Geometria elementarna

Mariusz Żynel

29 marca 2021

Spis treści

1 Aksjomatyka

Próby sformalizowania matematyki rozpoczął Euklides w ok. 300 roku p.n.e. od geometrii w swoim dziele *Elementy* (gr. *Stoicheia geometrias*). *Elementy* były podstawowym podręcznikiem geometrii do XIX wieku. Założenia Euklidesa składały się z pięciu pojęć pierwotnych i pięciu postulatów:

I. Linia prosta może być narysowana między dwoma dowolnymi punktami.

II. Skończona linia prosta może być wydłużona dowolnie w linii prostej.

III. Okrąg może mieć środek w dowolnym punkcie i dowolny promień.

IV. Wszystkie kąty proste są równe.

V. Jeśli linia prosta przecina dwie inne linie proste tak, że suma dwóch kątów wewnętrznych po jednej jej stronie jest mniejsza niż suma dwóch kątów prostych, to te dwie linie proste przetną się po tej stronie po której suma kątów jest mniejsza od sumy dwóch kątów prostych.

Największe kontrowersje budził postulat V. Od dawna podważano jego niezależność od pozostałych. To co jedynie udało się zrobić to zastąpić go innymi zdaniami równoważnymi. Opuszczenie tego postulatu lub zastąpienie go innym dało początek geometriom *nieeuklidesowym*.

Znacznie nowocześniejsza i bardziej klarowna w stosunku do podejścia Euklidesa jest aksjomatyka Hilberta z przełomu XIX i XX wieku. Podamy teraz aksjomatykę Hilberta płaszczyzny euklidesowej. Pojęciami pierwotnymi stosowanymi w tej aksjomatyce są:

- punkt,
- prosta,
- relacja incydencji – *leżeć na*, lub *zawierać się w*,
- relacja uporządkowania – *leżeć między*,
- relacja przystawania.

Aksjomaty Hilberta płaszczyzny euklidesowej:

I. **Aksjomaty incydencji**

I.1 Dla każdych dwóch punktów istnieje prosta przechodząca przez te dwa punkty.

I.2 Dla każdych dwóch punktów istnieje nie więcej niż jedna prosta przechodząca przez te dwa punkty.

I.3 Na każdej prostej istnieją co najmniej dwa punkty. Istnieją co najmniej trzy punkty, które nie leżą na jednej prostej (nie są współliniowe).

II. **Aksjomaty równoległości**

II.1 Niech dana będzie prosta k oraz punkt a nie należący do niej. Wówczas istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez a i nie przecinająca prostej k.

III. **Aksjomaty uporządkowania**

III.1 Jeśli punkt b leży między punkatmi a i c, to punkty a, b, c są różnymi punktami tej samej prostej oraz punkt b leży także między punktami c oraz a.

III.2 Dla punktów a i c istnieje co najmniej jeden taki punkt b na prostej wyznaczonej przez a i c, ze punkt c leży między punktami a i b.

III.3 Spośród trzech danych punktów na prostej dokładnie jeden leży między dwoma pozostałymi.

III.4 (Aksjomat rozdzielania) Niech punkty a, b, c będą niewspółliniowe i niech prosta k będzie taka, że nie przchodni przez żaden z punktów a, b ani c. Jeśli prosta k ma punkt wspólny z odcinkiem ab, to ma również punkt wspólny z odcinkiem ac lub z odcinkiem bc.

IV. **Aksjomaty przystawania**

IV.1 Jeśli punkty a i b leżą na prostej k a punkt a' lezy na prostej k', to po każdej stronie punktu a' istnieje taki punkt b', że odcinki ab i $a'b'$ są przystające.

IV.2 Jesli odcinki $a'b'$ i $a''b''$ przystają do odcinka ab, to odcinki $a'b'$ i $a''b''$ są przystające.

IV.3 Jeśli punkt b leży między punktami a i c a punkt b' między punktami a' i c' oraz odcinki ab i $a'b'$ oraz bc i $b'c'$ są przystające, to przystające są także odcinki ac i $a'c'$.

IV.4 Jeśli $\measuredangle abc$ jest dany i dana jest półprosta $b'c'$, to po każdej stronie tej półprostej istnieje dokładnie jedna taka półprosta $b'a'$, że kąty $\measuredangle abc$ i $\measuredangle a'b'c'$ są przystające. Ponadto przystawanie katów jest relacją równoważności.

IV.5 Jeśli w trójkątach Δabc i $\Delta a'b'c'$ boki ab i $a'b'$ oraz ac i $a'c'$ a także kąty $\measuredangle bac$ i $\measuredangle b'a'c'$ są przystające, to przystające są pozostałe pary boków i kątów (innymi słowy trójkąty są przystające).

V. **Aksjomaty ciągłości**

V.1 (Aksjomat Archimedesa) Jesli ab i cd są dowolnymi odcinkami, to istnieje taka liczba n, że n kopii odcinka cd odłożonych na półprostej ab będzie dłuższe niż odcinek ab.

V.2 (Zupełność prostej) Nie można powiększyć zbioru punktów danej prostej i tak określić na tym większym zbiorze relacji uporządkowania i przystawania aby były spełnione aksjomaty I, III, IV i V.1

Dalej przez Π oznaczać będziemy płaszczyznę euklidesową spełniającą powyższą aksjomatykę. Jeśli nie jest powiedziane inaczej, to domyślnie wszystkie rozważane obiekty: punkty, proste, odcinki, okręgi itp. leżą na płaszczyźnie Π. Później wprowadzimy formalną definicję modelu Π płaszczyny euklidesowej.

Przedstawimy teraz przykład twierdzenia dowodzonego wprost z powyższej aksjomatyki.

Twierdzenie 1.1. *Każdy odcinek ma środek.*

Zanim jednak zrobimy dowód tego twierdzenia musimy sprecyzować co znaczą pojęcia *odcinek* i *środek odcinka*. W zasadzie powinniśmy podać te definicje przed sformułowaniem twierdzenia. Nie chodzi nam jdnak o formalną poprawność lecz o zoobrazowanie jak poruszać się po teorii zadanej zestawem aksjomatów.

Definicja 1.2. Niech dane będą dwa punkty a i b na płaszczyźnie Π. Odcinkiem o końcach a i b nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny Π leżących między punktami a i b. Można zapisać to w następujący sposób:

$$ab := \{x \in \Pi \colon x \text{ leży między } a, b\}.$$

Jak widać powyższa definicja oparta jest o pojęcie pierwotne relacji uporządkowania.

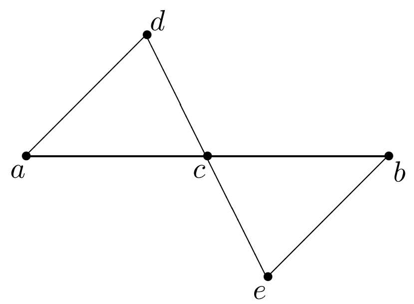
Intuicja podpowiada, że najprościej określić środek odcinka jako punkt równo oddalony od jego końców. Aby taką definicję wprowadzić musielibyśmy jednak wiedzieć co to znaczy *równo oddalony*, czyli musielibyśmy mieć możliwość mierzenia odległości (innymi słowy nasza płaszczyzna Π musiałaby być przestrzenią metryczną). Okazuje się, że dla naszych potrzeb wystarczające jest pojęcie przystawania.

Definicja 1.3. Punk c nazywamy *środkiem odcinka* ab jeśli odcinki ac i cb są przystające.

Możemy teraz zacząć dowód naszego twierdzenia.

Dowód twierdzenia 1.1. Niech d będzie dowolnym punktem nie leżącym na prostej wyznaczonej przez punkty a i b.

Rozważmy kąt $\measuredangle bad$. Zgodnie z aksjomatem IV.4. możemy odłożyć przystający kąt $\measuredangle abe$ o wierzchołku w punkcie b taki, że jednym z ramion jest półprosta wychodząca z b i przechodząca przez a, zaś drugie ramię leży po przeciwnej stronie prostej prostej $\overline{ab}$ niż punkt d, a odcinek be jest przystający do odcinka ad (tu korzystamy z aksjomatu IV.1.). Sytuacja zilustrowana jest rysunkiem poniżej.



Ponieważ punkty d i e leżą po przeciwnych stronach prostej $\overline{ab}$, więc odcinek de ma z prostą $\overline{ab}$ punkt wspólny (tak właśnie definiuje się leżenie po przeciwnych stronach). Ten punkt nazwiemy c. Pozostaje pokazać, że jest to środek odcinka ab, czyli że odcinki ac i cb są przystające. To wynika z aksjomatu IV.5. zastosowanego do trójkątów Δadc i Δbec. $\square$

Warto zwrócić uwagę, że powyższy dowód opiera się na własności charakteryzującej równoległobok jako czworokąt, w którym przekątne się połowią. Istotnie, czworokąt $abde$ jest równoległobokiem.

2 Model płaszczyzny euklidesowej

Przedstawimy teraz model płaszczyzny euklidesowej odwołujący się do własności liczb rzeczywistych. W aksjomatyce Euklidesa nie ma mowy o liczbach rzeczywistych. Tym samym, pośrednio, oprzemy się na aksjomatyce liczb rzeczywistych, która jest jednym z tematów wykładu ze wstępu do matematyki. Pojęcia pierwotne u Euklidesa tym razem wymagają zdefiniowania, a aksjomaty udowodnienia. Jeśli nam się to uda, to będziemy dysponować modelem, który realizuje geometrię postulowaną przez Euklidesa. Twierdzenia, których będziemy dowodzili w tym modelu będą prawdziwe w abstrakcyjnej geometrii płaszczyzny. Wrócimy do tego zagadnienia, gdy zgromadzimy odpowiedni zasób wiedzy. Na razie rozpoczniemy od podstawowych definicji.

DEFINICJA 2.1. Rozważamy zbiór $\mathbb{R}^2$. *Punktem* nazywamy uporządkowaną parę liczn rzeczywistych (x, y). Zbiór wszystkich punktów

$$\Pi = \{(x, y)\colon x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

nazywamy *płaszczyzną*. Zbiór wszystkich punktów (x, y) spełniających równanie liniowe o współczynnikach rzeczywistych $A, B, C \in \mathbb{R}$ postaci

$$Ax + By + C = 0, \quad \text{gdzie} \quad A^2 + B^2 > 0 \tag{2}$$

nazywamy *prostą*.

Zauważmy, że warunek niezerowania się jednocześnie A i B w definicji prostej jest konieczny ponieważ, w sytuacji gdy $A = B = 0$, to dla $C = 0$ dostajemy równanie $0x + 0y + 0 = 0$, którego rozwiązaniami są wszystkie punkty płaszczyzny Π, natomiast dla $C \neq 0$ dostajemy równanie, które wcale nie ma rozwiązań.

2.1 Aksjomaty incydencji

DEFINICJA 2.2. Mówimy, że punkt $p = (p_1, p_2)$ *incyduje* z prostą k, lub *leży na* prostej k (symbolicznie $p \in k$), o równaniu $Ax + By + C = 0$ jeśli punkt p spełnia równanie prostej k, tzn. gdy

$$Ap_1 + Bp_2 + C = 0.$$

TWIERDZENIE 2.3. *Płaszczyzna* Π *spełnia aksjomaty incydencji.*

DOWÓD. I1 Niech $p = (p_1, p_2)$ i $q = (q_1, q_2)$ będą dowolnymi punktami płaszczyzny Π. Należy wskazać równanie postaci (2) spełnione przez p i q. W tym celu rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + C = 0, \\ Aq_1 + Bq_2 + C = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Odejmując równania stronami dostaniemy:

$$A(p_1 - q_1) + B(p_2 - q_2) = 0. \tag{4}$$

Jeśli $p = q$, to za A i B możemy przyjąć dowolne wartości byleby $A^2 + B^2 > 0$, natomiast C wyliczamy z któregokolwiek równania.

Jeśli $p \neq q$, to jako rozwiązanie możemy przyjąć $A = p_2 - q_2$ i $B = q_1 - p_1$. Dla $C = p_1 q_2 - p_2 q_1$ układ (3) jest spełniony.

I.2 Równanie (4) nie ma jednoznacznego rozwiązania. Sugeruje to, że prostych przez p i q jest wiele, ale niejednoznaczne jest tylko równanie opisujące prostą, a mianowicie rówania (2) oraz

$$\lambda A x + \lambda B y + \lambda C = 0$$

dla $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ opisują tę samą prostą.

