Matematyka dyskretna

Lista 1

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie pary w relacji $\rho \subseteq X \times Y$, gdzie

(a) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{6, 7, 8\}$ i $\rho = \{(x, y)\colon x \mid y\}$,
(b) $X = Y = \mathbb{N}$ i $\rho = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \leqslant 10\}$.

Zadanie 2. Które z własności, tzn. zwrotność, symetrię, antysymetrię, przechodniość, posiada relacja $\rho \subseteq X \times X$?

(a) X = zbiór prostych na płaszczyźnie, $\rho = \{(x, y)\colon x \parallel y\}$,
(b) X = zbiór prostych na płaszczyźnie, $\rho = \{(x, y)\colon x \perp y\}$,
(c) X = zbiór prostych na płaszczyźnie, $\rho = \{(x, y)\colon x \cap y \neq \emptyset\}$,
(d) X = zbiór prostych na płaszczyźnie, $\rho = \{(x, y)\colon |x \cap y| = 1\}$,
(e) X = zbiór słów, $\rho = \{(x, y)\colon$ słowo x ma tę samą długość co słowo $y\}$,
(f) X = zbiór słów, $\rho = \{(x, y)\colon$ słowo x ma wspólną przynajmniej jedną literę ze słowem $y\}$,
(g) $X = \mathbb{R}$, $\rho = \{(x, y)\colon x \leqslant y\}$,
(h) $X = \mathbb{R}$, $\rho = \{(x, y)\colon x < y\}$,
(i) $X = \mathbb{R}$, $\rho = \{(x, y)\colon 0 \leqslant xy\}$.

Zadanie 3. Które z podstawowych własności spełniają następujące relacje?

(a) $x \,\rho\, y \iff x \mid y,$ dla $x, y \in \mathbb{N}_0$,
(b) $x \,\rho\, y \iff 2 \mid (x + y)$ dla $x, y \in \mathbb{N}$,
(c) $x \,\rho\, y \iff 3 \mid (x - y)$ dla $x, y \in \mathbb{N}$,
(d) $x \,\rho\, y \iff |x| < |y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$,
(e) $x \,\rho\, y \iff x + y = 1$ dla $x, y \in \mathbb{R}$,
(f) $x \,\rho\, y \iff 1 \leqslant x + y$ dla $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Ograniczając relacje (a), (b), (c) z zadania 2 do zbioru $\{1, 2, \ldots, 8\}$ sporządzić tabelki tych relacji.

Zadanie 5. Które z podstawowych własności ma relacja określona na zbiorze X formułą

$$a \,\rho\, b \iff \mathrm{NWD}(a, b) = 1.$$

Jak zmieni się ta relacja (i jej własności), gdy przyjmiemy:

(a) $X = \{2, 3, 4, \ldots\}$,
(b) X = zbiór liczb parzystych,
(c) X = zbiór liczb pierwszych.

Zadanie 6. Które z relacji opisanych w zadaniach 2, 3 są relacjami równoważności? Dla takich relacji wyznaczyć klasy abstrakcji.

Zadanie 7. Na zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ określamy następującą relację:

$$x \,\rho\, y \iff x^2 = y^2.$$

Uzasadnij, że to relacja równoważności i wyznacz jej klasy abstrakcji.

Zadanie 8. Niech $X = \{1,2,3,4,5\}$ i niech ρ będzie relacją w rodzinie 2^X wszystkich podzbiorów zbioru X określoną w następujący sposób:

$$A \,\rho\, B \iff |A| = |B|,$$

gdzie $|C|$ oznacza ilość elementów zbioru C. Sprawdzić, że relacja ρ jest relacją równoważności. Podać klasę równoważności tej relacji o reprezentancie $\{1,2\}$.

Zadanie 9. Czy na zbiorze $\{x \in \mathbb{R}\colon 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ istnieje relacja równoważności, której klasami abstrakcji są zbiory: $\{x \in \mathbb{R}\colon 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\}$ oraz $\{x \in \mathbb{R}\colon 1 < x \leqslant 2\}$.

Zadanie 10. Wykazać, że każda z poniższych relacji jest relacją równoważności i wyznaczyć jej klasy abstrakcji:

(a) $x \,\rho\, y \iff |x| = |y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$,

(b) $k \,\rho\, n \iff k$ ma tyle samo cyfr co n, dla $k, n \in \mathbb{N}$,

(c) $(m_1, n_1) \,\rho\, (m_2, n_2) \iff m_1 + n_2 = m_2 + n_1$ dla $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N}^2$,

(d) $(x_1, y_1) \,\rho\, (x_2, y_2) \iff x_1 - 3y_1 = x_2 - 3y_2$ dla $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 11. Określić relację równoważności na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, tak aby klasami abstrakcji tej relacji były:

(a) proste postaci $y = 3x + b$, $b \in \mathbb{R}$,

(b) okręgi o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniach $r \geqslant 0$.

Zadanie 12. Niech l będzie ustaloną prostą na płaszczyźnie Π. Określamy relację ρ na zbiorze wszystkich prostych na płaszczyźnie Π w następujący sposób

$$k \,\rho\, m \iff k \cap l \neq \emptyset \quad \text{oraz} \quad m \cap l \neq \emptyset.$$

Czy relacja ρ jest relacją równoważności?

Matematyka dyskretna

Lista 2

Zadanie 1. Które z relacji określonych na poprzedniej liście są funkcjami?

Zadanie 2. Która z poniższych relacji $\rho \subseteq \{1,2,3,4,5\} \times \{a,b,c,d,e\}$ jest funkcją? Dla każdej z takich relacji wyznaczyć relację odwrotną. Która z nich jest funkcją?

