Rachunek prawdopodobieństwa - ćwiczenia siódme*
Jednowymiarowy rozkład normalny.
kierunek: informatyka i ekonometria I°

dr Jarosław Kotowicz

24 listopada 2011 r.

Spis treści

1 Zadania z wykładu

Zadanie 1. *Strzelamy 300 razy do tarczy z prawdopodobieństwem trafienia w jednym strzale wynoszącym 1/4. Z nierówności Czebyszewa oszacować prawdopodobieństwo*

$$P(\{\omega : |X(\omega) - 75| < 30\}),$$

gdzie X jest zmienną losową oznacza liczbę trafień do tarczy.

Zadanie 2. *Rzucamy n razy monetą.*

Niech zmienna losowa X oznacza ilość wyrzuconych orłów. Korzystając z nierówności Czebyszewa znaleźć takie n, aby

$$P(\{\omega : |\frac{1}{n}X(\omega) - \frac{1}{2}| < \frac{1}{10}\}) > \frac{9}{10}.$$

2 Zadania do samodzielnego rozwiązania

2.1 Jednowymiarowy rozkład normalny

1. Wyrazić za pomocą dystrybuanty rozkładu normalnego standardowego następujące prawdopodobieństwo $P(\{\omega : |X(\omega)| < 3\})$, jeśli zmienna losowa $X \in N(2,3)$.

2. Przy założeniu $X \in N(1,1)$, wyznaczyć
   - $P(\{\omega : X(\omega)(1 - X(\omega)) > 0\})$,
   - $P(\{\omega : X(\omega)(1 - X(\omega)) < 0\})$,
   - $P(\{\omega : X^3(\omega) - X(\omega) > 0\})$,
   - $P(\{\omega : X^3(\omega) - X(\omega) < 0\})$,
   - $P(\{\omega : 1 < \frac{1}{|X(\omega)|} < 2\})$.

3. Policzyć następujące prawdopodobieństwa rozkładu normalnego standardowego

- $P(\{\omega : X(\omega) \geqslant 3\})$,
- $P(\{\omega : |X(\omega) - 1| > 2\})$,
- $P(\{\omega : 1 < \frac{1}{|X(\omega)|} < 2\})$.

4. Zmienna losowa $X \in N(3, 5)$. Obliczyć prawdopodobieństwo
   - $P(\{\omega : \frac{1}{X(\omega)} - 1 > 0\})$,
   - $P(\{\omega : X^3(\omega) - 1 > 0\})$,
   - $P(\{\omega : \frac{1}{X(\omega)} - 1 > 0\})$.

5. Zmienna losowa $X \in N(2, 4)$. Wyrazić prawdopodobieństwo
   - $P(\{\omega : \frac{X(\omega)-2}{X(\omega)} > -1\})$,
   - $P(\{\omega : (1 - X(\omega))X(\omega) > 0\})$,
   - $P(\{\omega : X^2(\omega) - 1 > 0\})$,
   - $P(\{\omega : \frac{X(\omega)-4}{X(\omega)} > 0\})$

   za pomocą wartości dystrybuanty rozkładu normalnego standaryzowanego.

2.2 Nierówności związane z momentami

1. Z klasycznej nierówności Czebyszewa ocenić prawdopodobieństwo, że zmienna losowa o rozkładzie normalnym standardowym odchyli się od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż
   - cztery średnie odchylenia,
   - trzy średnie odchylenia.
2. X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
   - Oszacować z nierówności Czebyszewa $P(|X| \geqslant \frac{3}{2})$
   - Obliczyć $P(|X| \geqslant \frac{3}{2})$ bezpośrednio.
3. X ma rozkład normalny $N(0, 1)$. Oszacować z góry $P(|X| \geqslant 3)$ przy pomocy
   - nierówności Czebyszewa
   - tablic
4. Zmienne losowe $X_i, i \in \mathbb{N}$ są niezależne i mają jednakowe rozkłady $P(\{X_i = k\}) = 0,2, k = 1,2,3,4,5$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że zmienna $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ przyjmie wartość większą od 320.
5. Rzucamy n razy symetryczną monetą. Niech zmienna losowa X_k oznacza wyrzucenie orła za k razem. Korzystając z nierówności, Czebyszewa oszacować n aby

$$P(\{\omega : |\frac{1}{n}\sum_{i+1}^{n} X_i(\omega) - \frac{1}{2}| < \frac{1}{10}\}) > \frac{9}{10}.$$