I.3 Weźmy dowolną prostą, tzn. ustalmy A, B, C takie, że $A^2 + B^2 > 0$. Szukamy dwóch punktów których współrzędne spełniają równanie

$$Ax + By + C = 0 \tag{5}$$

i punktu $p = (p_1, p_2)$ takiego aby

$$Ap_1 + Bp_2 + C \neq 0. \tag{6}$$

Przypuśćmy, że $B \neq 0$ (analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla $A \neq 0$). Możemy teraz w (5) wyliczyć y, a mianowicie

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \tag{7}$$

Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ możemy teraz według (7) dobrać odpowiednie y, tak, że (x, y) jest punktem spełniającym (5). Zatem na prostej o równaniu (5) jest tyle punktów ile jest elementów w zbiorze $\mathbb{R}$.

Teraz przyjmijmy $p_1 = A$ i $p_2 = B$. Jeśli $C = -A^2 - B^2$ to bierzemy $p_1 = 2A$ i $p_2 = 2B$. Wybrany w ten sposób punkt p nie leży na prostej o równaniu (5). $\square$

Dowodząc 2.3 wyznaczyliśmy jedno z równań prostej przechodzącej przez dwa różne punkty. Zanotujmy to.

Wniosek 2.4. *Jeśli $p = (p_1, p_2)$ i $q = (q_1, q_2)$ są różnymi punktami płaszczyzny, to prosta o równaniu*

$$(p_2 - q_2)x + (q_1 - p_1)y + p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0. \tag{8}$$

przechodzi przez punkty p i q.

2.2 Aksjomaty uporządkowania

Zaczynamy od zdefiniowania porządku, jak się za chwilę okaże, na prostej.

Definicja 2.5. Mówimy, że punkt $r = (r_1, r_2)$ *leży między* punktami $p = (p_1, p_2)$ i $q = (q_1, q_2)$, jeśli istnieje taka liczba rzeczywista λ, że

$$0 < \lambda < 1 \qquad \text{oraz} \qquad r = \lambda p + (1 - \lambda) q.$$

Zgodnie z naturalnym określeniem odcinka, jako zbioru punktów pomiędzy dwoma ustalonymi punktami, możemy wprowadzić formalnie następujacą definicję.

Definicja 2.6. *Odcinkiem pq* nazywamy zbiór punktów

$$pq = \{\lambda p + (1-\lambda)q \colon \lambda \in [0,1]\}. \tag{9}$$

Punkty p, q nazywamy *końcami* odcinka. Jeśli $p = q$, to mówimy, że odcinek jest *zdegenerowany.*

W tym momencie warto poczynić pewną obserwację. Zanim to jednak uczynimy wprowadźmy pewne oznaczenie. Dla pary punktów $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$ piszemy

$$[p,q] := \det \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix} = p_1 q_2 - q_1 p_2. \tag{10}$$

Zanotujmy kilka istotnych własności tego nawiasu.

Stwierdzenie 2.7. *Niech p, q, r będą punktami na płaszczyźnie i niech $\alpha \in \mathbb{R}$, wówczas:*

(i) $[p+q, r] = [p,r] + [q,r]$ *oraz* $[p, q+r] = [p,q] + [p,r]$

(ii) $[\alpha \cdot p, q] = \alpha \cdot [p,q] = [p, \alpha \cdot q]$,

(iii) $[p,q] = -[q,p]$.

Własności (i) i (ii) oznaczają, że nawias (wyznacznik) $[p,q]$ jest formą dwuliniową, natomiast własność (iii) oznacza, że jest to forma skośnie-symetryczna (alternującą, antysymetryczną).

Powyższy wyznacznik pozwala sformułować wygodne kryterium na współliniowość trzech punktów.

Lemat 2.8. *Punkty p, q, r są współliniowe wtw., gdy*

$$[p,q] + [q,r] + [r,p] = 0. \tag{11}$$

Dowód. (Na ćwiczeniach. Wskazówka: skorzystać z 2.4 aby pokazać, że jeśli p, q, r spełniają (11), to r leży na prostej przez p i q.) □

Stwierdzenie 2.9. *Jeśli $p \neq q$, to zbiór*

$$\overline{pq} = \{\lambda p + (1-\lambda)q \colon \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{12}$$

jest prostą przechodzącą przez punkty p i q.

Dowód. Wstawiając do (11) szybko sprawdzimy, że każdy punkt $r = \lambda p + (1-\lambda)q$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$ leży na prostej przez p i q.

Na odwrót, jeśli punkt $r = (r_1, r_2)$ jest z prostej przez $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$, to z 2.8 po wyliczeniu wyznaczników mamy

$$p_1 q_2 - q_1 p_2 + q_1 r_2 - r_1 q_2 + r_1 p_2 - p_1 r_2 = 0.$$

Przekształcając, przy odrobinie wysiłku dostajemy

$$\frac{r_1 - q_1}{p_1 - q_1} = \frac{r_2 - q_2}{p_2 - q_2}.$$

Biorąc λ jako wyrażenie z lewej strony i wyliczając r_1, później biorąc λ jako wyrażenie z prawej strony i wyliczając r_2 otrzymujemy

$$\begin{cases} r_1 = \lambda p_1 + (1-\lambda) q_1, \\ r_2 = \lambda p_2 + (1-\lambda) q_2, \end{cases}$$

co oznacza, że $r = \lambda p + (1-\lambda) q$. □

Zwróćmy uwagę, że w powyższym dowodzie korzystaliśmy niejawnie z faktu, że wektory $\overrightarrow{qr}$ i $\overrightarrow{qp}$ są proporcjonalne, tzn. $[r-q, p-q] = 0$. Współczynnik tej proporcji to dokładnie λ.

2.3 Aksjomaty równoległości

DEFINICJA 2.10. Mówimy, że na płaszczyźnie proste k, l są *równoległe* i piszemy $k \parallel l$, jeśli pokrywaja się albo nie mają punktów wpsólnych. Rodzinę wszystkich prostych równoległych do prostej k nazywamy *kierunkiem* wyznaczonym przez k.

Jeśli prosta k dana jest równaniem $Ax + By + C = 0$ a prosta k' równaniem $A'x + B'y + C' = 0$, to są one równoległy wtw., gdy układ równań liniowych

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A'x + B'y + C' = 0. \end{cases}$$

jest nieoznaczony. To z kolei, na mocy kryterium Cramera, równoważne jest z faktem, że wyznacznik główny powyższego układu równań jest zerowy

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ A' & B' \end{bmatrix} = AB' - BA' = 0.$$

TWIERDZENIE 2.11. *Niech dana będzie prosta k o równaniu $Ax + By + C = 0$ oraz punkt $p = (p_1, p_2)$ nie leżący na prostej k. Prosta o równaniu*

$$A(x - p_1) + B(y - p_2) = 0$$

jest jedyną prostą przez punkt p równoległą do prostej k.

DOWÓD. (Praca domowa.) Uwaga: jedna i ta sama prosta może mieć wiele proporcjonalnych do siebie równań. □

Jeśli nie mamy równań prostych tylko punkty przez które przechodzą, to wygodnym może okazać się następujące kryterium.

LEMAT 2.12. *Niech $p \neq q$ i $r \neq s$. Proste $\overline{pq}$ i $\overline{rs}$ są równoległe. wtw., gdy*

$$[p - q, r - s] = 0. \tag{13}$$

DOWÓD. (Na ćwiczeniach. Wskazówka: jak mają się do siebie wektory $\overrightarrow{pq}$ oraz $\overrightarrow{rs}$?) □

2.4 Płaszczyzna jako przestrzeń wektorowa

Płaszczyzna $\mathbb{R}^2$, jak wiemy, jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$. Możemy zatem punkty naszej płaszczyzny dodawać do siebie i mnożyć przez liczby rzeczywiste po współrzędnych:

- dodawanie: $(p_1, p_2) + (q_1, q_2) := (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$,
- mnożenie: $\lambda(p_1, p_2) := (\lambda p_1, \lambda p_2)$.

Zatem punkty naszej płaszczyzny to wektory przestrzeni wektorowej. Co więcej, przy niewielkim wysiłku można sprawdzić, że proste naszej płaszczyzny to warstwy jednowymiarowe w przestrzeni wektorowej.

Prosta, czyli jednowymiarowa warstwa ma postać:

$$a + \langle u \rangle, \qquad u \neq 0 \tag{14}$$

gdzie a to punkt przez który dana prosta przechodzi, innymi słowy reprezentant warstwy, a $\langle u \rangle$ to jednowymiarowa przestrzeń rozpięta przez *wektor kierunkowy* u. Stąd określenie *postać kierunkowa*. Założenie, że $u \neq 0$ jest tu istotne, bo wektor 0 rozpina przestrzeni wymiaru 0 a nie 1. Wektor kierunkowy jest wyznaczony z dokładnością do proporcjonalności. Każdy inny wektor λu byle $\lambda \neq 0$ jest tak samo dobry jkao wektor kierunkowy prostej.

Prosta przez dwa różne punkty $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ ma postać kierunkową:

$$\overline{ab} = a + \langle a - b \rangle. \tag{15}$$

Założenie, że $a \neq b$ jest tu istotne, bo w przeciwnym razie $a - b = 0$. Warto zauważyć, że reprezentantem warstwy (15) może równie dobrze być b zamiast a. Ponadto kolejność odejmowanie przy wyznaczaniu wektora kierunkowego nie jest istotna, bo wektory $a - b$ i $b - a$ są proporcjonalne (współczynnik proporcjonalności wynosi -1) i rozpinają tę samą przestrzeń. Tak więc

$$a + \langle a - b \rangle = b + \langle a - b \rangle = b + \langle b - a \rangle = a + \langle b - a \rangle.$$

Warto zauważyć, że wyznaczając postać kierunkową prostej w równaniu (14) nie użyliśmy współrzędnych. Zatem wzór (14) jest bezwymiarowy i może byc stosowany nie tylko na płaszczyźnie, ale w dowolnie wymiarowej, nawet nieskończenie wymiarowej, przestrzeni.

Geometrię, której punktami są wektory a prostymi warstwy jednowymiarowe, nazywamy *przestrzenią afiniczną*.

Wzór (14) można łatwo uogólnić na obiekty więcej wymiarowe. Płaszczyzna w przestrzeni afinicznej to warstwa:

$$a + \langle u, w \rangle, \qquad u, w \text{ liniowo niezależne} \tag{16}$$

i ogólnie podprzestrzeń k-wymiarowa przestrzeni afinicznej to warstwa:

$$a + U, \qquad \dim U = k. \tag{17}$$

3 Stosunek podziału odcinka

Wektorem $\overrightarrow{pq}$ nazywamy uporządkowaną parę punktów p i q. Punkt p jest początkiem, a punkt q koncem wektora $\overrightarrow{pq}$. Współrzędne wektora określamy jako współrzędne różnicy $q - p = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$, gdzie $p = (p_1, p_2)$ i $q = (q_1, q_2)$.

Zauważmy, że przy tej definicji wektor $\overrightarrow{0p}$ ma te same współrzędne co punkt p. Możemy więc punkty płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ utożsamiać z wektorami o początku w punkcie 0 i na odwrót. Dodawanie punktów jest zgodne z dodawaniem odpowiednich wektorów

$$p + q = \overrightarrow{0p} + \overrightarrow{0q}.$$

DEFINICJA 3.1. Niech p, q będą różnymi punktami i niech r będzie punktem współliniowym z p i q. Wówczas iloraz

$$\mathrm{s}(p, q; r) := \frac{1-\lambda}{\lambda}, \tag{18}$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ takie, że $r = \lambda p + (1 - \lambda)q$, nazywamy *stosunkiem podziału* odcinka p, q przez punkt r. Gdy $r = p$ to przyjmujemy $\mathrm{s}(p, q; r) = 0$, natomiast gdy $r = q$ to $\mathrm{s}(p, q; r) = \infty$.

Zauważmy, że przy ustalonych, różnych punktach p i q stosunek podziału odcinka pq jest funkcją, która punktom z prostej $\overline{pq}$ przyporządkowuje liczby rzeczywiste (uzupełnione o wartość ∞). Co więcej, jest to bijekcja.

