Matematyka dyskretna

Lista 1

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie pary w relacji $\rho \subseteq X \times Y$, gdzie

(a) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{6, 7, 8\}$ i $\rho = \{(x, y) \colon x \mid y\}$,
(b) $X = Y = \mathbb{N}$ i $\rho = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leqslant 10\}$.

Zadanie 2. Które z własności, tzn. zwrotność, symetrię, antysymetrię, przechodniość, posiada relacja $\rho \subseteq X \times X$?

(a) $X =$ zbiór prostych na płaszczyźnie, $\rho = \{(x, y) \colon x \parallel y\}$,
(b) $X =$ zbiór prostych na płaszczyźnie, $\rho = \{(x, y) \colon x \perp y\}$,
(c) $X =$ zbiór prostych na płaszczyźnie, $\rho = \{(x, y) \colon x \cap y \neq \emptyset\}$,
(d) $X =$ zbiór prostych na płaszczyźnie, $\rho = \{(x, y) \colon |x \cap y| = 1\}$,
(e) $X =$ zbiór słów, $\rho = \{(x, y) \colon$ słowo x ma tę samą długość co słowo $y\}$,
(f) $X =$ zbiór słów, $\rho = \{(x, y) \colon$ słowo x ma wspólną przynajmniej jedną literę ze słowem $y\}$,
(g) $X = \mathbb{R}$, $\rho = \{(x, y) \colon x \leqslant y\}$,
(h) $X = \mathbb{R}$, $\rho = \{(x, y) \colon x < y\}$,
(i) $X = \mathbb{R}$, $\rho = \{(x, y) \colon 0 \leqslant xy\}$.

Zadanie 3. Które z podstawowych własności spełniają następujące relacje?

(a) $x \,\rho\, y \iff x \mid y,$ dla $x, y \in \mathbb{N}_0$,
(b) $x \,\rho\, y \iff 2 \mid (x + y)$ dla $x, y \in \mathbb{N}$,
(c) $x \,\rho\, y \iff 3|(x - y)$ dla $x, y \in \mathbb{N}$,
(d) $x \,\rho\, y \iff |x| < |y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$,
(e) $x \,\rho\, y \iff x + y = 1$ dla $x, y \in \mathbb{R}$,
(f) $x \,\rho\, y \iff 1 \leqslant x + y$ dla $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Ograniczając relacje (a), (b), (c) z zadania 2 do zbioru $\{1, 2, \ldots, 8\}$ sporządzić tabelki tych relacji.

Zadanie 5. Które z podstawowych własności ma relacja określona na zbiorze X formułą

$$a \,\rho\, b \iff \mathrm{nwd}(a, b) = 1.$$

Jak zmieni się ta relacja (i jej własności), gdy przyjmiemy:

(a) $X = \{2, 3, 4, \ldots\}$,
(b) $X =$ zbiór liczb parzystych,
(c) $X =$ zbiór liczb pierwszych.

Zadanie 6. Które z relacji opisanych w zadaniach 2, 3 są relacjami równoważności? Dla takich relacji wyznaczyć klasy abstrakcji.

Zadanie 7. Na zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ określamy następującą relację:

$$x \, \rho \, y \iff x^2 = y^2.$$

Uzasadnij, że to relacja równoważności i wyznacz jej klasy abstrakcji.

Zadanie 8. Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i niech ρ będzie relacją w rodzinie 2^X wszystkich podzbiorów zbioru X określoną w następujący sposób:

$$A \, \rho \, B \iff |A| = |B|,$$

gdzie $|C|$ oznacza ilość elementów zbioru C. Sprawdzić, że relacja ρ jest relacją równoważności. Podać klasę równoważności tej relacji o reprezentancie $\{1, 2\}$.

Zadanie 9. Czy na zbiorze $\{x \in \mathbb{R} \colon 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ istnieje relacja równoważności, której klasami abstrakcji są zbiory: $\{x \in \mathbb{R} \colon 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\}$ oraz $\{x \in \mathbb{R} \colon 1 < x \leqslant 2\}$.

