Algebra liniowa z geometrią analityczną

Lista 1

Zadanie 1. Określ wykonalność zwykłego dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia w zbiorach liczbowych: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}, \mathbb{IQ}$.

Zadanie 2. Zbadaj własności, tzn. przemienność, łączność, istnienie elementu neutralnego, istnienie elementów przeciwnych (odwrotnych), następujących działań:

(i) $\circ\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określone wzorem $a \circ b = a + b + 1$,

(ii) $\diamond\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ określone wzorem $(a, b) \diamond (c, d) = (a + c, b - d)$,

(iii) $*\colon \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ określone wzorem $a * b = \begin{cases} 0, & \text{dla } a+b \text{ parzystych}, \\ 1, & \text{dla } a+b \text{ nieparzystych}, \end{cases}$ gdzie $\mathbb{A} = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$.

(iv) działanie $\#$ określone na zbiorze $\mathbb{Q}$ wzorem $a\#b = \frac{a+b}{2}$.

Zadanie 3. W zbiorze $A = \{a, b, c, d, e\}$ określamy działanie dwuargumentowe. Zbuduj tabelkę tego działania tak, aby:

(i) działanie to było przemienne,

(ii) element a był elementem neutralnym tego działania,

(iii) $ab = ba = cd = dc = b$.

Zadanie 4. Dla danego $n \in \{2, 3, 4, 6\}$ zbuduj tabelki działań $+_n$ oraz $\cdot_n$. Określ ich własności. Który ze zbiorów $\mathbb{Z}_n$ z tymi działaniami jest ciałem?

Zadanie 5. Oblicz

(i) $3 + 4, 3 \cdot 4, 3 - 4, 3 \cdot 2^{-2}$ w ciele $\mathbb{Z}_2$,

(ii) 3^{-1} w ciałach $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}$,

(iii) $4^{12}(5^2 - 6)(2 \cdot (-3))^{-1}$ w ciele $\mathbb{Z}_{11}$.

Zadanie 6. Zbadaj własności składania przekształceń w zbiorze izometrii własnych

(i) trójkąta równobocznego,

(ii) prostokąta,

(iii) kwadratu.

Algebra liniowa z geometrią analityczną

Lista 2

Zadanie 1. Sprawdź, czy

(i) zbiór $\mathbb{R}$ wraz z działaniem $a * b = a + b + 5$,

(ii) zbiór $\mathbb{Z}$ z działaniem $a\#b = (-1)^a b + (-1)^b a$,

(iii) zbiór $\mathbb{R}$ z działaniem $a \cdot b = ab + a + b$.

tworzy grupę.

Zadanie 2. Znajdź takie liczby rzeczywiste a i b, aby

(i) $a(2+3i) + b(4-5i) = 6-2i$,

(ii) $a(-\sqrt{2}+i) + b(3\sqrt{2}+5i) = 8i$,

(iii) $a(4-3i)^2 + b(1+i)^2 = 7-12i$.

Zadanie 3. Przedstaw w postaci algebraicznej następujące liczby zespolone:

(i) $(2+i)(4-i) + (1+2i)(3+4i)$,

(ii) $\dfrac{(3+i)(7-6i)}{3-i}$,

(iii) $(1+2i)i + \dfrac{2+3i}{1-4i}$.

Zadanie 4. Rozwiąż podane równania w liczbach zespolonych:

(i) $|z| + 2\overline{z} = 11 + 8i$,

(ii) $z^2 + (2-4i)z + 1 - 4i = 0$,

(iii) $|z| - 2\overline{z} = -1 - 8i$.

Zadanie 5. Oblicz:

(i) $\dfrac{(1+i)^{17}}{(2-2\sqrt{3}i)^3}$,

(ii) $\dfrac{(1-i)^{15}}{(2+2\sqrt{3}i)^3}$,

(iii) $\sqrt[3]{4+4i}$,

(iv) $\sqrt[4]{-64i}$.

