Rachunek prawdopodobieństwa - lista dziewiąta*
Prawa wielkich liczb i centralne twierdzenie graniczne.
kierunek: informatyka i ekonometria I°

dr Jarosław Kotowicz

13 stycznia 2012 r.

Spis treści

1 Zadania z wykładów

Zadanie 1. *Rozstrzygnąć, czy dla ciągu (X_n) niezależnych zmiennych losowych o niżej podanych rozkładach jakie są spełnione warunki dostateczne stosowalności PWL (MPWL)*

- $P(\{\omega : X_n(\omega) = \pm 2^n\}) = \frac{1}{2}$;
- $P(\{\omega : X_n(\omega) = \pm 2^n\}) = 2^{-(2n+1)}$, $P(\{\omega : X_n(\omega) = 0\}) = 1 - 2^{-2n}$;
- $P(\{\omega : X_n(\omega) = \pm n\}) = \frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}}$, $P(\{\omega : X_n(\omega) = 0\}) = 1 - n^{-\frac{1}{2}}$.

Zadanie 2. *Niech (X_k) będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie:*

- $$P(\{\omega : X_k(\omega) = \frac{(-1)^i}{i}\}) = \frac{1}{2^i}, i, k \in \mathbb{N};$$
- $$P(\{\omega : X_k(\omega) = i\}) = \frac{e^{-1}}{i!}, k \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Wykazać, że dla zmiennych losowych zachodzi MPWL.

Zadanie 3. *Niech będzie dany ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $\{X_n | n \geqslant 1\}$ taki, że $E(X_1) = 0$ i $D^2(X_1) = 1$. Określmy ciąg*

- $Y_n = a + \alpha^n X_n$;
- $Y_n = a + n^\alpha X_n$.

Dla jakich wartości parametru α spełnia on

- *PWL?*
- *MPWL?*

Zadanie 4. *Partia towaru ma wadliwość 7 % . Pobrano próbkę 800 elementową. Obliczyć prawdopodobieństwo, że ilość sztuk wadliwych w tej próbie jest zawarta w granicach 6 % - 9 %.*

Zadanie 5. *Strzelamy 300 razy, przy czym prawdopodobieństwo za każdym razem trafienia do celu wynosi 0,25. Określić prawdopodobieństwo, że liczba celnych strzałów będzie się różnic o nie więcej niż 0,1 od*

- *ogólnej liczby strzałów.*
- *najbardziej prawdopodobnej liczby celnych strzałów.*

Zadanie 6. *Prawdopodobieństwo, że w ciągu czasu T przestanie działać jeden kondensator jest równe 0,2. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że spośród 100 kondensatorów w ciągu czasu T przestanie działać*

- *nie mniej niż 20 kondensatorów;*
- *mniej niż 20 kondensatorów;*
- *od 14 do 26 kondensatorów.*

2 Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że
   - $$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{c}} \exp\left[-\frac{(x-c^n)^2}{\sqrt{n}}\right], c \in (0,1), n \in \mathbb{N};$$
   - $P(\{X_n = n\}) = \frac{1}{1+n^2}$ i $P(\{X_n = -\frac{1}{n}\}) = \frac{n^2}{1+n^2}$;
   - $P(\{X_n = \sqrt{n}\}) = P(\{X_n = -\sqrt{n}\} = \frac{1}{n}$ i $P(\{X_n = 0\}) = 1 - \frac{2}{n}$

   Czy ciąg spełnia MPWL?
2. Niech będzie dany ciąg niezależnych zmiennych losowych
   - $\{X_n | n \geqslant 3\}$ i $P(X_n = \pm \ln n) = \frac{1}{2}$;
   - $\{X_n | n \geqslant 1\}$ i $P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right), P(X_n = 2^{\pm n}) = \frac{1}{2^{n+1}}$,

   Czy ciąg ten spełnia
   - PWL?
   - MPWL?
3. Niech będzie dany ciąg zmiennych losowych $\{X_n | n \geqslant 2\}$ taki, że $X_n \in N(0, \ln n)$. Czy spełnia on PWL?
4. Niech będzie dany ciąg zmiennych losowych $\{X_n | n \geqslant 1\}$ taki, że $P(X_n = 2^n) = P(X_n = -2^n) = 2^{-(2n+1)}, P(X_n = 0) = 1 - 2^{-2k}$. Czy spełnia on MPWL? Niech X_n zbiega z według prawdopodobieństwa do X podać wzór na zmienną losowej X i pokazać powyższą zbieżność.
5. Niech $\{X_k | k \in \mathbb{N}\}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie:
   $$P(\{\omega | X_k(\omega) = i\}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}, i, k \in \mathbb{N}.$$
   Wykazać, że dla zmiennej losowej $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ zachodzi MPWL.

6. Przeprowadzono 60 jednakowych prób, w których mogło zajść zdarzenie A. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenie w pojedynczej próbie wynosi $0,6$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że zdarzenie nie pojawi się w większości prób.

7. W 10 000 rzutów monetą orzeł wypadł 5400 razy. Uzasadnij przypuszczenie, że moneta jest niesymetryczna.

8. Korzystając z prawa wielkich liczb Moivre'a - Laplace'a oszacować prawdopodobieństwo, że w 720 rzutach kostką ilość szóstek będzie

   - zawierać się pomiędzy 121 a 140
   - mniejsza niż 125
   - większa niż 110

9. Rzucamy 1000 razy kostką. Niech zmienna losowa S oznacza sumę wyrzuconych oczek. Na podstawie twierdzenia Lindeberga

   - ocenić $P(3450 \leqslant S \leqslant 3550)$,
   - znaleźć takie N, M jak najmniej różniące się od siebie, aby $P(M \leqslant S \leqslant N) > 99/100$.