Zadanie 10. Wykazać, że każda z poniższych relacji jest relacją równoważności i wyznaczyć jej klasy abstrakcji:

(a) $x \, \rho \, y \iff |x| = |y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$,

(b) $k \, \rho \, n \iff k$ ma tyle samo cyfr co n, dla $k, n \in \mathbb{N}$,

(c) $(m_1, n_1) \, \rho \, (m_2, n_2) \iff m_1 + n_2 = m_2 + n_1$ dla $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N}^2$,

(d) $(x_1, y_1) \, \rho \, (x_2, y_2) \iff x_1 - 3y_1 = x_2 - 3y_2$ dla $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 11. Określić relację równoważności na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, tak aby klasami abstrakcji tej relacji były:

(a) proste postaci $y = 3x + b$, $b \in \mathbb{R}$,

(b) okręgi o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniach $r \geqslant 0$.

Zadanie 12. Niech l będzie ustaloną prostą na płaszczyźnie Π. Określamy relację ρ na zbiorze wszystkich prostych na płaszczyźnie Π w następujący sposób

$$k \, \rho \, m \iff k \cap l \neq \emptyset \quad \text{oraz} \quad m \cap l \neq \emptyset.$$

Czy relacja ρ jest relacją równoważności?

Matematyka dyskretna

Lista 2

Zadanie 1. Które z relacji określonych na poprzedniej liście są funkcjami?

Zadanie 2. Która z poniższych relacji $\rho \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{a, b, c, d, e\}$ jest funkcją? Dla każdej z takich relacji wyznaczyć relację odwrotną. Która z nich jest funkcją?

(a) $\rho = \{(1, b), (1, c), (3, d), (2, a)\}$,

(b) $\rho = \{(1, c), (2, d), (4, e), (3, a), (5, b)\}$,

(c) $\rho = \{(2, b), (4, c), (2, a)\}$,

(d) $\rho = \{(1, d), (2, d), (5, e), (3, a), (4, e)\}$.

Zadanie 3. Która z następujących funkcji jest surjekcją, która iniekcją, a która bijekcją? Dla bijekcji wyznaczyć funkcje odwrotne.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$,

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x| + |x - 1|$,

(c) $f : [1, \infty) \to [1, \infty), \quad f(x) = |x| + |x - 1|$,

(d) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \log_2 x$,

(e) $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 2x$,

(f) $f : [1, \infty) \to [-1, \infty), \quad f(x) = x^2 - 2x$.

Zadanie 4. Wykazać, że złożenie surjekcji (iniekcji) jest surjekcją (iniekcją).

Zadanie 5. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz zbiory A i B. Znaleźć zbiory $f(A)$ i $f^{-1}(B)$, gdy

(a) $f(x) = |x^2 - 4|, A = [0, 1], B = [2, 4]$,

(b) $f(x) = |x^2 - 2x|, A = (-1, 1), B = (0, \frac{3}{4})$,

(c) $f(x) = 2^x, A = [1, 3), B = [3, 5)$.

Matematyka dyskretna

Lista 3

Zadanie 1. Wykazać, że relacja $\sim$ równoliczości zbiorów jest równoważnością.

Zadanie 2. Czy następujące zbiory są równoliczne?

(a) $A = \{a, b, 1, 2\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$,

(b) $A = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 - 2x + 1 = 0\}$, $B = \emptyset$,

(c) $A = \mathbb{N}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \colon n = 3k \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{N}\}$,

(d) $A = \{n \in \mathbb{N} \colon 10 < n\}$, $B = \mathbb{N}$,

(e) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$,

(f) $A = (0, 1)$, $B = (1, \infty)$,

(g) $A = (-\infty, 0]$, $B = [0, \infty)$,

(h) $A = (0, \infty)$, $B = (a, \infty)$,

(i) $A = (0, 1)$, $B = \mathbb{R}$,

Zadanie 3. Wykazać równoliczność zbioru punktów we wnętrzu i brzegu kwadratu ze zbiorem punktów na jednym z jego boków.

Zadanie 4. Wykazać równoliczność zbiorów punktów dwóch okręgów.