Wartość stusunku podziału zależy od uporządkowania końców odcinka, a mianowicie

$$\mathrm{s}(p, q; r) = \frac{1}{\mathrm{s}(q, p,\ r)}. \tag{19}$$

Warto też zauważyć, że wartość stosunku podziału jest dodatnia, gdy punkt r leży na odcinku pq oraz ujemna w przeciwnym razie. Z dokładnością do znaku wartość stosunku podziału odcinka odpowiada ilorazowi długości odcinków

$$|\mathrm{s}(p, q; r)| = \frac{|pr|}{|rq|}. \tag{20}$$

Znak pojawia się, gdy odcinki zamienimy na wektory. Punkty p, q, r są wpółliniowe, gdy wektory $\overrightarrow{pr}$ i $\overrightarrow{rq}$ są liniowo zależne, tzn. gdy istnieje taka liczba $\mu \in \mathbb{R}$, że $\overrightarrow{pr} = \mu \cdot \overrightarrow{rq}$. Liczba μ jest stosunkiem podziału, bo

$$\begin{aligned}\mu = \frac{\overrightarrow{pr}}{\overrightarrow{rq}} = \frac{r-p}{q-r} = \frac{\lambda p + (1-\lambda)q - p}{q - \lambda p - (1-\lambda)q} &= \frac{-(1-\lambda)p + (1-\lambda)q}{-\lambda p + \lambda q} = \\ &= \frac{(1-\lambda)(q-p)}{\lambda(q-p)} = \frac{1-\lambda}{\lambda} = \mathrm{s}(p, q; r).\end{aligned}$$

Warto zapamiętać następujący wzór

$$\mathrm{s}(p, q; r) = \frac{\overrightarrow{pr}}{\overrightarrow{rq}}, \tag{21}$$

który można wręcz traktować jako definicję stosunku podziału odcinka.

Lemat 3.2. *Jeśli parami różne punkty p, q, r są współliniowe, to*

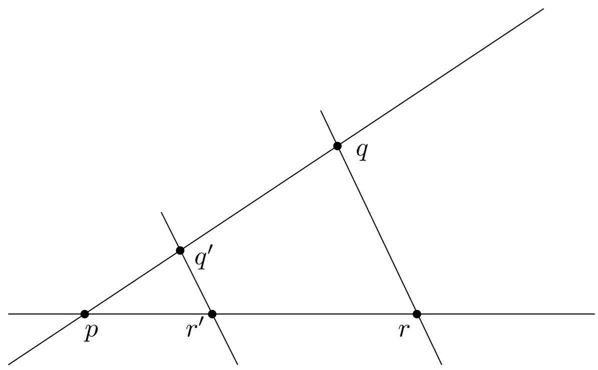
$$\mathrm{s}(p, q; r) = \frac{[p, r]}{[r, q]}. \tag{22}$$

Dowód. (Na ćwiczeniach. Wskazówka: przedstawić r jako kombinację p i q w wyrażeniu z prawej strony, następnie wyliczyć wartość tego wyrażenia z definicji wyznacznka i porównać wynik z definicją stosunku podziału.) □

3.1 Twierdzenie Talesa

Twierdzenie 3.3 (Twierdzenie Talesa)**.** *Dane są trzy niewspółliniowe punkty (trójkąt) p, q, r oraz punkty $q' \in \overline{pq}$, $q' \neq p, q$ i $r' \in \overline{pr}$, $r' \neq p, r$. Następujące warunki są równoważne:*

- $\overline{qr} \parallel \overline{q'r'}$,
- $\mathrm{s}(p, r; r') = \mathrm{s}(p, q; q')$.



Rysunek 1: Twierdzenie Talesa.

Dowód. Z założeń o współliniowości trójek punktów p, r, r' oraz p, q, q' mamy

$$r' = \lambda p + (1 - \lambda) r \qquad \text{oraz} \qquad q' = \gamma p + (1 - \gamma) q \tag{23}$$

dla pewnych $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$. Z definicji 3.1 mamy

$$\mathrm{s}(p, r; r') = \frac{1 - \lambda}{\lambda} \qquad \text{oraz} \qquad \mathrm{s}(p, q; q') = \frac{1 - \gamma}{\gamma}. \tag{24}$$

Stosunki te są zatem sobie równe wtw., gdy $\lambda = \gamma$.

Na mocy 2.12, równoległość prostych $\overline{qr}$ i $\overline{q'r'}$ jest równoważna równości

$$[q' - r', q - r] = 0. \tag{25}$$

Policzmy wartość wyrażenia z lewej strony.

$$\begin{aligned}
[q'-r', q-r] &= [(\gamma-\lambda)p + (1-\gamma)q + (\lambda-1)r,\ q-r] = \\
&= (\gamma-\lambda)[p,\ q-r] + (1-\gamma)[q,\ q-r] + (\lambda-1)[r,\ q-r] = \\
&= (\gamma-\lambda)[p,\ q-r] + (1-\gamma)[q,\ q] + (\gamma-1)[q,r] + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + (\lambda-1)[r,\ q] + (1-\lambda)[r,\ r] = \\
&= (\gamma-\lambda)[p,\ q-r] + 0 + (\gamma-1)[q,\ r] + (1-\lambda)[q,\ r] + 0 = \\
&= (\gamma-\lambda)\Big([p,\ q] + [p,\ -r] + [q,\ r]\Big) = \\
&= (\gamma-\lambda)\Big([p,\ q] + [q,\ r] + [r,\ p]\Big)
\end{aligned}$$

Z 2.8 mamy $[p,\ q] + [q,\ r] + [r,\ p] \neq 0$ bo punkty p, q, r nie są wspołliniowe. Tak więc proste $\overline{qr}$ i $\overline{q'r'}$ są równoległe wtw., gdy $\lambda = \gamma$. Pokazaliśmy, że oba warunki z twierdzenia są równoważne. □

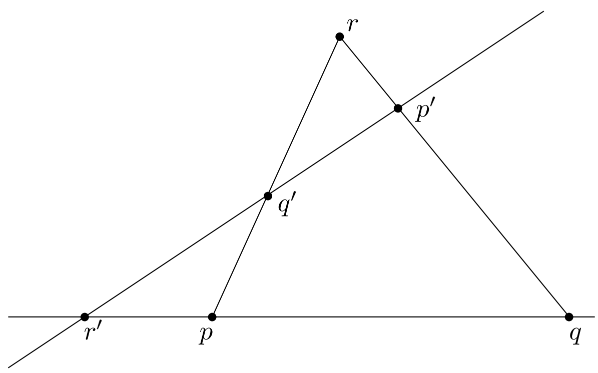
3.2 Twierdzenie Menelaosa

Zauważmy, że trzy punkty są niewspółliniowe, wtw. gdy w (11) jest nierówność. Dalej dowolny układ trzech niewspółliniowych punktów będziemy nazywać *trójkątem*. Tak więc punkty p, q, r tworzą trójkąt wtw., gdy w (11) jest nierówność.

Twierdzenie 3.4 (Twierdzenie Menelaosa)**.** *Dany jest trójkąt pqr oraz trzy różne od jego wierzchołków punkty p', q', r' leżące odpowiednio na prostych $\overline{qr}$, $\overline{pr}$ i $\overline{pq}$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *punkty p', q', r' są wspóļliniowe,*

(ii) $\mathrm{s}(p,q;r')\,\mathrm{s}(q,r;p')\,\mathrm{s}(r,p;q') = -1$.



Rysunek 2: Twierdzenie Menelaosa.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Punkty p', q', r' są współliniowe, więc z 2.8 mamy

$$[p', q'] + [q', r'] + [r', p'] = 0.$$

Dla skrócenia zapisu dalej stosujemy podstawienia

$$s_r := \mathrm{s}(p,q;r'), \qquad s_p := \mathrm{s}(q,r;p'), \qquad s_q := \mathrm{s}(r,p;q').$$

Z definicji 3.1 mamy

$$\begin{aligned} p' &= \frac{1}{1+s_p}q + \frac{s_p}{1+s_p}r, \\ q' &= \frac{1}{1+s_q}r + \frac{s_q}{1+s_q}p, \\ r' &= \frac{1}{1+s_r}p + \frac{s_r}{1+s_r}q. \end{aligned}$$

Policzmy teraz

$$\begin{aligned} [p',\ q'] &= \left[\frac{1}{1+s_p}q + \frac{s_p}{1+s_p}r,\ \frac{1}{1+s_q}r + \frac{s_q}{1+s_q}p\right] = \\ &= \frac{1}{(1+s_p)(1+s_q)}[q,\ r] + \frac{s_q}{(1+s_p)(1+s_q)}[q,\ p] + \frac{s_p s_q}{(1+s_p)(1+s_q)}[r,\ p] \end{aligned}$$

i analogicznie

$$\begin{aligned} [q',\ r'] &= \frac{1}{(1+s_q)(1+s_r)}[r,\ p] + \frac{s_r}{(1+s_q)(1+s_r)}[r,\ q] + \frac{s_q s_r}{(1+s_q)(1+s_r)}[p,\ q], \\ [r',\ p'] &= \frac{1}{(1+s_r)(1+s_p)}[p,\ q] + \frac{s_p}{(1+s_r)(1+s_p)}[p,\ r] + \frac{s_r s_p}{(1+s_r)(1+s_p)}[q,\ r]. \end{aligned}$$

Po dodaniu powyższych trzech równań stronami dostajemy

$$0 = \frac{1+s_p s_q s_r}{(1+s_p)(1+s_q)(1+s_r)}\Big([p,q] + [q,r] + [r,p]\Big).$$

Na mocy 2.8 musi być

$$s_p s_q s_r = -1,$$

a to jest równość, którą mieliśmy dowieść.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Załóżmy, że zachodzi równość z drugiego warunku i przypśćmy, że $\overline{pq} \parallel \overline{p'q'}$. Wtedy z Tw. Talesa mamys$(r,p;q') = \mathrm{s}(r,q;p')$, co podstawiając do (ii) daje $\mathrm{s}(p,q;r') = -1$. Zatem dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$\mathrm{s}(p,q;r') = -1 = \frac{1-\lambda}{\lambda},$$

która w efekcie daje $0 = 1$, czyli sprzeczność. Oznacza to, że proste $\overline{pq}$ i $\overline{p'q'}$ muszą się przecinać.

Załóżmy teraz, że zachodzi równość z drugiego warunku i przypuśćmy, że prosta $\overline{p'q'}$ przecina prostą $\overline{pq}$ w punkcie r''. Musimy wykazać, że $r'' = r'$. Ponieważ punkty p', q' i r'' spełniają pierwszy warunek, i już dowiedliśmy, że wówczas

$$\mathrm{s}(p,q;r'')\,\mathrm{s}(q,r;p')\,\mathrm{s}(r,p;q') = -1 = \mathrm{s}(p,q;r')\,\mathrm{s}(q,r;p')\,\mathrm{s}(r,p;q').$$

Po skróceniu zostaje

$$\mathrm{s}(p,q;r'') = \mathrm{s}(p,q;r').$$

Z założenia mamy $p \neq q$. Położenie punktu r', jak i punktu r'', na prostej $\overline{pq}$ jest określone jednoznacznie poprzez stosunek podziału odcinka pq przez ten punkt. Stąd musi być $r'' = r'$, co kończy dowód. $\square$

3.3 Twierdzenie Cevy

Zanim sformułujemy twierdzenie Cevy udowodnimy potrzebny lemat.

Lemat 3.5. *Jeśli parami różne punkty p, q, r są współliniowe, to*

$$s(p, r; q)\, s(r, q; p) = s(p, q; r). \tag{26}$$

Dowód. Z 3.2 natychmiast otrzymujemy

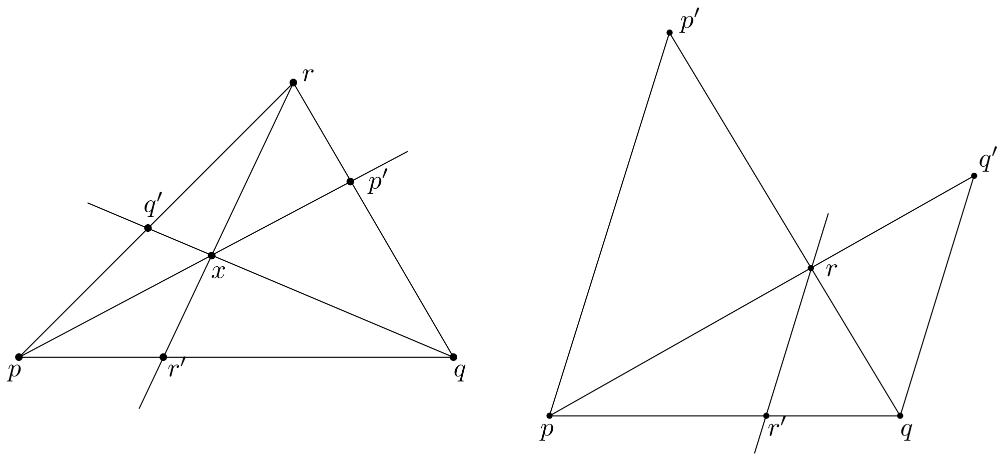
$$s(p, r; q)\, s(r, q; p) = \frac{[p, q]}{[q, r]} \frac{[r, p]}{[p, q]} = \frac{[p, r]}{[r, q]} = s(p, q; r).$$

□

Twierdzenie 3.6 (Twierdzenie Cevy)**.** *Dany jest trójkąt pqr oraz trzy różne od jego wierzchołków punkty p', q', r' leżące odpowiednio na prostych $\overline{qr}$, $\overline{pr}$ i $\overline{pq}$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *proste $\overline{pp'}$, $\overline{qq'}$, $\overline{rr'}$ są współpękowe lub równoległe,*

(ii) $s(p, q; r')\, s(q, r; p')\, s(r, p; q') = 1$.



