Metody probabilistyczne i statystyka - wykład siódmy[1]

dr Jarosław Kotowicz

Instytut Informatyki Uniwersytet w Białymstoku

wersja z roku ak. 2021/22

Spis treści

1. Funkcje charakterystyczne zmiennych losowych i rozkładów cd.
2. Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a

Własności funkcji charakterystycznej cd. I

Uwaga 1

Definiuje się też funkcję charakterystyczną rozkładu prawdopodobieństwa μ na $\mathbb{R}$ wzorem

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi_\mu(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mu(dx).$$

W przypadku funkcji charakterystycznej rozkładu zmiennej losowej obie definicję określają ten sam obiekt.

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, zaś X jednowymiarową zmienną, a φ jej funkcją charakterystyczną.

Własności funkcji charakterystycznej cd. II

Wniosek 1

Funkcja charakterystyczna rozkładu μ jest rzeczywista wtedy i tylko wtedy, gdy μ jest rozkładem symetrycznym.

Definicja 1

Funkcję $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nazywamy dodatnio określoną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{t_1,\dots,t_n\in\mathbb{R}}\forall_{z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}} \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} \psi(t_k - t_n) z_k \overline{z_l} \geqslant 0. \tag{1}$$

Twierdzenie 1 (Bochnera)

Funkcja $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła, dodatnio określona i $\varphi(0) = 1$.

Własności funkcji charakterystycznej cd. III

Twierdzenie 2

Niech $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $X \in L^n(\Omega)$, to n-ta pochodna funkcji charakterystycznej $\varphi_X^{(n)}$ istnieje i jest jednostajnie ciągła, a ponadto

$$\varphi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}(X^n). \tag{2}$$

Uwaga 2

Używać będziemy symbolu Landaua $\mathrm{o}(x)$, co znaczy

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{o}(x)}{x} = 0.$$

Własności funkcji charakterystycznej cd. IV

Wniosek 2

Niech $n \in \mathbb{N}$. *Jeżeli* $X \in L^n(\Omega)$, *to*

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(X^k) \cdot \frac{(it)^k}{k!} + o(t^n). \tag{3}$$

Twierdzenie 3

Jeżeli dwa rozkłady prawdopodobieństwa na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *mają równe funkcje charakterystyczne, to są sobie równe.*

Lemat 1

Niech $Y = aX + b$ *wtedy* $\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$ *dla dowolnego* $t \in \mathbb{R}$.

Własności funkcji charakterystycznej cd. V

Twierdzenie 4

Jeżeli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi, to

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y. \tag{4}$$

Lemat 2

Jeżeli μ jest rozkładem prawdopodobieństwa z funkcja charakterystyczną φ, to dla każdego $u > 0$ zachodzi

$$\mu\left(\left[-\frac{2}{u}, \frac{2}{u}\right]\right) \geqslant 1 - \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi(s))ds \tag{5}$$

Uwaga 3

Ostatni lemat wykorzystywany jest w dowodzie twierdzenia Lévy'ego-Craméra.

Własności funkcji charakterystycznej cd. VI

Twierdzenie 5 (Lévy'ego-Craméra)

Niech $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem rozkładów prawdopodobieństwa na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ i niech $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem ich funkcji charakterystycznych. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ i funkcja φ jest ciągła w zerze, to φ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu μ.

Twierdzenie 6 (Lévy'ego)

Jeżeli φ jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X o dystrybuancie F, to dla dowolnych $a < b$ takich, że dystrybuanta F jest ciągła w punktach a i b zachodzi

$$F(b) - F(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)dt. \tag{6}$$

Własności funkcji charakterystycznej cd. VII

Twierdzenie 7

Niech X będzie ciągłą zmienna losową o gęstości f i funkcji charakterystycznej φ. Jeżeli funkcja charakterystyczna φ jest całkowalna, to

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-itr} \varphi(t) dt. \tag{7}$$

Twierdzenie 8

Niech X będzie dyskretną zmienna losową przyjmującą wartości całkowite z funkcją charakterystyczną φ. Wówczas

$$\forall_{k \in \mathbb{Z}} p_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \varphi(t) dt. \tag{8}$$

Funkcja charakterystyczna rozkładów i zmiennych wielowymiarowych. I

Definicja 2

1. *Załóżmy, że μ jest rozkładem prawdopodobieństwa w $\mathbb{R}^d$. Funkcję*

$$\mathbb{R}^d \ni t \mapsto \varphi_\mu(t) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(t,x)}\mu(dx),$$

nazywamy funkcją charakterystyczną rozkładu μ.