Zadanie 5. Czy zbiór, którego każdy podzbiór właściwy jest przeliczalny, jest zbiorem przeliczalnym?

Zadanie 6. Zbadać moc zbioru wszystkich okręgów na płaszczyźnie o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu będącym całkowitą wielokrotnością $\sqrt{2}$.

Matematyka dyskretna

Lista 4

Zadanie 1. Sprawdzić, że

(a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$,

(b) $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

(c) $0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(d) $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \dfrac{3n^2 + n}{2}$,

(e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$,

(f) $(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$,

(g) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$,

(h) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$,

(i) $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$.

Zadanie 2. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $n^2 < 2^n$?

Zadanie 3. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $6n + 6 < 2^n$?

Zadanie 4. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $n < 2^n$?

Zadanie 5. Znajdź zbiór liczb naturalnych, dla których zachodzi nierówność $5n \leqslant n^2 - 3$.

Zadanie 6. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$,

(a) $8 \mid 11^n - 3^n$,

(b) $3 \mid 10^n + 4^n - 2$,

(c) $5 \mid n^5 - n$,

(d) $2 \mid n^2 + n$,

(e) $19 \mid (5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1})$,

(f) $30 \mid n^5 - n$,

(g) $6 \mid n^3 - n$,

(h) $6 \mid n^3 + 5n$,

(i) $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$,

Zadanie 7. Wykaż, że dla $n \geqslant 2$ liczba postaci 2^{2^n} ma na końcu w zapisie dziesiętnym cyfrę 6.

Zadanie 8. Niech $A = \{n \in \mathbb{N} \colon n^2 - 3n + 3 \text{ jest parzysta}\}$. Pokaż, że jeśli $n \in A$ to i $n + 1 \in A$. Jakie liczby należą więc do A?

Zadanie 9. Pokaż, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi następująca równość:

(a) $\dfrac{1}{1\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 13} + \dfrac{1}{13\cdot 19} + \cdots + \dfrac{1}{(6n-5)\cdot(6n+1)} = \dfrac{n}{6n+1}$,

(b) $\dfrac{1}{2\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 8} + \dfrac{1}{8\cdot 11} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \dfrac{n}{2(3n+2)}$,

(c) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$,

(d) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$,

(e) $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$.

Matematyka dyskretna

Lista 5

Zadanie 1. Oblicz a_4, gdy wiadomo, że

(a) $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n^2 + a_{n-1}$ dla $n \geqslant 1$,

(b) $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_{n+1} = 2^{a_n}$ dla $n \geqslant 1$,

(c) $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n, & \text{gdy } 2 \mid n, \\ -3a_n, & \text{gdy } 2 \nmid n, \end{cases}$ dla $n \geqslant 1$.

Zadanie 2. Dany jest ciąg arytmetyczny: $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$. Podaj wzór rekurencyjny tego ciągu.

Zadanie 3. Dany jest ciąg geometryczny: $8, 4, 2, 1, \ldots$. Podaj wzór rekurencyjny tego ciągu.

Zadanie 4. Podaj rekurencyjną definicję ciągu a_n, w której a_n jest wyrażone przy pomocy a_{n-1}. Pamiętaj o warunkach początkowych.

(a) $a_n = 10^n$ dla $n \geqslant 0$,

(b) $a_n = 5$ dla $n \geqslant 1$,

(c) $a_n = -3n$ dla $n \geqslant 0$.

Zadanie 5. Znajdź wzór jawny ciągu. Poprawność wzoru uzasadnij indukcyjnie.

(a) $a_1 = 3$, $a_2 = -1$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ dla $n \geqslant 3$,

(b) $a_0 = -2$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2a_n}$ dla $n \geqslant 0$,

(c) $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1}$ dla $n \geqslant 1$,

(d) $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$,

(e) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$ dla $n \geqslant 2$,

(f) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$,

(g) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = -14a_{n-1} - 49a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$,

(h) $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$ dla $n \geqslant 1$.

Zadanie 6. Niech a_n oznacza (a) sumę, (b) sumę kwadratów, (c) sumę sześcianów, pierwszych n liczb naturalnych. Podaj rekurencyjną definicję ciągu a_n.