Algebra liniowa z geometrią analityczną

Lista 3

Zadanie 1. Które z podanych zbiorów są ciałami względem zwykłych działań dodawania i mnożenia liczb:

(i) $\mathbb{Z}$,

(ii) $\{0, 1\}$,

(iii) $K = \{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Zadanie 2. Czy zbiór liczb rzeczywistych z działaniami $\oplus$ i $\otimes$ zdefiniowanymi następująco

$$a \oplus b = a + b + 1, \qquad a \otimes b = a + b + ab$$

jest ciałem?

Zadanie 3. Czy zbiór par liczb wymiernych z działaniami $\oplus$ i $\otimes$ zdefiniowanymi następująco

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \qquad (a, b) \otimes (c, d) = (ac, bd)$$

jest ciałem?

Zadanie 4. Czy zbiór par liczb rzeczywistych z działaniami $\oplus$ i $\otimes$ zdefiniowanymi następująco

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \qquad (a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

jest ciałem?

Algebra liniowa z geometrią analityczną

Lista 4

Zadanie 1. Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz zbiory:

- $A = \{z \in \mathbb{C}\colon \frac{5\pi}{3} \leqslant \operatorname{Arg}[(i+1)z]\}$,
- $B = \{z \in \mathbb{C}\colon |\frac{z-i}{z+3i}| < 1\}$
- $C = \{z \in \mathbb{C}\colon |z|^2 = 4\operatorname{Re} z\}$
- $D = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} \frac{z}{z+2i} = 15\}$,
- $E = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}(|z|^2 + z^2) = 4\}$,
- $F = \{z \in \mathbb{C}\colon |\frac{z-i}{z^2+1}| = 6\}$.

Zadanie 2. Przedstaw w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:

$$\text{(i) } 1+i, \quad \text{(ii) } -1+i\sqrt{3}, \quad \text{(iii) } -\sqrt{3}-i, \quad \text{(iv) } 1+i\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{(v) } \sin\alpha - i\cos\alpha.$$

Zadanie 3. W zbiorze liczb zespolonych rozwiąż następujące równania:

(i) $\dfrac{\overline{z^3}}{(-1-i\sqrt{3})^4} = |z|$,

(ii) $\dfrac{z^3}{(-1-i\sqrt{3})^2}\overline{z} = |z|^3$,

(iii) $\dfrac{z^5|z|^3}{i-\sqrt{3}} = \overline{z^2}(1+i)$,

(iv) $\overline{z} = z^3$.

Zadanie 4. Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz następujące liczby zespolone oraz liczby z nimi sprzężone: $2+i$, $2-i$, $-3+4i$, 2, $3i$, $5i-4$. Oblicz moduły tych liczb.

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z spełniające równania:

(i) $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}z^3 = \dfrac{8\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)^{10}}{\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}}$,

(ii) $\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)^9 z^4 = \dfrac{8\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{10}}{\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)^5}$.

Zadanie 6. Wiedząc, że $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ oblicz wartość wyrażenia:

$$\omega^{100} + \omega^{200} + \omega^{300} + \cdots + \omega^{3000}.$$

Zadanie 7. W liczbach zespolonych rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i \end{cases}$$

Zadanie 8. Wyznacz i zaznacz na płaszczyźnie zbiór liczb zespolonych spełniających:

$$\text{(i) } |z-1| = 1, \qquad \text{(ii) } |z+2-i| = 3, \qquad \text{(iii) } |z-1| = |z+1|, \qquad \text{(iv) } |z-\overline{z}| = 2.$$

Algebra liniowa z geometrią analityczną

Lista 5

Zadanie 1. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu f przez g dla:

(i) $f = 5x^3 + 2x^2 - x - 7, \quad g = x^2 + 3x - 1 \quad$ w $\mathbb{Z}[x]$,
(ii) $f = 3x^3 - 2x + 4, \quad g = x^4 + 1 \quad$ w $\mathbb{Q}[x]$,
(iii) $f = 2x^4 - 5x^2 + 2x, \quad g = x^2 - 1 \quad$ w $\mathbb{R}[x]$,
(iv) $f = z^5 + 3z^2 + 7zi - 1, \quad g = z - i \quad$ w $\mathbb{C}[z]$.