Rysunek 3: Twierdzenie Cevy.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Załóżmy, że proste $\overline{pp'}$, $\overline{qq'}$, $\overline{rr'}$ przecinają się w punkcie x. Stosujemy twierdzenie Menelaosa do trójkąta $pr'r$ i punktów q, x, q' oraz do trójkąta $r'qr$ i punktów p, x, p'. Zgodnie z 3.4 otrzymujemy wówczas odpowiednio

$$s(p, r'; q)\, s(r', r; x)\, s(r, p; q') = -1,$$
$$s(r', q; p)\, s(q, r; p')\, s(r, r'; x) = -1.$$

Z uwagi na (19) zauważmy, że $s(r', r; x) = \frac{1}{s(r, r'; x)}$, więc po wymnożeniu stronami tych dwóch równań dostaniemy

$$s(p, r'; q)\, s(r, p; q')\, s(r', q; p)\, s(q, r; p') = 1.$$

Aplikując 3.5 mamy $\mathrm{s}(p, r'; q)\,\mathrm{s}(r', q; p) = \mathrm{s}(p, q; r')$, więc podstawiając otrzymamy żądany warunek.

W przypadku, gdy proste $\overline{pp'}$, $\overline{qq'}$, $\overline{rr'}$ są równoległe opieramy się o twierdzenie Talesa 3.3. Stusując je do prostych $\overline{pr}$ i $\overline{pr'}$ oraz uwzględniając 3.5 i (19) mamy

$$\mathrm{s}(p, q; r') = \mathrm{s}(p, q'; r) = \mathrm{s}(p, r; q')\,\mathrm{s}(r, q'; p) = \frac{1}{\mathrm{s}(r, p; q')\,\mathrm{s}(q', r; p)}.$$

Stąd

$$\mathrm{s}(p, q; r')\,\mathrm{s}(q', r; p)\,\mathrm{s}(r, p; q') = 1. \tag{27}$$

Ponownie z twierdzenia Talesa 3.3 dla prostych $\overline{rq}$ i $\overline{rq'}$ dostajemy brakującą równość $\mathrm{s}(q', r; p) = \mathrm{s}(q, r; p')$ i po wstawieniu jej do (27) dostajemy żądany warunek.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Zakładamy, że prawdziwa jest równość z warunku drugiego. Proste $\overline{pp'}$ i $\overline{qq'}$ albo przecinają się w pewnym punkcie x, albo są równoległe.

Rozważmy pierwszą sytuację. Niech r'' będzie punktem przecięcia prostej $\overline{rx}$ z prostą $\overline{pq}$. Stosując dowiedzioną wcześniej implikację dla trójkąta pqr i punktów p', q', r'' oraz uwzględniając założoną równość dostaniemy $\mathrm{s}(p, q; r') = \mathrm{s}(p, q; r'')$, co oznacza, że $r' = r''$ bo stosunki podziału jednoznacznie wyznaczają położenie punktów na prostej $\overline{pq}$.

Teraz załóżmy, że $\overline{pp'} \parallel \overline{qq'}$. Niech punkt r'' będzie punktem przecięcia prostej $\overline{pq}$ z prostą równoległą do $\overline{pp'}$ przechodzącą przez punkt r. Kontynuujemy jak poprzednio, aby pokazać, że $r'' = r'$. □

Twierdzenia Cevy i Menalosa są wzajemnie dualne. Rzeczywiście w geometrii afinicznej dualnym odpowiednikiem leżenia punktów na prostej jest przecinanie się prostych lub ich równoległość. W geometrii rzutowej to rozbicie na dwa przypadki znika, gdy proste równoległe przecinają się w punkcie niewłaściwym na horyzoncie.

4 Współrzędne barycentryczne

Zacznijmy od dowodu istotnego faktu dla geometrii afinicznej.

Stwierdzenie 4.1. *Jeśli p, q, r są niewspółliniowymi punktami, to każdy punkt s można jednoznacznie przedstawić w postaci*

$$s = \lambda p + \mu q + (1 - \lambda - \mu)r, \tag{28}$$

dla pewnych $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

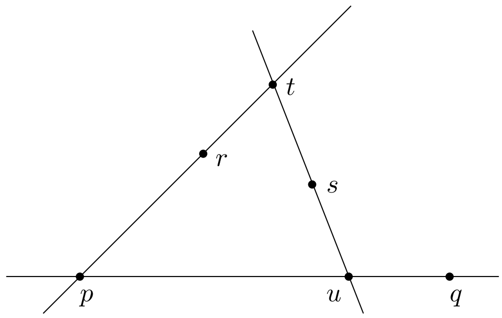
Dowód. Zaczniemy od rozpatrzenia przypadku, gdy punkt s leży na prostej $\overline{pq}$. Wtedy z uwagi na 2.9 istnieje takie $\lambda \in \mathbb{R}$, że $s = \lambda p + (1 - \lambda)q$. Wówczas wystarczy przyjąć $\mu = 1 - \lambda$.

Gdy punkt s leży na prostej $\overline{pr}$, to ponownie z 2.9 mamy takie $\lambda \in \mathbb{R}$, że $s = \lambda p + (1 - \lambda)r$. Teraz przyjmujemy $\mu = 0$.

Rozważmy teraz sytuację, gdy punkt s nie leży ani na prostej $\overline{pq}$, ani na $\overline{pr}$. Na prostej $\overline{pq}$ weźmy taki punkt u różny od p, aby prosta $\overline{su}$ przecięła prostą $\overline{pr}$, powiedzmy w pewnym punkcie t. Zauważmy, że $t \neq p$, bo w przeciwnym razie

$$\overline{su} = \overline{tu} = \overline{pu} = \overline{pq}$$

a więc $s \in \overline{pq}$ co wykluczyliśmy. Otrzymujemy sytuację jak na rys. 4.



Rysunek 4: Współrzędne barycentryczne punktu s względem trójkąta pqr.

Ponownie z 2.9 mamy

$$s = \alpha t + (1-\alpha)u, \qquad t = \beta p + (1-\beta)r, \qquad u = \gamma p + (1-\gamma)q$$

dla pewnych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Stąd

$$\begin{aligned} s = \alpha(\beta p + (1-\beta)r) + (1-\alpha)(\gamma p + (1-\gamma)q) = \\ = (\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma)p + (1-\alpha)(1-\gamma)q + \alpha(1-\beta)r. \end{aligned}$$

Sprawdźmy jaka jest suma współczynników przy p, q i r:

$$\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma + (1-\alpha)(1-\gamma) + \alpha(1-\beta) = 1.$$

Tak więc możemy przyjąć

$$\lambda := \alpha\beta + (1-\alpha)\gamma \qquad \text{oraz} \qquad \mu := (1-\alpha)(1-\gamma).$$

Wykazaliśmy istnienie żądanych współczynników. Pozostaje sprawdzić ich jednoznaczność. W tym celu załóżmy, że

$$s = \lambda p + \mu q + (1-\lambda-\mu)r = \lambda' p + \mu' q + (1-\lambda'-\mu')r$$

dla pewnych $\lambda', \mu' \in \mathbb{R}$. Pokażemy, że musi być $\lambda = \lambda'$ i $\mu = \mu'$. Po przegrupowaniu współczynników mamy

$$(\lambda - \lambda')p + (\mu - \mu')q + (\lambda' - \lambda' + \mu' - \mu)r = 0.$$

Przypuśćmy, że $\lambda \neq \lambda'$. Wówczas

$$p = \frac{\mu - \mu'}{\lambda' - \lambda}q + \frac{\lambda' - \lambda' + \mu' - \mu}{\lambda' - \lambda}r.$$

Zauważmy przy tym, że

$$\frac{\mu - \mu'}{\lambda' - \lambda} + \frac{\lambda' - \lambda' + \mu' - \mu}{\lambda' - \lambda} = 1,$$

co z uwagi na 2.9 oznacza, że p leży na prostej przez q i r i mamy sprzeczność z założeniem o niewspółliniowości tych punktów. Zatem nasze przypuszczenie było fałszywe i musi być $\lambda = \lambda'$. Analogicznie rozumując wykażemy, że $\mu = \mu'$, co kończy dowód. $\square$

Dowiedziona przed chwilą własność płaszczyzny afinicznej skłania do następującej definicji.

DEFINICJA 4.2. Trzy niewspółliniowe punkty p, q, r na płaszczyźnie nazywamy *bazą afiniczną*. Jeśli s jest punktem płaszczyzny, to takie współczynniki $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, że

$$s = \alpha p + \beta q + \gamma r \qquad \text{oraz} \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1 \tag{29}$$

nazywamy *współrzędnymi barycentrycznymi* (*afinicznymi*) punktu s w bazie p, q, r i piszemy wtedy krótko

$$s = (\alpha, \beta, \gamma)_{pqr}. \tag{30}$$

Niech p, q, r tworzą bazę afiniczną naszej płaszczyzny. Zwróćmy uwagę, że gdy punkt s leży powiedzmy na prostej $\overline{pq}$ to zgodnie z 2.9, mamy

$$s = \lambda p + (1 - \lambda)q,$$

i wtedy, tak jak w dowodzie 4.1, otrzymujemy

$$s = (\lambda, 1 - \lambda, 0)_{pqr}.$$

Na odwrót, jeśli jedna ze współrzędnych barycentrycznych punktu s jest 0, to możemy powiedzieć, że punkt s leży na boku (traktowanym jako cała prosta) trójkąta pqr, który nie przechodzi przez wierzchołek przy którym jest 0. Co więcej, w tej sytuacji szybko możemy policzyć stosunek podziału odcinka:

$$\mathrm{s}(p, q; (\alpha, \beta, 0)_{pqr}) = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \mathrm{s}(p, r; (\alpha, 0, \gamma)_{pqr}) = \frac{\gamma}{\alpha}, \qquad \mathrm{s}(q, r; (0, \beta, \gamma)_{pqr}) = \frac{\gamma}{\beta}.$$

5 Przekształcenia afiniczne

5.1 Kolineacje a stosunek podziału odcinka

Bardzo ważną klasą przekształceń w geometrii są te, które zachowują współliniowość punktów. Bijekcję na płaszczyźnie afinicznej, przy której obrazem prostej jest prosta (tj. zachowującą proste) nazywamy *kolineacją*. Zauważmy, że przy tej definicji przeciwobrazem prostej jest również prosta. To oznacza, że kolineacja nie „skleja" kilku prostych w jedną, bo wtedy obrazem całej płaszczyzny byłaby jedna prosta.

Podamy teraz podstawowe twierdzenie geometrii afinicznej. Jego dowód jest trudny i pomijamy go.

TWIERDZENIE 5.1 (Twierdzenie von Staudta)**.** *Kolineacje zachowują stosunek podziału odcinka.*

Przyjmijmy następującą definicję.

DEFINICJA 5.2. Przekształcenie płaszczyzny $f \colon \Pi \to \Pi$ nazywamy *przekształceniem afinicznym*, jeśli zachowuje ono stosunek podziału odcinka, tzn. gdy dla dowolnych, różnych punktów p, q i dowolnego punktu r na prostej $\overline{pq}$ mamy

$$\mathrm{s}(p, q; r) = \mathrm{s}(f(p), f(q); f(r)). \tag{31}$$

Wprost z definicji wynika kilka własności przekształceń afinicznych. Współliniowość obrazów przy f założona jest implicite we wzorze (31), gdyż tylko wtedy ten wzór ma sens.

