spełnia SPWL.

Spis treści

Liczby zespolone (przypomnienie wiadomości).

Liczbą zespoloną nazywamy liczbę

$$z = a + i \cdot b, \text{ gdzie } a, b \in \mathbb{R} \text{ oraz } i^2 = -1.$$

Mamy

$$\begin{aligned}
\Re(z) &:= a \text{ (część rzeczywista liczby zespolonej)},\\
\Im(z) &:= b \text{ (część urojona liczby zespolonej)},\\
|z| &:= \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (moduł liczby zespolonej)}\\
\overline{z} &:= a - i \cdot b \text{ (sprzężenie liczby zespolonej)}\\
z &= |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \text{ (postać trygonometryczna liczby zespolonej)}\\
e^{it} &= \cos(\varphi) + i \sin(\varphi), \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Funkcje o wartościach zespolonych.

Funkcję o wartościach w zbiorze liczb zespolonych ($\mathbb{C}$). Ograniczymy się do funkcji zespolonych argumentu rzeczywistego tzn. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Wtedy

$$
\begin{aligned}
f &= \Re(f) + i\Im(f), \text{ gdzie } \Re(f), \Im(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\
|f| &:= \sqrt{(\Re(f))^2 + (\Im(f))^2} \\
f & \quad \text{jest całkowalna } \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty, \\
f & \quad \text{jest całkowalna } \Leftrightarrow \Re(f) \text{ oraz } \Im(f) \text{ są całkowalne}, \\
\int_{\mathbb{R}} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \Re(f)(x) dx + i \int_{\mathbb{R}} \Im(f)(x) dx.
\end{aligned}
$$

Zmienne losowe o wartościach zespolonych.

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, zaś η jednowymiarową zmienną o wartościach zespolonych. Wtedy zmienna η jest całkowalna z p-tą potęgą, gdzie $p \in \mathbb{R}_+$, wtedy i tylko wtedy, gdy $|\eta|^p \in L^1(\Omega)$. Będziemy wtedy pisać

$$\eta \in L^p(\Omega).$$

Ponadto wtedy

$$\int_\Omega \eta dP = \int_\Omega \Re(\eta) dP + i \int_\Omega \Im(\eta) dP.$$

Pojęcie funkcji charakterystycznej.

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, zaś X jednowymiarową zmienną.

Definicja 3

Funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X nazywamy funkcję $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zadaną wzorem

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}(e^{itX}) \equiv \mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\sin(tX)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Uwaga 1

1. *Ponieważ $|e^{itX}| = 1$ więc funkcja charakterystyczna jest dobrze określona dla dowolnej zmiennej losowej X.*
2. *Ze zmienną X jest związana zmienna zespolona $e^{itX} = \exp(itX)$.*

Własności funkcji charakterystycznej. I

Twierdzenie 6

Niech φ_X będzie funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X. Wtedy

1. $\varphi_X(0) = 1$,
2. $|\varphi_X(t)| \leqslant 1$ *dla dowolnego* $t \in \mathbb{R}$,
3. $\varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(-t)}$ *dla dowolnego* $t \in \mathbb{R}$,
4. φ_X *jest jednostajnie ciągła, a więc ciągła.*