2. *Załóżmy, że X jest zmienną losową o wartościach w $\mathbb{R}^d$, określoną na (Ω, Σ, P). Wówczas $\varphi_X := \varphi_{\mu_X}$ nazywamy funkcją charakterystyczną (rozkładu) zmiennej losowej X.*

Funkcja charakterystyczna rozkładów i zmiennych wielowymiarowych. II

Uwaga 4

Zauważmy, że (t, x) *w definicji oznacza iloczyn skalarny tzn.:*

$$(t, x) := \sum_{i=1}^{d} t_i \cdot x_i.$$

Uwaga 5

Z twierdzenia o zamianie zmiennych wynika, iż $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{i(t,X)})$.

Uwaga 6

Funkcja charakterystyczna rozkładów i zmiennych wielowymiarowych posiada identyczne własności, jak funkcja charakterystyczna jednowymiarowej zmiennej losowej lub rozkładów prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$*. Ponadto zachodzi dla niej twierdzenie Bochnera.*

Spis treści

1 Funkcje charakterystyczne zmiennych losowych i rozkładów cd.

2 Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a

Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a. I

Będziemy rozważać schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p (prawdopodobieństwo porażki oznaczymy q) oraz ilością sukcesów równą k.

Przyjmijmy następujące oznaczenia

$$B(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-1} \tag{9}$$

$$h \overset{\text{ozn}}{=} \frac{1}{\sqrt{npq}} \tag{10}$$

$$\delta_k \overset{\text{ozn}}{=} k - np \tag{11}$$

$$x_k \overset{\text{ozn}}{=} \frac{\delta_k}{\sqrt{npq}} \equiv \delta_k h. \tag{12}$$

Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a. II

Mamy wtedy

$$n - k = nq - \delta_k \tag{13}$$

$$\frac{k}{np} = 1 + x_k qh \tag{14}$$

$$\frac{n-k}{nq} = 1 - x_k ph. \tag{15}$$

Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a. III

Twierdzenie 9 (Moivre'a - Laplace'a lokalne)

Jeżeli $h|x_k|\max\{p,q\} \leqslant \frac{1}{2}$, *to*

$$B(k,n,p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x_k^2}{2}} e^{R(n,k)}, \tag{16}$$

przy czym

$$|R(n,k)| \leqslant \frac{3}{4}|x_k|h + \frac{1}{3}|x_k|^3 h + \frac{1}{3n}. \tag{17}$$

W szczególności jeżeli n *i* k *zbiegają do nieskończoności w taki sposób, że* hx_k^3 *zbiega do zera, to* $R(n,k)$ *również zbiega do zera.*

Przyjmijmy oznaczenie

$$x_{a\pm\frac{h}{2}} \overset{\text{ozn}}{=} x_a \pm \frac{h}{2}.$$

Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a. IV

Przez Φ będziemy oznaczać dystrybuantę rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0,1)$.

Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a. V

Twierdzenie 10 (Moivre'a - Laplace'a globalne)

Jeżeli $h \max\{|x_a|, |x_b|\}\, |x_k| \max\{p, q\} \leqslant \frac{1}{2}$, *to*

$$P(\{\omega : a \leqslant S_n(\omega) \leqslant b\}) = \left[\Phi(x_{b+\frac{1}{2}}) - \Phi(x_{a-\frac{1}{2}})\right] e^{D(n,a,b)}, \tag{18}$$

gdzie

$$|D(n, a, b)| \leqslant \max_{k \in \{a,b\}} \left[\frac{5}{4}|x_k| h + \frac{1}{3}|x_k|^3 h\right] + \frac{1}{3n} + \frac{h^2}{8}. \tag{19}$$

W szczególności jeżeli n zbiega do nieskończoności, zaś a i b zmieniają się tak, że $\max\{x_a^3 h, x_b^3 h\}$ *zbiega do zera, to* $D(n, a, b)$ *również zbiega do zera oraz*

$$P(\{\omega : a \leqslant S_n(\omega) \leqslant b\}) \sim \Phi(x_{b+\frac{1}{2}}) - \Phi(x_{a-\frac{1}{2}}) \tag{20}$$

$$P(\{\omega : a \leqslant S_n(\omega) \leqslant b\}) \sim \Phi(x_b) - \Phi(x_a) \tag{21}$$