Zadanie 2. Znając niektóre pierwiastki podanych wielomianów rzeczywistych, znajdź ich pozostałe pierwiastki

(i) $f = x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 6x - 30, \quad x_1 = 1 - 3i$,
(ii) $f = x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 4x + 4, \quad x_1 = i,\ x_2 = -\sqrt{2}i$,
(iii) $f = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 7x - 3\sqrt{2}, \quad x_1 = \sqrt{2} + i$.

Zadanie 3. Podaj przykład wielomianu zespolonego najniższego stopnia, dla którego liczby $0,\ 1-5i$ są pierwiastkami pojedynczymi, a liczby $-1,\ -3+i$ są pierwiastkami podwójnymi.

Zadanie 4. Podaj przykład wielomianu rzeczywistego najniższego stopnia, dla którego liczby $1, -5, -\sqrt{2}, 1 - 3i$ są pierwiastkami pojedynczymi.

Zadanie 5. Zbadaj rozkładalność wielomianu $x^4 - x^2 + 1$ nad ciałem $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{C}$.

Zadanie 6. Wielomiany zespolone

$$f = z^2 - 2zi - 10, \qquad g = z^4 + 5z^2 + 6, \qquad h = z^3 - 6z - 9$$

przedstaw w postaci iloczynu dwumianów.

Zadanie 7. Podane wielomiany rzeczywiste przedstaw w postaci iloczynu nierozkładalnych czynników rzeczywistych:

$$f = x^6 + 8, \qquad g = x^4 + 4, \qquad h = 4x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 9x - 9,$$
$$r = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1, \qquad s = x^{12} + x^8 + x^4 + 1.$$

Zadanie 8. Wyraź funkcję wymierną w postaci sumy ułamków prostych nad ciałem liczb zespolonych:

$$p = \frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}, \qquad q = \frac{1}{x^4+4}, \qquad r = \frac{x}{(x^2-1)^2},$$
$$s = \frac{5x^2 + 6x - 23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}, \qquad t = \frac{x^2+2x}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Zadanie 9. Wyraź funkcję wymierną w postaci sumy ułamków prostych nad ciałem liczb rzeczywistych:

$$a = \frac{x^2}{x^4 - 16}, \qquad b = \frac{1}{x^4 + 4}, \qquad c = \frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}, \qquad d = \frac{1}{(x^4-1)^2},$$
$$e = \frac{12}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}, \qquad f = \frac{1}{x^3 + x}, \qquad g = \frac{x^2+1}{x^3(x+1)^2}.$$

Algebra liniowa z geometrią analityczną

Lista 6

Zadanie 1. Rozwiąż metodą eliminacji Gaussa. Jeżeli to możliwe wskaż rozwiązania szczególne.

$$\text{(i)} \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

$$\text{(iv)} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

$$\text{(v)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{(vi)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{(vii)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\text{(viii)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{(ix)} \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\text{(x)} \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{(xi)} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$$

Algebra liniowa z geometrią analityczną

Lista 7

Zadanie 1. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy:

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, (iv) $\begin{bmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}$, (vii) $\begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 2i & 1+i \end{bmatrix}$,

(ii) $\begin{bmatrix} \log_b a & 1 \\ 1 & \log_a b \end{bmatrix}$, (v) $\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix}$, (viii) $\begin{bmatrix} \cos x + i\sin x & 1 \\ 1 & \cos x - i\sin x \end{bmatrix}$,

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix}$, (vi) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, (ix) $\begin{bmatrix} \sin x & \cos x & 1 \\ \sin y & \cos y & 1 \\ \sin t & \cos t & 1 \end{bmatrix}$

Zadanie 2. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy:

(i) $\begin{bmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{bmatrix}$ dla $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{bmatrix}$ dla $z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$.