Wniosek 5.3. *Przekształcenia afiniczne zachowują proste.*

Punkty p, q w defnicji 5.2 są dowolnymi, różnymi punktami płaszczyzny. Zauważmy, że aby prawa strona wzoru (31) miała sens to $f(p) \neq f(q)$.

Wniosek 5.4. *Przekształcenia afiniczne są różnowartościowe.*

Bezpośrednio z definicji stosunku podziału odcinka 3.1 wynika, że $f(r) = \lambda f(p) + (1-\lambda)f(q)$. Zatem wspólczynnik λ w (31) jest również niezmiennikiem f.

Wniosek 5.5. *Jeśli f jest przekształceniem afinicznym i p, q są różnymi punktami, to*

$$f(\lambda p + (1-\lambda)q) = \lambda f(p) + (1-\lambda)f(q). \tag{32}$$

Powyższy wniosek to w zasadzie przeformułowanie faktu, że przekształcenia afiniczne zachowują stosunek podziału odcinka. Można też powiedzieć, że przekształcenia afiniczne zachowują współrzędne barycentryczne na prostej. To inne sformułowanie jednak pozwala jednak szybko dowieść następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.6. *Niech punkty p, q, r będą bazą afiniczną płaszczyzny Π i niech f będzie przekształceniem afinicznym Π. Wówczas dla dowolnych $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mamy*

$$f(\lambda p + \mu q + (1-\lambda-\mu)r) = \lambda f(p) + \mu f(q) + (1-\lambda-\mu)f(r). \tag{33}$$

Dowód. Zauważmy, że nie może być jednocześnie $\lambda = 1$, $\mu = 1$ i $1-\lambda-\mu = 1$. Zatem, bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że $\lambda \neq 1$. Wtedy w oparciu o 5.5 mamy

$$\begin{aligned} f(\lambda p + \mu q + (1-\lambda-\mu)r) &= f\left(\lambda p + (1-\lambda)\left(\frac{\mu}{1-\lambda}q + \frac{1-\lambda-\mu}{1-\lambda}r\right)\right) = \\ &= \lambda f(p) + (1-\lambda)f\left(\frac{\mu}{1-\lambda}q + \frac{1-\lambda-\mu}{1-\lambda}r\right) = \\ &= \lambda f(p) + (1-\lambda)\left(\frac{\mu}{1-\lambda}f(q) + \frac{1-\lambda-\mu}{1-\lambda}f(r)\right) = \\ &= \lambda f(p) + \mu f(q) + (1-\lambda-\mu)f(r) \end{aligned}$$

ponieważ

$$1 - \frac{\mu}{1-\lambda} = \frac{1-\lambda-\mu}{1-\lambda}.$$

□

Twierdzenie 5.6 mówi, że przekształcenia afiniczne zachowują współrzędne barycentryczne (tym razem na całej płaszczyźnie). Pociąga to za sobą kilka istotnych konsekwencji.

Stwierdzenie 5.7. *Przekształcenia afiniczne są kolineacjami i przekształcają odcinki na odcinki.*

Dowód. Z uwagi na 5.3, 5.4 i 5.5 wystarczy pokazać, że przekształcenia afiniczne są surjekcjami. Niech punkty p, q, r tworzą bazę afiniczną i niech f będzie przekształceniem afinicznym. Dla czytelności niech $p' = f(p)$, $q' = f(q)$ i $r' = f(r)$. Zauważmy, że punkty p', q', r' nie mogą leżeć na jednej prostej bo f zachowuje proste i jest różnowartościowe, więc p', q', r' tworzą bazę afiniczną. Weźmy dowolny punkt s'. Wówczas $s' = \lambda p' + \mu q' + (1 - \lambda - \mu)r'$, dla pewnych $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Na mocy 5.6 zauważmy, że $s' = f(s)$, gdzie $s = \lambda p + \mu q + (1 - \lambda - \mu)r$. □

Wyznaczymy teraz postać algebraiczną przekształceń afinicznych.

Twierdzenie 5.8. *Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem afinicznym. Wówczas istnieją takie liczby f_{ij}, $i, j = 1, 2$ oraz t_1, t_2, że*

$$f\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \tag{34}$$

dla wszystkich punktów $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$.

Dowód. Niech

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} := f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{pmatrix} := f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} := f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Przypuśćmy, że punkt $q = (p_1, 0)$ leży na prostej łączącej punkty $(0, 0)$ i $(1, 0)$. Wówczas

$$q = p_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - p_1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z 5.7 mamy

$$\begin{aligned} f(q) = p_1 f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - p_1) f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = p_1 f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - p_1)\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \\ = p_1\begin{pmatrix} g_{11} - t_1 \\ g_{21} - t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(g_{11} - t_1) \\ p_1(g_{21} - t_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{35}$$

Podobnie dla punktu $r = (0, p_2)$ na prostej przez $(0, 0)$ i $(0, 1)$ będziemy mieli

$$f(r) = \begin{pmatrix} p_2(g_{12} - t_1) \\ p_2(g_{22} - t_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Teraz, rozważmy ogólną sytuację gdy $p = (p_1, p_2)$. Punkt p możemy przedstawić jako środek odcinka o końcach $(2p_1, 0)$ i $(0, 2p_2)$, czyli

$$p = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2p_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2p_2 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że punkt $(2p_1, 0)$ leży na prostej łączącej $(0,0)$ z $(1,0)$, a punkt $(0, 2p_2)$ na prostej przez $(0,0)$ i $(0,1)$. Wiemy już jak znajdować obrazy takich punktów przy f. Zatem z (35) i (36) dostaniemy

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{1}{2} f\begin{pmatrix} 2p_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} f\begin{pmatrix} 0 \\ 2p_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2p_1(g_{11}-t_1) \\ 2p_1(g_{21}-t_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}\right] + \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2p_2(g_{12}-t_1) \\ 2p_2(g_{22}-t_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}\right] = \\ &= \begin{pmatrix} p_1(g_{11}-t_1) + p_2(g_{12}-t_1) \\ p_1(g_{21}-t_2) + p_2(g_{22}-t_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jeśli podstawimy $f_{ij} := g_{ij} - t_i$ dla $i, j = 1, 2$, to otrzymamy żądaną równość (34). □

Dla danego przekształcenia afinicznego f macierz o współczynnikach f_{ij} występującą w (34) nazywamy *macierzą przekształcenia afinicznego* i oznaczamy ją przez M_f, natomiast wektor $\binom{t_1}{t_2}$ nazywamy *wektorem translacji przekształcenia afinicznego* i oznaczamy go przez T_f. Tak więc każde przekształcenie afiniczne ma postać

$$f(p) = M_f \cdot p + T_f. \tag{37}$$

Jeszcze raz przypomnijmy, że przekształcenia afiniczne są kolineacjami, a więc zachowują niewspółliniowośc punktów. Pozwala to sformułować kolejny wniosek.

Wniosek 5.9. *Obrazem bazy afinicznej w przekształceniu afinicznym jest baza afiniczna.*

Na mocy twierdzenia 5.6 mając bazę afiniczną i jej obraz w przekształceniu afinicznym f możemy ze współrzędnych barycentrycznych dowolnego punktu p w wyjściowej bazie wyznaczyć jego obraz $f(p)$. Wystarczy więc tak na prawdę znać obraz tylko samej bazy afinicznej, aby wiedzieć jak działa przekształcenie afiniczne.

Wniosek 5.10. *Przekształcenie afiniczne jest określone w sposób jednoznaczny przez zadanie obrazów trzech niewspółliniowych punktów.*

Zgodnie z powyższym wnioskiem zauważmy, że jeśli przekształcenie afiniczne jest stałe na bazie afinicznej to musi być stałe na każdym punkcie bo możemy go wyrazić jednoznacznie w tej bazie. Stąd kolejny wniosek.

Wniosek 5.11. *Przekształcenie afiniczne stałe na trzech niewspółliniowych punktach jest identycznością.*

Z uwagi na 5.4 każdemu punktowi $p = (p_1, p_2)$ płaszczyzny przekształcenie afiniczne f przyporządkowuje dokładnie jeden punkt $p' = (p'_1, p'_2)$ tak, że $f(p) = p'$. Jeśli zapiszemy ostatnie równanie wykorzystując (37), to otrzymamy układ równań liniowych

$$\begin{cases} f_{11}p_1 + f_{12}p_2 + t_1 = p'_1, \\ f_{21}p_1 + f_{22}p_2 + t_2 = p'_2, \end{cases}$$

który ma jednoznaczne rozwiązanie. Zgodnie z kryterium Cramera oznacza to, że $\det M_f \neq 0$. Zapiszmy ten wniosek.

Wniosek 5.12. *Macierz M_f przekształcenia afinicznego f jest nieosobliwa.*

Wprost z definicji 5.2 wynika, że złożeniem przekształceń afinicznych f i g jest przekształcenie afiniczne gf. Stosując rachunek na macierzach łatwo zauważyć, że

$$gf(p) = g(M_f \cdot p + T_f) = M_g M_f \cdot p + M_g T_f + T_g. \tag{38}$$

Wiemy również, że jako kolineacje przekształcenia afiniczne są odwracalne. Powstaje tutaj naturalne pytanie, czy przekształcenie odwrotne f^{-1} do przekształcenia afinicznego f jest również afiniczne? Tak, bo jeśli p, q, r są współliniowymi punktami i $p' = f^{-1}(p)$, $q' = f^{-1}(q)$, $r' = f^{-1}(r)$, to korzystając z tego, że f zachowuje stosunek podziału odcinka mamy

$$\mathrm{s}(f^{-1}(p), f^{-1}(q); f^{-1}(r)) = \mathrm{s}(p', q'; r') = \mathrm{s}(f(p'), f(q'); f(r')) = \mathrm{s}(p, q; r),$$

co oznacza, że również f^{-1} zachowuje stosunek podziału odcinka.

Ważny jest związek przekształceń afinicznych z relacją równoległości.

Stwierdzenie 5.13. *Przekształcenia afiniczne zachowują równoległość.*

Dowód. Na ćwiczeniach. □

Zachowywanie równoległości należy tutaj rozumieć w ten sposób, że jeśli f jest przekształceniem afinicznym, k, l prostymi i $k \parallel l$, to $f(k) \parallel f(l)$.

5.2 Powinowactwa osiowe

Najprostszym przykładem przekształcenia afinicznego jest identyczność:

$$f\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

dla $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$. Jego macierz M_f jest macierzą jednostkową, natomiast wektor translacji T_f jest zerowy.

Ważnym przykładem przekształcenia afinicznego jest translacja, czyli odzwzorowanie postaci:

$$f\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + t_1 \\ p_2 + t_2 \end{pmatrix},$$

dla $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ i pewnych ustalonych $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Macierz M_f translacji jest jednostkowa, natomiast wektor translacji, jak sugeruje nazwa, to właśnie $T_f = \binom{t_1}{t_2}$. Translacja, gdy ją zapiszemy w postaci zwartej

$$f(p) = p + T_f$$

to jak widać przekształcenie polegające na przesunięciu wszystkich punktów płaszczyzny o ustalony wektor T_f. Gdy $T_f = 0$ to translacja jest identycznością. Widać również, że przekształceniem odwrotnym do translacji o wektor $[t_1, t_2]$ jest translacja o wektor $[-t_1, -t_2]$. Złożenie translacji f o wektor T_f z translacją g o wektor T_g jest translacja gf o wektor $T_f + T_g$. Rzeczywiście

$$gf(p) = g(f(p)) = g(p + T_f) = p + T_f + T_g.$$

Wykazalismy tutaj w zasadzie, że zbiór translacji z operacją składnia przekształceń tworzy grupę.

Mówimy, że punkt p jest punktem stałym przekształcenia f płaszczyzny Π, jeśli $f(p) = p$. Wprowadźmy następujące oznaczenie dla zbioru wszystkich punktów stałych przekształcenia f:

$$\mathrm{Fix}(f) = \{p \in \Pi \colon f(p) = p\}. \tag{39}$$

Jeśli $f = \mathrm{id}$, to $\mathrm{Fix}(f) = \Pi$, natomiast jeśli f jest nietrywialną translacją (translacją o wektor niezerowy), to $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$.