Zadanie 7. W pewnym mieście jeden człowiek zachorował na grypę. Załóżmy, że każda chora osoba zaraża codziennie 4 zdrowe osoby. Ilu będzie chorych po upływie n dni? Podaj rozwiązanie w postaci jawnej i rekurencyjnej.

Matematyka dyskretna

Lista 6

Zadanie 1. Piotrek ma w szufladzie 200 białych skarpetek i 300 czarnych. Lewe skarpetki są zupełnie nieodróżnialne od prawych. Niestety Piotr jest daltonistą i nie potrafi też odróżniać nawet białego i czarnego koloru.

Ile skarpetek musi on zabrać, aby mieć pewność, że choć dwie będą tego samego koloru?

Ile skarpetek musi on zabrać, aby mieć pewność, że choć 10 będzie tego samego koloru?

Zadanie 2. Uzasadnij, że wśród wszystkich mieszkańców Wilna są co najmniej dwie osoby, które mają tyle samo włosów na głowie.

Zadanie 3. W szufladzie jest 20 sztućców, to znaczy łyżek, noży i widelców. Udowodnij, że znajdziemy tam 7 łyżek, lub 10 noży, lub 5 widelców.

Zadanie 4. Kabel długości 100cm tniemy dowolnie na 6 części tak, że długość każdej z tych części wyraża się całkowitą liczbą centymetrów. Uzasadnić, że zawsze któraś z części będzie miała przynajmniej 17cm. Czy zawsze musi powstać część dłuższa niż 17cm?

Zadanie 5. Pokazać, że wsród 25 studentów zdających egzamin zawsze znajdziemy pięciu, którzy otrzymali te samą ocenę przy skali ocen: 2, 3, 3+, 4, 4+, 5.

Zadanie 6. Uzasadnij, że wśród pięciu punktów wybranych wewnątrz kwadratu wielkości 2×2 zawsze są dwa punkty odległe o nie więcej niż $\sqrt{2}$.

Zadanie 7. Uzasadnij, że wsród dowolnych 14 liczb naturalnych znajdziemy dwie, które przy dzieleniu przez 13 dają tę samą resztę.

Matematyka dyskretna

Lista 7

Zadanie 1. Ile jest liczb naturalnych od 1 do 100 niepodzielnych ani przez 2, ani przez 3?

Zadanie 2. Ile jest liczb naturalnych od 1 do 100 niepodzielnych ani przez 2, ani przez 3, ani przez 5?

Zadanie 3. Zbadano 50 samochodów wykonując testy na poziom zawartości trzech grup zanieczyszczeń: NO, HC i CO. 1 samochód nie spełnia żadnej z trzech norm, 3 samochody przekroczyły poziom NO i HC, 2 samochody przekroczyły poziom NO i CO, 1 samochód przekroczył poziom HC i CO, 6 samochodów ma zbyt wysoki poziom NO, 4 samochody mają zbyt wysoki poziom HC, a 3 samochody mają zbyt wysoki poziom CO. Ile samochodów spełnia wszystkie testowane normy?

Zadanie 4. Ile jest ciągów długości n, gdzie $n > 3$, złożonych z cyfr $0, 1, \ldots, 9$ takich, w których nie występują cyfry 1, 2, 3.

Zadanie 5. Na ile sposobów z talii 52 kart można wybrać 1 asa? Na ile sposobów można wybrać 1 asa i 1 króla? Na ile sposobów można wybrać 1 asa, 1 króla i 1 damę? A na ile sposobów można wybrać 4 karty tak aby był 1 as, 1 król i 1 dama?

Zadanie 6. Ile jest PIN-ów, czyli cztero-elementowych słów złożonych z cyfr dziesiętnych, takich że żadna cyfra się nie powtarza?

Zadanie 7. Na kurs tańca uczęszcza pięciu chłopaków i pięć dziewcząt. Kroki taneczne ćwiczy się parami. Na ile sposobów może być wykonany jeden taniec?