Zadanie 3. Wykorzystując rozwinięcie Laplace'a oraz własności wyznaczników oblicz wyznaczniki macierzy:

(i) $\begin{bmatrix} 428 & 430 \\ 429 & 431 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ a & b & c & d \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, (iii) $\begin{bmatrix} -3 & 3 & x \\ 4 & 4 & y \\ 5 & 5 & z \end{bmatrix}$, (iv) $\begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 1 & x+z & z \\ 1 & x & z+u \end{bmatrix}$,

(v) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, (vi) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, (vii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$, (viii) $\begin{bmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 t & \cos^2 t & 1 \end{bmatrix}$,

(ix) $\begin{bmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 1001 \\ 1001 & 1000 & 999 & 998 \end{bmatrix}$, (x) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 11 & 4 \\ 4 & 2 & 10 & 3 \end{bmatrix}$, (xi) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 3 & 3 \\ 10 & 11 & 12 & 4 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 5 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

wykonaj działania $AB + 2A$, BA^T, $B^2 + B$, $AB - 3B$.

Zadanie 5. Oblicz:

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 6. Oblicz:

(i) $\det \begin{bmatrix} 2+i & 1 & -1 \\ 0 & 3 & i \\ 2 & -i & 1 \end{bmatrix}$, (ii) $\det \begin{bmatrix} 2-i & 1 & -1 \\ 3 & -i & 2 \\ 1 & 0 & i \end{bmatrix}$.

Zadanie 7. Oblicz:

(i) $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (ii) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 8. Wykorzystując odpowiednio macierz odwrotną wyznacz X:

(i) $X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix}$,

(ii) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Algebra liniowa z geometrią analityczną

Lista 8

Zadanie 1. W ciele liczb zespolonych, stosując wzory Cramera, rozwiąż układ:

(i) $\begin{cases} 2x+2y+z &= 4+i \\ x+zi &= -1 \\ x-2y+z &= i-4 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 2x+2y+z &= 2+i \\ x+zi &= 0 \\ x-2y+z &= 1+i \end{cases}$

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametru k podany układ równań jest układem Cramera?

$$\begin{cases} 2x+2y+kz+4t &= 0 \\ x+2y+8t &= 3 \\ x+ky+k^2t &= -8 \\ x+3y+9t &= 0 \end{cases}$$

Zadanie 3. Za pomocą operacji na kolumnach (wierszach) ustal rząd macierzy:

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{bmatrix}$

Zadanie 4. Ustal rząd macierzy obliczając wyznaczniki jej minorów:

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 111 & 22 & 3 \\ 222 & 33 & 4 \\ 333 & 44 & 5 \\ 444 & 55 & 6 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 5 & 9 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Zadanie 5. W zależności od parametru λ wyznacz rząd macierzy:

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 2 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$.

Algebra liniowa z geometrią analityczną

Lista 9

Zadanie 1. Dla jakich wartości parametrów p, k podany układ posiada rozwiązania niezerowe:

(i) $$\begin{cases} 4px_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + (2+p)x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + (3+p)x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + (3+p)x_3 + 2x_4 &= 0 \end{cases}$$

(ii) $$\begin{cases} px_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + (1+p)x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + (2+p)x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + (3+p)x_3 + 2x_4 &= 0 \end{cases}$$

(iii) $$\begin{cases} x - ky - 3z &= 0 \\ px + y + 5z &= 0 \\ 2x + ky + z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{cases}$$

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametru a rozwiązanie poniższego układu jest zbiorem jednoelementowym?

$$\begin{cases} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a2 \end{cases}$$

Zadanie 3. Zbadaj warunki istnienia rozwiązania układu:

$$\begin{cases} ax + by &= 2ab \\ bx + ay &= a2 + b2 \end{cases}$$

Zadanie 4. Rozwiąż układy korzystając z twierdzenia Kroneckera-Capelle'go:

(i) $$\begin{cases} 2x + 3y - t &= 1 \\ x - y + t &= 1 \\ 3x + 2y &= 2 \end{cases}$$

(iv) $$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 3 \\ 3x + 3y + 3z &= 5 \end{cases}$$

(ii) $$\begin{cases} x - y + 3z &= 4 \\ 2x - y + z &= 3 \\ x - 2z &= 7 \end{cases}$$

(v) $$\begin{cases} 2x - 3y + 5z &= 4 \\ x + 4y - z &= 3 \\ 3x - 10y + 11z &= 5 \end{cases}$$

(iii) $$\begin{cases} x + y + z &= 2 \\ 2x + 2y + 2z &= 4 \\ 3x + 3y + 3z &= 6 \end{cases}$$