Jeśli zbiór $\mathrm{Fix}(f)$ jest prostą to nazywamy ją *osią* przekształcenia f. Prosta k jest *stała* (*niezmiennicza*) w przekształceniu afinicznym f, gdy $f(k) = k$. Nie musi to jednak oznaczać, że punkty na prostej k są punktami stałymi przekształcenia f. Jeśli f jest na przykład nietożsamościową translacją, to proste w kierunku jej wektora są stałe, ale przecież $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$. Tak więc oś jest prostą stałą, ale nie na odwrót.

Mówimy, że przekształcenie afiniczne f ma *kierunek* k jeśli f zachowuje kierunek wyznaczony przez prostą k, czyli klasę prostych równoległych $[k]_{\parallel}$, w tym sensie, że $f(l) = l$ dla wszystkich $l \in [k]_{\parallel}$. Jeśli $f \neq \mathrm{id}$, to f ma najwyżej jeden kierunek k i wówczas $k \parallel \overline{af(a)}$ dla dowolnego punktu $a \notin \mathrm{Fix}(f)$.

Bardzo ważnym przykładem przekształcenia afinicznego jest *powinowactwo osiowe*. Powinowactwo osiowe to nic innego jak kolineacja osiowa, tzn. kolineacją, która posiada prostą punktów stałych, czyli oś. Powinowactwo osiowe f ma tę własność, że dla dowolnych $p, q \notin \mathrm{Fix}(f)$ mamy $\overline{pf(p)} \parallel \overline{qf(q)}$.

Rozważmy odwzorowanie f dane wzorem $f(p_1, p_2) = (p_1 + 2p_2, p_2)$. Jego postać macierzowa jest następująca:

$$f\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tak określone odzworowanie f jest przykładem powinowctwa osiowego.

5.3 Dylatacje

Dylatacją nazywamy kolineację, w której obraz prostej jest prostą do niej równoległą. Bardziej formalnie, f jest dylatacją wtw., gdy dla wszystkich prostych k zachodzi $f(k) \parallel k$.

Wyznaczymy teraz macierz M_f i wektor translacji T_f dowolnej dylatacji f. W tym celu wybierzmy trzy niewspółliniowe punkty, powiedzmy $p = (0, 0)$, $q = (1, 0)$ i $r = (0, 1)$. Zgodnie z 2.4 łatwo wyznaczymy równania prostych:

$$k = \overline{pq} : \ y = 0, \qquad l = \overline{pr} : \ x = 0, \qquad m = \overline{qr} : \ x + y - 1 = 0.$$

Przyjmijmy, że

$$f(p) = (p_1, p_2)$$

dla pewnych $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, nieznanych, ale to teraz nie jest istotne. Obraz $f(q)$ punktu q leży na prostej $f(k)$ równoległej do prostej k bo f jest dylatacją. Zatem

$$f(q) = (q_1, p_2)$$

dla pewnego $q_1 \in \mathbb{R}$. Podobnie obraz $f(r)$ punktu r leży na prostej $f(l)$ równoległej do prostej l, a więc $f(r) = (p_1, r_2)$, dla pewnego $r_2 \in \mathbb{R}$. Obrazem trójkąta o bokach k, l, m w dylatacji będzie trójkąt do niego równoległy. Znając więc dwa wierzchołki $f(p), f(q)$ tego nowego trójkąta, trzeci wierzchołek $f(r)$ możemy wyznaczyć jednoznacznie. Innymi słowy r_2 zależy od wartości p_1, p_2, q_1. Aby policzyć r_2 potrzebujemy równanie prostej $f(m)$, na której leży $f(r)$. Z uwagi na to, że $f(m) \parallel m$ i $f(q) \in f(m)$, korzystając z 2.11 otrzymujemy

$$f(m): \; 1(x - q_1) + 1(y - p_2) = 0.$$

Ponieważ $f(r) \in f(m)$, więc wstawiamy współrzędne punktu $f(r)$ do powyższego równania prostej $f(m)$ i dostajemy $(p_1 - q_1) + (r_2 - p_2) = 0$, co oznacza, że $r_2 = p_2 + q_1 - p_1$, a zatem

$$f(r) = (p_1, p_2 + q_1 - p_1).$$

Szukamy macierzy

$$M_f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

oraz wektora $T_f = [t_1, t_2]$. Rozwijając $f(p) = (p_1, p_2)$ zgodnie z ogólnym wzorem (37) dostajemy

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix},$$

skąd szybko $T_f = [p_1, p_2]$. Podobnie rozwijamy $f(q) = (q_1, p_2)$ oraz $f(r) = (p_1, p_2 + q_1 - p_1)$, skąd otrzymujemy

$$M_f = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 & 0 \\ 0 & q_1 - p_1 \end{pmatrix}.$$

Ostatecznie, jeśli f jest dylatacją to macierz M_f jest proporcjonalna do macierzy jednostkowej. Wykażemy teraz, że twierdzenie odwrotne jest również prawdziwe.

Niech f będzie przekształceniem afinicznym o macierzy $M_f = \lambda I_2$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ i I_2 jest macierzą jednostkową 2×2. Wektor translacji niech będzie zupełnie dowolny, $T_f = [t_1, t_2]$. Weźmy dowolne dwa różne punkty $p = (p_1, p_2)$ oraz $q = (q_1, q_2)$. Policzmy ich obrazy przy f:

$$f(p) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p_1 + t_1 \\ \lambda p_2 + t_2 \end{pmatrix},$$

$$f(q) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda q_1 + t_1 \\ \lambda q_2 + t_2 \end{pmatrix}.$$

Stąd, na mocy 2.12 i (10) proste $\overline{pq}$ i $\overline{f(p)f(q)}$ są równoległe bo zauważmy, że $f(p) - f(q) = \lambda(p - q)$. To wystarczy, aby stwierdzić, że f jest dylatacją.

Przed chwilą dowiedliśmy następujący fakt.

Stwierdzenie 5.14. *Przekształcenie afiniczne f jest dylatacją wtw., gdy*

$$M_f = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Odwzorowanie tożsamościowe jest oczywiście dylatacją oraz translacje są dylatacjami. Co więcej, $\lambda = 1$ w macierzy dylatacji f wtw., gdy f jest translacją.

Dylatacja, która ma dokładnie jeden punkt stały p lub jest identycznością nazywa się *jednokładnością*. Punkt p nazywamy środkiem jednokładności, natomiast współczynnik λ w jej macierzy *skalą jednokładności*. Rozważmy jednokładność f o skali λ i środku w punkcie p. Zauważmy, że zgodnie z definicją dylatacji dla dowolnego punktu a mamy

$$\overline{pa} \parallel \overline{f(p)f(a)} = \overline{pf(a)}$$

bo $f(p) = p$. Oznacza to, że trójka punktów $p, a, f(a)$, czyli odpowiednio środek, punkt i jego obraz, jest współliniowa. Wynika stąd, że

$$\overrightarrow{pf(a)} = \lambda\overrightarrow{pa}. \tag{40}$$

Przekształcając to równanie otrzymujemy

$$f(a) = \lambda a + (1 - \lambda)p. \tag{41}$$

Biorąc natomiast $a = 0$ wyliczamy szybko wektor translacji jednokładności

$$T_f = (1 - \lambda)p. \tag{42}$$

Stwierdzenie 5.15. *Jeśli f jest nietożsamościową dylatacją, to*

$$|\mathrm{Fix}(f)| = \begin{cases} 0, & f \textit{ jest translacją}, \\ 1, & f \textit{ jest jednokładnością}. \end{cases}$$

Dowód. Wystarczy dowieść, że jeśli f ma dwa lub więcej punktów stałych to jest identycznością. Przypuśćmy zatem, że $f(p) = p$, $f(q) = q$ i $p \neq q$. Rozważmy punkt r spoza prostej $\overline{ab}$. Obrazem prostej $\overline{pr}$ w dylatacji f jest prosta równoległa do $\overline{pr}$ i przechodząca przez p bo $p \in \mathrm{Fix}(f)$. Zatem $f(\overline{pr}) = \overline{pr}$ bo proste równoległe są albo rozłączne albo równe. Podobnie $f(\overline{qr}) = \overline{qr}$. Zauważmy, że

$$f(r) \in f(\overline{pr}) \cap f(\overline{qr}) = \overline{pr} \cap \overline{qr} = \{r\},$$

co oznacza, że $f(r) = r$ i zgodnie z 5.11 musi być $f = \mathrm{id}$. □

Z powyższego faktu, natychmiast wynika, że wśród dylatacji znajdują się wyłącznie translacje i jednokładności.

Stwierdzenie 5.16. *Dylatacje tworzą grupę przekształceń.*

Dowód. Praca domowa. □

6 Iloczyn skalarny

Aby mierzyć odległości i kąty potrzebujemy *iloczyn skalarny.* Zaczynamy od następującej definicji.

DEFINICJA 6.1. Niech $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$ będą dowolnymi punktami na płaszczyźnie. Traktujemy je jak wektory o początku w punkcie $0 = (0, 0)$. Wówczas wartość

$$p \circ q := p_1 q_1 + p_2 q_2 \tag{43}$$

nazywamy *iloczynem skalarnym* wektorów $\overrightarrow{0p}$ i $\overrightarrow{0q}$.

Wypiszmy teraz kilka istotnych własności iloczynu skalarnego wynikających wprost z definicji. Dla dowolnych punktów p, q oraz $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mamy

(i) $p \circ q = q \circ p$,

(ii) $(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) \circ q = \lambda_1 (p_1 \circ q) + \lambda_2 (p_2 \circ q)$,

(iii) $0 \leqslant p \circ p$,

(iv) $p \circ p = 0$ wtw., gdy $p = 0$.

Własność (ii) zachodzi również symetrycznie na drugiej współrzędnej. Zgodnie z powyższym mówimy odpowiednio, że iloczyn skalarny jest symetryczny, dwuliniowy, dodatnio określony i niezdegenerowany.

DEFINICJA 6.2. Niech $p = (p_1, p_2)$ będzie dowolnym punktem na płaszczyźnie. Wówczas wartość

$$\|p\| := \sqrt{p \circ p} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \tag{44}$$

nazywamy *normą* wektora $\overrightarrow{0p}$.

LEMAT 6.3. *Dla dowolnych punktów p, q oraz $\lambda \in \mathbb{R}$ mamy:*

(i) $\|\lambda p\| = |\lambda| \|p\|$,

(ii) $p \circ q \leqslant \|p\| \|q\|$,

(iii) $\|p + q\| \leqslant \|p\| + \|q\|$.

DOWÓD. (i) Zgodnie z definicją normy mamy

$$\|\lambda p\| = \sqrt{(\lambda p_1)^2 + (\lambda p_2)^2} = \sqrt{\lambda^2 (p_1^2 + p_2^2)} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = |\lambda| \|p\|.$$

(ii) Tutaj mamy

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|p - \lambda q\|^2 &= (p - \lambda q) \circ (p - \lambda q) = \\ &= p \circ p - \lambda (p \circ q) - \lambda (q \circ p) + \lambda^2 (q \circ q) = \|p\|^2 + \lambda^2 \|q\|^2 - 2\lambda (p \circ q). \end{aligned}$$

To oznacza, że w trójmianie względem zmiennej λ:

$$\|q\|^2 \lambda^2 - 2(p \circ q)\lambda + \|p\|^2.$$

mamy $\Delta \leqslant 0$. Policzmy

$$\Delta = 4(p \circ q)^2 - 4\|p\|^2\|q\|^2 \leqslant 0,$$

skąd po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy żądaną nierówność.

(iii) Korzystając z (ii) uzyskujemy

$$\|p+q\|^2 \leqslant (p+q) \circ (p+q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q = \\ = \|p\|^2 + \|q\|^2 + 2(p \circ q) \leqslant (\|p\| + \|q\|)^2.$$

□

Definicja 6.4. Niech $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$ będą dowolnymi punktami na płaszczyźnie. Wówczas wartość

$$|pq| := \|p - q\| \tag{45}$$

nazywamy *odległością* punktu p od q lub *długością* odcinka pq.

Z własności normy w 6.3 dla dowolnych punktów p, q, r mamy:

(i) $0 \leqslant |pq|$,

(ii) $|pq| = 0$ wtw., gdy $p = q$,

(iii) $|pq| = |qp|$,

(iv) $|pq| \leqslant |pr| + |rq|$.