Zadanie 8. 128-miu uczestnikom pewnej konferencji informatycznej przygotowano konta komputerowe, gdzie ID są 8-znakowe i utworzone wyłącznie z liter a, b. Przydzielono je później losowo. Na ile sposobów było to możliwe?

Zadanie 9. Na ile sposobów można rozstawić 8 wież na ponumerowanych polach szachownicy 8×8 w taki sposób, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia?

Zadanie 10. Mamy 9 białych i 9 czarnych klocków o nieodróżnialnych kształtach. Na ile sposobów możemy zbudować wieżę o wysokości 10 klocków?

Zadanie 11. Ile jest różnych relacji dwuargumentowych na zbiorze n elementowym? Ile spośród nich jest zwrotnych, a ile symetrycznych?

Matematyka dyskretna

Lista 8

Zadanie 1. Ile jest ciągów długości n, $n > 3$, złożonych z cyfr $0, 1, \ldots, 9$ takich, w których nie występują cyfry 1, 2, 3. Ile jest takich ciągów, że każda z cyfr 1, 2, 3 występuje w każdym z ciągów co najmniej raz?

Zadanie 2. Na ile sposobów z talii 52 kart można wybrać 5 kart tak, aby otrzymać co najmniej jednego asa, co najmniej jednego króla i co najmniej jedną damę?

Zadanie 3. Ile jest par postaci (A, B), gdzie $A \subseteq B \subseteq X$, gdy $|X| = n$?

Zadanie 4. Na ile sposobów można rozmieścić 5 czerwonych kulek w 4 ponumerowanych pudełkach?

Zadanie 5. Ile jest sposobów rozmieszczenia n identycznych przedmiotów w k ponumerowanych pudełkach?

Zadanie 6. Na ile sposobów można wybrać 10 monet mając nieograniczony zapas po 1, 5, 10 i 20 groszy?

Zadanie 7. 12 identycznych listów ma być wrzuconych do 4 różnych skrzynek pocztowych. Na ile sposobów można to zrobić? Ile jest możliwych sposobów, gdy do każdej ze skrzynek muszą być wrzucone co najmniej 2 listy?

Zadanie 8. Ile można otrzymać różnych mieszanek po 10 cukierków jeśli mamy do dyspozycji 4 rodzaje cukierków w nieograniczonej ilości?

Zadanie 9. Wykaż, że

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Zadanie 10. Wykaż, że

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}.$$

Zadanie 11. Wykaż, że

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Rozważ liczbę wyborów n osób z $2n$-osobowej grupy złożonej z n mężczyzn i n kobiet.

Zadanie 12. Wykaż, że

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$

Rozważ liczbę wyborów z grupy n osób podzbioru z wyznaczonym w nim przywódcą.

Zadanie 13. Wykaż, że

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = 2^k\binom{n}{k}.$$

Rozważ liczbę kolorowań dwoma kolorami k rozróżnialnych obiektów wybranych spośród n obiektów.

Matematyka dyskretna

Lista 9

Zadanie 1. Udowodnij, że:

(a) $2|n^2 - n$,

(b) $6|n^3 - n$,

(c) $30|n^5 - n$,

(d) $10|2^{2^n} - 6$, dla $n \geqslant 2$.

Zadanie 2. Udowodnij, że dla $a, b, n \in \mathbb{N}$, jeśli $a|n$, $b|n$ i $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$, to $ab|n$.

Zadanie 3. Stosując algorytm Euklidesa oblicz $\mathrm{NWD}(101, 1001)$ oraz $\mathrm{NWD}(55, 89)$.

Zadanie 4. Która liczba jest większa $2^8 \cdot 18^{10}$ czy 6^{19}?

Zadanie 5. Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 5^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 7^2$. Oblicz NWD i NWW dla wszystkich możliwych par liczb oraz $\mathrm{NWD}(a, b, c)$ i $\mathrm{NWW}(a, b, c)$?

Zadanie 6. Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 6^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 4^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^2$. Oblicz NWD i NWW dla wszystkich możliwych par liczb oraz $\mathrm{NWD}(a, b, c)$ i $\mathrm{NWW}(a, b, c)$?