Jeśli ciało nie jest charakterystyki 2, to iloczyn skalarny można odzyskać z normy w następujący sposób

$$p \circ q = \frac{1}{2}(\|p+q\|^2 - \|p\|^2 - \|q\|^2) \tag{46}$$

Lemat 6.5. *Niech f będzie translacją. Wówczas*

$$\overrightarrow{pq} \circ \overrightarrow{rs} = \overrightarrow{f(p)f(q)} \circ \overrightarrow{f(r)f(s)}.$$

Dowód. Po pierwsze zauważmy, że

$$\overrightarrow{pq} \circ \overrightarrow{rs} = (q - p) \circ (s - r).$$

Po drugie, jeśli T_f jest wektorem translacji f, to

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{(p+T_f)(q+T_f)} = (q + T_f) - (p + T_f) = q - p = \overrightarrow{pq}.$$

□

Tak więc, iloczyn skalarny jest niezmiennikiem translacji.

Definicja 6.6. Niech $\overrightarrow{pq}$ i $\overrightarrow{rs}$ będą dowolnymi, niezerowymi wektorami. Istnieje taka liczba $\alpha \in [0, \pi]$, że

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{pq} \circ \overrightarrow{rs}}{|\overrightarrow{pq}||\overrightarrow{rs}|}. \tag{47}$$

Liczbę α nazywamy *miarą kąta* między wektorami $\overrightarrow{pq}$ i $\overrightarrow{rs}$.

Wiemy, że $\cos\alpha = 0$ gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Zauważmy z drugiej strony, że $\cos\alpha = 0$ w (47) wtw., gdy $\overrightarrow{pq} \circ \overrightarrow{rs} = 0$. Może mieć to również miejsce, gdy $p = q$ lub $r = s$, tzn. gdy jeden z wektorów $\overrightarrow{pq}$, $\overrightarrow{rs}$ jest zerowy.

Definicja 6.7. Mówimy, że wektory $\overrightarrow{pq}$ i $\overrightarrow{rs}$ są *prostopadłe* i piszemy $\overrightarrow{pq} \perp \overrightarrow{rs}$ wtw., gdy $\overrightarrow{pq} \circ \overrightarrow{rs} = 0$.

Wobec powyższej definicji wektor zerowy jest prostopadły do każdego wektora. Dla niezerowych wektorów relacja prostopadłości nie jest zwrotna ani przechodnia, zawsze natomiast jest symetryczna.

Na koniec zanotujmy pozyteczny lemat.

Lemat 6.8. *Niech dana będzie prosta k o równaniu $Ax + By + C = 0$ oraz punkt $p = (p_1, p_2)$. Prosta o równaniu*

$$-B(x - p_1) + A(y - p_2) = 0$$

jest jedyną prostą przez punkt p prostopadłą do prostej k.

Dowód. Na ćwiczeniach. □

7 Izometrie

7.1 Własności

W 6.5 zostało pokazane, że iloczyn skalarny jest niezmienniczy względem translacji. Stąd niezmiennicze są również pojęcia zdefiniowane w oparciu o iloczyn skalarny, czyli długość odcinnka i miara kąta. Wielkości te opisują kształt figur i ich położenie względem siebie. Zatem nie zmieniają się one przy translacjach. Rodzi się tutaj pytanie jakie jeszcze przekształcenia afiniczne mają tę własność.

Niech f będzie przekształceniem afinicznym. Szukamy warunków jakie musi spełniać f, aby

$$\overrightarrow{pq} \circ \overrightarrow{rs} = \overrightarrow{f(p)f(q)} \circ \overrightarrow{f(r)f(s)}$$

dla dowolnych punktów p, q, r i s. Wiemy, że każde przekształcenie afiniczne f można przedstawić jednoznacznie jako złożenie przekształcenia liniowego φ danego macierzą M_f oraz translacji τ o wektor T_f. Ponieważ translacje zachowują iloczyn skalarny, co zostało sprawdzone w 6.5, wystarczy więc szukać warunków dla prezkształcenia liniowego φ ,tak aby

$$\overrightarrow{pq} \circ \overrightarrow{rs} = \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)} \circ \overrightarrow{\varphi(r)\varphi(s)}.$$

CDN...

Uzyskujemy w ten sposób równość $M_f^T M_f = I$. Macierz A spełniającą warunek

$$A^T A = A A^T = I$$

nazywamy macierzą *ortogonalną*. Zauważmy, że dla macierzy ortogonalnej A mamy $A^{-1} = A^T$ oraz $\det A \in \{-1, 1\}$.

Powyżej udowodniliśmy, następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 7.1. *Przekształcenie afiniczne f płaszczyzny zachowuje iloczyn skalarny wtw., gdy jego macierz M_f jest ortogonalna.*

DEFINICJA 7.2. Przekształcenie afiniczne o macierzy ortogonalnej nazywamy *izometrią*.

Możemy spotkać inną, równoważną definicję izometrii jako prezkształcenia zachowującego odległość (długość odcinka).

TWIERDZENIE 7.3. *Przekształcenie f płaszczyzny o własności*

$$|ab| = |f(a)f(b)| \tag{48}$$

jest izometrią.

DOWÓD. Pokażemy, że odwzorowanie f o tej własności zachowuje proste. Niech p, q, r będą parami różnymi punktami na pewnej prostej. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że

$$|pq| = |pr| + |rq|. \tag{49}$$

Przyjmijmy $p' = f(p)$, $q' = f(q)$, $r' = f(r)$. Jeśli punkt r' nie leży na prostej $\overline{p'q'}$, to z nierówności trójkąta mamy

$$|p'q'| < |p'r'| + |r'q'|,$$

co zgodnie z (48) przeczy (49). Tak więc punkty p', q', r' muszą też być współlinowe.

Z warunku (48) wynika, że f zachowuje stosunek podziału odcinka, więc f jest przekształceniem afinicznym. Ciało $\mathbb{R}$ jest charakterystyki 0, więc zgodnie z (46), odwzorowanie f musi zachowywać iloczyn skalarny. Na mocy 7.1 f jest izometrią. $\square$

TWIERDZENIE 7.4. *Zbiór wszystkich izometri płaszczyzny tworzy grupę. Jest to podgrupa grupy przekształceń afinicznych.*

DOWÓD. Praca domowa. $\square$

7.2 Klasyfikacja

Przypomnijmy, że wyznacznik macierzy ortogonalnej jest zawsze -1 lub 1. Możemy zatem w grupie izometrii wydzielić dwie klasy. Mówimy, że izometria f jest *parzysta*, gdu $\det M_f = 1$, natomiast *nieparzysta*, gdy $\det M_f = -1$. W pierwszym przypadku mówi się również, że izometria f *zachowuje orientację płaszczyzny*, a w drugim, że ją *zmienia*.

Macierz M_f translacji f jest jednostkowa, więc $\det M_f = 1$, a co za tym idzie translacja jest izometrią parzystą.

Zdefiniujemy teraz najważniejszą z izometrii. Niech k będzie dowolną prostą. *Symetria osiowa* o osi k to odwzorowanie S_k, w którym obrazem punktu a płaszczyzny jest taki punkt $b = S_k(a)$, że prosta k jest symetralną odcinka ab. Zauważmy, że $S_kS_k = \mathrm{id}$. Odwzorowanie f o tej własności, że $f^2 = \mathrm{id}$ nazywamy *inwolucją*. Innymi słowy, symetria osiowa jest nietożsamościową, inwolucyjną izometrią osiową (posiadającą prostą punktów stałych).

LEMAT 7.5. *Niech dana będzie prosta k o równaniu $Ax + By + C = 0$. Wówczas dla dowolnego punktu $p = (p_1, p_2)$ mamy*

$$S_k(p) = \begin{pmatrix} B^2 - A^2 & -2AB \\ -2AB & A^2 - B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - 2C \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \tag{50}$$

DOWÓD. Ponieważ $A^2 + B^2 > 0$, więc możemy podzielić równanie prostej k przez $\sqrt{A^2 + B^2}$ lub przyjąć, że $A^2 + B^2 = 1$ bez zmniejszenia ogólności. W 6.8 dane mamy równanie prostej l prostopadłej do k przez punkt p:

$$-B(x - p_1) + A(y - p_2) = 0.$$

Rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} Ax + By = -C, \\ -Bx + Ay = Ap_2 - Bp_1. \end{cases}$$

jest punkt przecięcia prostych k i l:

$$q = (B^2 p_1 - ABp_2 - AC, -ABp_1 + A^2 p_2 - BC).$$

Niech $q := S_k(p)$. Wtedy $r = p \oplus q = \frac{p+q}{2}$ tzn. r jest środkiem odcinka pq. Mamy stąd następujący układ równań.

$$\begin{cases} B^2 p_1 - ABp_2 - AC = \frac{p_1 + r_1}{2}, \\ -ABp_1 + A^2 p_2 - BC = \frac{p_2 + r_2}{2}. \end{cases}$$

Wyliczamy z niego współrzędne punktu q uwzględniając, założenie $A^2 + B^2 = 1$.

$$\begin{aligned} q_1 &= (B^2 - A^2)p_1 - 2ABp_2 - 2AC, \\ q_2 &= -2ABp_1 + (A^2 - B^2)p_2 - 2BC. \end{aligned}$$

Pozostało odczytać stąd macierz i wektor translacji symetrii S_k. □

Kontynuując rozumowanie z dowodu 7.5 łatwo sprawdzić, że macierz symetrii osiowej jest ortogonalna i jej wyznacznik jest 1. Zapiszmy ten ważny wniosek.

STWIERDZENIE 7.6. *Symetria osiowa jest izometrią nieparzystą.*

Teraz udowodnimy najważniejsze twierdzenie dla klasyfikacji izometrii.

TWIERDZENIE 7.7 (o rozkładzie izometrii). *Każda izometria płaszczyzny jest złożeniem co najwyżej trzech symetrii osiowych.*

DOWÓD. Niech f będzie dowolną izometrią i niech punty p, q, r będą bazą afiniczną. Wprowadźmy oznaczenia $p' = f(p)$, $q' = f(q)$, $r' = f(r)$.

Jeśli $p = p'$, $q = q'$, $r = r'$, to $f = \mathrm{id}$ na mocy 5.11. Możemy wówczas wyrazić f jako złożenie symetri osiowej ze sobą, tzn. $f = S_k S_k$, gdzie k jest dowolną prostą.

Bez zmniejszenia ogólności załóżmy teraz, że $p \neq p'$. Rozważmy symetralną k odcinka pp'. Wówczas $S_k(p') = p$. Niech $f_1 := S_k f$. Zauważmy, że $f_1(p) = p$. Przyjmijmy $q'' = S_k(q') = f_1(q)$ oraz $r'' = S_k(r') = f_1(r)$. Jeśli $f_i = \mathrm{id}$, to mnożąc obie strony przez S_k z lewej łatwo zauważyć, że $f = S_k$ i dowód jest zakończony w tym wypadku.

Załóżmy więc, że $q'' \neq q$. Podobnie jak wcześniej niech l będzie symetralną odcinka qq'' i niech $f_2 := S_l f_1$. Widzimy, że

$$f_2(q) = S_l(f_1(q)) = S_l(q'') = q.$$

Tak więc q jest punktem stałym izometrii f_2. Pokażemy teraz, że p jest również punktem stałym f_2. W tym celu zauważmy, że

$$|pq| = |f_1(p)f_1(q)| = |pq''|,$$

co oznacza, że punkt p jest równoodległy od q i od q'', a więc $p \in l$. Stąd

$$f_2(p) = S_l(f_1(p)) = S_l(p) = p.$$

Mamy więc całą prostą $\overline{pq}$ punktów stałych izometrii f_2. Jeśli $f_2 = \mathrm{id}$, to wówczas $S_l S_k f = \mathrm{id}$, czyli $f = S_k S_l$ i dowód jest zakończony. Jeśli natomiast $f_2 \neq \mathrm{id}$, to poza prostą $m = \overline{pq}$ izometria f_2 nie może mieć więcej punktów stałych, a więc $f_2 = S_m$. Stąd szybko mamy $S_l S_k f = S_m$, co ostatecznie daje $f = S_k S_l S_m$. $\square$

Z udowodnionego twierdzenia szybko wynika, że izometria parzysta jest złożeniem dwóch symetrii osiowych, natomiast izometria nieparzysta jest albo symetrią osiową, albo złożeniem trzech symetrii osiowych.

Złożenie dwóch symetrii osiowych o osiach przecinających się nazywamy *obrotem*. Jeśli k i l są prostymi przecinającymi się w punkcie p, a miara kąta liczona od k do l przeciwnie do ruchu wskazówek zegara wynosi α, to $R_p^{2\alpha} = S_l S_k$ jest obrotem o środku w punkcie p o kąt 2α. Jeśli proste k i l są prostopadłe, to obrót $S_p = S_l Sk$ nazywamy *symetrią środkową*. Zauważmy, że $S_p S_p = \mathrm{id}$, czyli symetria środkowa jest nietożsamościową, inwolucyjną izometrią posiadającą dokładnie jeden punkt stały — swój środek.

Symetria osiowa z poślizgiem $S_k^{\vec{u}}$ o osi k i wektorze $\vec{u}$, gdzie $\vec{u} \parallel k$, to złożenie $S_k^{\vec{u}} = T_{\vec{u}} S_k$.

Biorąc pod uwagę parzystość izometrii oraz ich zbiory punktów stałych możemy dokonać dokładnej klasyfikacji.

f	nazwa	$\det M_f$	$\mathrm{Fix}(f)$
id	identyczność	1	$\mathbb{R}^2$
$T_{\vec{u}}$	translacja	1	$\emptyset$
R_p^α	obrót	1	$\{p\}$
S_k	symetria osiowa	-1	k
$S_k^{\vec{u}}$	symetria osiowa z poślizgiem	-1	$\emptyset$

Tabela 1: Klasyfikacja izometrii.

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń redukcyjnych dla izometrii.

STWIERDZENIE 7.8. *Złożenie trzech symetrii osiowych o osiach współpękowych lub równoległych jest symetrią osiową.*

DOWÓD. Niech proste k, l, i m będą osiami rozważanych symetrii. Załóżmy, że $k \cap l \cap m = \{p\}$. Na prostej k weźmy punkt q różny od p, także $\overline{pq} = k$. Przyjmijmy $q' := S_l(q)$ i $q'' := S_m(q')$. Przez n oznaczmy symetralną odcinka qq'' tzn. $n = \mathrm{sym}(qq'')$. Wykażemy, że $S_m S_l S_k = S_n$.

Proste l, m i n są symetralnymi boków trójkąta $qq'q''$. W takim razie są one współpękowe. Punkt p leży na obu z nich, a mianowicie na l i m, więc $p \in n$. Stąd

$$S_l S_m S_n(p) = p.$$

Ponadto mamy

$$S_l S_m S_n(q) = q.$$

To oznacza, że $S_l S_m S_n(k) = k$, a więc mamy równość $S_l S_m S_n = S_k$, która po odpowiedznim przekształceniu daje co żądaliśmy.

Teraz rozważmy sytuację, gdzie $k \parallel l \parallel m$. Na prostej k ustalmy dwa różne punkty p i q. Podobnie jak wcześniej, przyjmujemy $p' := S_m(p)$, $p'' := S_l(p')$, $q' := S_m(q)$, $q'' := S_l(q')$ i $n := \mathrm{sym}(pp'')$. Z równoległości prostych k, l, i m wynika, że $\mathrm{sym}(pp'') = \mathrm{sym}(qq'')$. Łatwo zauważyć, że

$$S_l S_m S_n(k) = S_l S_m S_n(\overline{pq}) = \overline{pq} = k,$$

co daje $S_l S_m S_n = S_k$ i koniec jak poprzednio. □

STWIERDZENIE 7.9. *Nech k, l będą różnymi prostymi równoległymi. Wówczas $S_l S_k = T_{2\overrightarrow{u}}$, gdzie $\overrightarrow{u}$ jest takim wektorem, że $\overrightarrow{u} \perp k, l$ oraz $|\overrightarrow{u}| =$ odległość między prostymi k i l.*

DOWÓD. Niech $f = S_l S_k$. Izometria f jest parzysta, więc jest albo translacją, albo obrotem. Gdyby izometria f była obrotem, to miałaby punkt stały, powiedzmy p. Wówczas $S_l S_k(p) = p$, skąd

$$S_k(p) = S_l(p),$$

co oznacza, że $k = l$ lub $p \in k \cap l$, ale proste k, l są różnymi prostymi równoległymi. Tak więc, f jest translacją. Aby ustalić wektor translacji weźmy dowolny punkt a. Zauważmy, że $\overline{af(a)} \perp k, l$, gdzie prosta $\overline{af(a)}$ wyznacza kierunek translacji f. Ponadto, licząc długość odcinka $af(a)$ dwukrotnie liczymy odległość między prostymi k i l. Zatem ostatecznie $f = T_{2\overrightarrow{u}}$, gdzie $\overrightarrow{u}$ jest takim wektorem jak żądano. □

STWIERDZENIE 7.10. *Translacje tworzą grupę przemienną.*

DOWÓD. Praca domowa. □

STWIERDZENIE 7.11. *Obroty o tym samym środku tworzą grupę przekształceń.*

DOWÓD. Praca domowa. □

STWIERDZENIE 7.12. *Złożenie parzystej ilości symetrii osiowych można zredukować do złożenia dwóch symetrii osiowych.*

DOWÓD. Złożenie parzystej ilości symetrii osiowych jest izometrią parzystą, a więc można ją przedstawić jako złożenie dwóch symetrii osiowych. $\square$

STWIERDZENIE 7.13. *Izometrie parzyste tworzą grupę przekształceń.*

DOWÓD. Praca domowa. $\square$

STWIERDZENIE 7.14. *Złożenie dwóch różnych symetrii środkowych S_p i S_q jest translacją $T_{2\overrightarrow{pq}} = S_q S_p$.*

DOWÓD. Niech a będzie dowolnym punktem różnym od p. Przyjmijmy $b := S_p(a)$ i $c := S_q(b)$. Otrzymujemy trójkąt abc, w którym $p = a \oplus b$ i $q = b \oplus c$, tzn. punkty p, q są środkami boków odpowiednio ab i bc. Odcinek pq jest równoległy zatem do podstawy ac naszego trójkąta i z twierdzenia Talesa mamy

$$2|pq| = |ac|.$$

Przypuśćmy, że złożenie $S_q S_p$ ma punkt stały x, tzn. $S_q S_p(x) = x$. Wówczas

$$S_p(x) = S_q(x) =: y,$$

ale $p = x \oplus y = q$, co nie jest możliwe. Stąd złożenie $S_q S_p$ jako nieidentycznościowa izometria parzysta musi być translacją. Ponieważ $S_q S_p(a) = c$, tak więc $S_q S_p = T_{2\overrightarrow{pq}}$. $\square$

STWIERDZENIE 7.15. *Każdą translację da się wyrazić jako złożenie dwóch symetrii środkowych, przy czym środek jednej z nich można wybrać dowolnie.*

DOWÓD. Rozważmy translację $T_{\overrightarrow{u}}$ i wybierzmy dowolnie punkt p. Przez p' oznaczmy obraz punktu p w naszej translacji, czyli $p' = T_{\overrightarrow{u}}(p)$. Niech $q = p \oplus p'$. Wówczas

$$T_{\overrightarrow{u}} = S_q S_p.$$

$\square$

STWIERDZENIE 7.16. *Złożenie trzech symetrii środkowych jest symetrią środkową.*

DOWÓD. Mamy trzy symetrie środkowe S_p, S_q i S_r, odpowiednio o środkach w punktach p, q, r. Z 7.14 wiemy, że

$$S_q S_r = T_{2\overrightarrow{rq}}.$$

Z kolei na mocy 7.15 dla translacji $T_{2\overrightarrow{rq}}$ możemy tak dobrać punkt s do ustalonego punktu p, że

$$T_{2\overrightarrow{rq}} = S_s S_p.$$

W ten sposób $S_q S_r = S_s S_p$ skąd

$$S_q S_r S_p = S_s S_p S_p = S_s,$$

a więc złożenie $S_q S_r S_p$ trzech dowolnych symetrii środkowych jest symetrią środkową. $\square$

ZADANIE 7.17. Niech φ będzie izometrią. Czym jest $f^\varphi = \varphi f \varphi^{-1}$, gdy f jest symetrią osiową, symetrią środkową, obrotem, translacją?

8 Podobieństwa

Jak już wiemy izometrie to przekształcenia afiniczne, które zachowują długości odcinków. W praktyce częściej jednak mamy do czynienia z sytuacjami, w których te same przedmioty występują w różnej skali, np. mapa przedstawia teren podobny do rzeczywistego, model jest podobny do swego oryginału itd.

Przekształcenia afiniczne, które zachowują kąty nazywamy *podobnieństwami.* Izometrie zachowują odległości i kąty, są więc szczególnymi podobieństwami.

Rozważmy jednokładność f o środku w punkcie p i skali λ. Weźmy taką translację g, że $g(f(0)) = 0$. Wówczas złożenie $h := gf$ jest jednokładnością o środku 0 i skali λ. Wybierzmy dowolne trzy parami różne punkty a, b, c. Przyjmijmy, że $a' = h(a)$, $b' = h(b)$ i $c' = h(c)$. Zgodnie z (41) otrzymujemy, że

$$a' = \lambda a, \qquad b' = \lambda b, \qquad c' = \lambda c.$$

Na mocy (47) mamy

$$\cos(\angle a'b'c') = \frac{\overrightarrow{b'a'} \circ \overrightarrow{b'c'}}{|\overrightarrow{b'a'}||\overrightarrow{b'c'}|} = \frac{\overrightarrow{\lambda b \lambda a} \circ \overrightarrow{\lambda b \lambda c}}{|\overrightarrow{\lambda b \lambda a}||\overrightarrow{\lambda b \lambda c}|} = \frac{\lambda^2 \overrightarrow{ba} \circ \overrightarrow{bc}}{|\lambda|^2 |\overrightarrow{ba}||\overrightarrow{bc}|} = \frac{\overrightarrow{ba} \circ \overrightarrow{bc}}{|\overrightarrow{ba}||\overrightarrow{bc}|} = \cos(\angle abc),$$

więc miary kątów $\angle abc$ i $\angle a'b'c'$ są równe. Także w świetle przyjętej na początku definicji jednokładność h jest podobieństwem. Translacje zachowują kąty zatem $g^{-1}h = f$ jest również podobieństwem. Wykazaliśmy w ten sposób, że każda jednokładność jest podobieństwem.

Zwróćmy uwagę, że jednokładność o takiej skali λ, że $|\lambda| = 1$ jest izometrią, a dokładniej, gdy $\lambda = 1$ to jednokładność jest identycznością natomiast, gdy $\lambda = -1$ to jednokładność jest symetrią środkową.

Z samej definicji wynika, że złożenie dwóch podobieństw jest podobieństwem bo zachowane zostaną przy tym złożeniu kąty. Co więcej, podobieństwa tworzą grupę przekształceń. Zauważmy, że w szczególności złożenie izometrii i jednokładności jest podobieństwem. Udowodnimy teraz twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 8.1. *Każde podobieństwo można przedstawić jako złożenie izometrii i jednokładności.*

Dowód. CDN... □

Twierdzenie 8.2. *Przekształcenie afiniczne f jest podobieństwem wtw., gdy jego macierz jest postaci $M_f = \lambda A$, gdzie A jest macierzą ortogonalną, a λ jest dodatnią liczbą rzeczywistą.*

Dowód. $\Rightarrow$: Na mocy 8.1 wystarczy wyliczyć macierz złożenia izometrii i jednokładności. Jeśli skala jednokładności jest ujemna, to w rozkładzie f na izometrię i jednokładność należy dodatkowo wziąć symetrię środkową o tym samym środku co jednokładność.

$\Leftarrow$: Weźmy przekształcenie afiniczne g o macierzy A i jednokładność h o skali λ. Wówczas z dokładnością do translacji $f = hg$, a złożenie izometrii i jednokładności jest podobieństwem. □

Literatura

[1] BENNETTT, M. K. *Affine and projective geometry.* Wiley-Interscience, New York, 1995.

[2] BORSUK, K., AND SZMIELEW, W. *Podstawy geometrii.* PWN, Warszawa, 1972.

[3] COXETER, H. *Wstęp do geometrii dawnej i nowej.* PWN, Warszawa, 1967.

[4] KORDOS, M., AND SZCZERBA, L. W. *Geometria dla nauczycieli*, vol. 57 of *Biblioteka Matematyczna.* PWN, Warszawa, 1976.

[5] LENZ, H. *Matematyka elementarna z wyższego stanowiska.* PWN, Warszawa, 1968.

[6] MODENOV, P., AND PARHOMENKO, A. *Geometric Transformations.* Academic Press, New York, 1965.

[7] SZMIELEW, W. *Od geometrii afinicznej do euklidesowej.* PWN, Warszawa, 1983.

[8] SZUREK, M. *Opowieści geometryczne.* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogczne, Warszawa, 1987.