Zadanie 7. Oblicz $\mathrm{NWD}(24!, 24^8)$ oraz $\mathrm{NWW}(12^{12}, 18^{18})$.

Zadanie 8. Oblicz $\mathrm{NWD}(254678914^{37}, 10^{43})$.

Zadanie 9. Oblicz $\mathrm{NWD}(472851364^{43}, 2^{50})$.

Zadanie 10. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których liczba $n^2 - 1$ jest pierwsza.

Zadanie 11. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $3p + 1$ jest pierwsza.

Zadanie 12. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba p^2+2 jest pierwsza.

Matematyka dyskretna

Lista 10

Zadanie 1. Oblicz:

(a) $3^{31} - 10^4 \bmod 8$,

(b) $10^{999} \bmod 9$,

(c) $1 + 10^2 2 + 10^3 3 + 10^4 4 + 10^5 5 \bmod 9$,

(d) $18^{15} \bmod 11$,

(e) $19^{15} + 989^{444} \bmod 12$,

(f) $999^{12} + 999^{24} + 999^{36} \bmod 14$.

Zadanie 2. Podaj zbiór rozwiązań następujących równań:

(a) $21x \equiv_{36} 5$,

(b) $4x \equiv_7 6$,

(c) $3x \equiv_{33} 27$,

(d) $3x \equiv_{100} 59$,

(e) $2x \equiv_4 3$,

(f) $16x \equiv_{24} 8$.

(g) $11x \equiv_{22} 33$,

(h) $42x \equiv_{12} 78$,

(i) $8x \equiv_6 50$.

Zadanie 3. Niech n będzie liczbą całkowitą różną od 1. Pokaż, że n nie dzieli $2^n - 1$.

Zadanie 4. Znajdź ostatnią cyfrę liczby $53^{53} - 33^{33}$.

Zadanie 5. Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby $99^{99} - 51^{51}$.

Zadanie 6. Udowodnij, że liczba naturalna n jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr też jest podzielna przez 9. Jak jest dla liczby 3?

Zadanie 7. Znajdź najmniejszą, nieujemną liczbę x, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, przy dzieleniu przez 11 daje resztę 4, a przy dzieleniu przez 16 daje resztę 5.

Zadanie 8. Znajdź najmniejszą, nieujemną liczbę x, która przy dzieleniu przez 31 daje resztę 23, przy dzieleniu przez 12 daje resztę 7, a przy dzieleniu przez 35 daje resztę 12.

Zadanie 9. Znajdź najmniejszą, nieujemną liczbę x, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, przy dzieleniu przez 13 daje resztę 12, przy dzieleniu przez 11 daje resztę 10, a przy dzieleniu przez 7 daje resztę 1.

Zadanie 10. Znajdź najmniejszą, nieujemną liczbę x, która jest podzielna przez 2, przy dzieleniu przez 12 daje resztę 7, a przy dzieleniu przez 15 daje resztę 2.

Matematyka dyskretna

Lista 11

Zadanie 1. Przedstaw za pomocą macierzy incydencji graf $\mathbb{G} = \langle V, E \rangle$ w którym

$$V = 1, 2, 3, 4 \qquad \text{i} \qquad E = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,3\},\{2,4\}\}.$$

Narysuj ten graf

Zadanie 2. Czy graf (nieskierowany) o 7 wierzchołkach, w którym suma stopni wierzchołków wynosi 30 może być niespójny?

Zadanie 3. Czy graf $\mathbb{G} = \langle V, E \rangle$ w którym

$$V = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \qquad \text{i} \qquad E = \{\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,5\},\{3,6\}\}$$

jest planarny?

Zadanie 4. Sprawdź bez rysowania grafu, czy w grafie o macierzy sąsiedztwa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

istnieje droga lub cykl Eulera?

Zadanie 5. Czy w grafie $\mathcal{K}_{17,17}$ istnieje cykl Hamiltona? Jeśli tak to ile wynosi długość tego cyklu?

Zadanie 6. Udowodnij, że drzewo jest grafem dwudzielnym.