(a) $\rho = \{(1,b),(1,c),(3,d),(2,a)\}$,
(b) $\rho = \{(1,c),(2,d),(4,e),(3,a),(5,b)\}$,
(c) $\rho = \{(2,b),(4,c),(2,a)\}$,
(d) $\rho = \{(1,d),(2,d),(5,e),(3,a),(4,e)\}$.

Zadanie 3. Która z następujących funkcji jest surjekcją, która iniekcją, a która bijekcją? Dla bijekcji wyznaczyć funkcje odwrotne.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$,
(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x| + |x-1|$,
(c) $f\colon [1,\infty) \to [1,\infty), \quad f(x) = |x| + |x-1|$,
(d) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \log_2 x$,
(e) $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 2x$,
(f) $f\colon [1,\infty) \to [-1,\infty), \quad f(x) = x^2 - 2x$.

Zadanie 4. Wykazać, że złożenie surjekcji (iniekcji) jest surjekcją (iniekcją).

Zadanie 5. Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz zbiory A i B. Znaleźć zbiory $f(A)$ i $f^{-1}(B)$, gdy

(a) $f(x) = |x^2 - 4|, A = [0,1], B = [2,4]$,
(b) $f(x) = |x^2 - 2x|, A = (-1,1), B = (0,\frac{3}{4})$,
(c) $f(x) = 2^x, A = [1,3), B = [3,5)$.

Matematyka dyskretna

Lista 3

Zadanie 1. Wykazać, że relacja $\sim$ równoliczości zbiorów jest równoważnością.

Zadanie 2. Czy następujące zbiory są równoliczne?

(a) $A = \{a, b, 1, 2\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$,
(b) $A = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 - 2x + 1 = 0\}$, $B = \emptyset$,
(c) $A = \mathbb{N}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \colon n = 3k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}\}$,
(d) $A = \{n \in \mathbb{N} \colon 10 < n\}$, $B = \mathbb{N}$,
(e) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$,
(f) $A = (0, 1)$, $B = (1, \infty)$,
(g) $A = (-\infty, 0]$, $B = [0, \infty)$,
(h) $A = (0, \infty)$, $B = (a, \infty)$,
(i) $A = (0, 1)$, $B = \mathbb{R}$,

Zadanie 3. Wykazać równoliczność zbioru punktów we wnętrzu i brzegu kwadratu ze zbiorem punktów na jednym z jego boków.

Zadanie 4. Wykazać równoliczność zbiorów punktów dwóch okręgów.

Zadanie 5. Czego jest więcej, punktów na okręgu, czy punktów na prostej?

Zadanie 6. Zbadać moc zbioru wszystkich okręgów na płaszczyźnie o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu będącym całkowitą wielokrotnością $\sqrt{2}$.

Matematyka dyskretna

Lista 4

Zadanie 1. Sprawdzić, że

(a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$,

(b) $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

(c) $0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(d) $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n-1) = \dfrac{3n^2+n}{2}$,

(e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$,

(f) $(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$,

(g) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$,

(h) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$,

(i) $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n-3) = n(2n-1)$.

Zadanie 2. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $n^2 < 2^n$?

Zadanie 3. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $6n + 6 < 2^n$?

Zadanie 4. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $n < 2^n$?

Zadanie 5. Znajdź zbiór liczb naturalnych, dla których zachodzi nierówność $5n \leqslant n^2 - 3$.

Matematyka dyskretna

Lista 5

Zadanie 1. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$,

(a) $8 \mid 11^n - 3^n$,

(b) $3 \mid 10^n + 4^n - 2$,

(c) $5 \mid n^5 - n$,

(d) $2 \mid n^2 + n$,

(e) $19 \mid (5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1})$,

(f) $6 \mid n^3 - n$,

(g) $6 \mid n^3 + 5n$,

(h) $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

Zadanie 2. Pokaż, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi następująca równość:

(a) $\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \cdots + \frac{1}{(6n-5) \cdot (6n+1)} = \frac{n}{6n+1}$,

(b) $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$,

(c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$,

(d) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$,

(e) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$.

Zadanie 3. Wykaż, że dla $n \geqslant 2$ liczba postaci 2^{2^n} ma na końcu w zapisie dziesiętnym cyfrę 6.

Matematyka dyskretna

Lista 6

Zadanie 1. Oblicz a_4, gdy wiadomo, że

(a) $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$,

(b) $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_n = 2^{a_{n-1}}$ dla $n \geqslant 1$,

(c) $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_n = \begin{cases} 3a_{n-1}, & \text{gdy } 2 \nmid n, \\ -3a_{n-1}, & \text{gdy } 2 \mid n, \end{cases}$ dla $n \geqslant 1$.

Zadanie 2. Dany jest ciąg: $2, 5, 8, 11, \ldots$. Jaki to ciąg? Podaj wzór jawny i rekurencyjny tego ciągu.

Zadanie 3. Dany jest ciąg: $8, 4, 2, 1, \ldots$. Jaki to ciąg? Podaj wzór jawny i rekurencyjny tego ciągu.

Zadanie 4. Podaj rekurencyjną definicję ciągu a_n, w której a_n jest wyrażone przy pomocy a_{n-1}. Pamiętaj o warunkach początkowych.

(a) $a_n = 10^n$ dla $n \geqslant 0$,

(b) $a_n = 5$ dla $n \geqslant 1$,

(c) $a_n = -3n$ dla $n \geqslant 0$.

Zadanie 5. Znajdź wzór jawny ciągu. Poprawność wzoru uzasadnij indukcyjnie.

(a) $a_0 = 3, \quad a_1 = -1, \quad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$,

(b) $a_0 = -2, \quad a_n = \dfrac{1}{2a_{n-1}}$ dla $n \geqslant 1$,

(c) $a_0 = 1, \quad a_n = 2a_{n-1}$ dla $n \geqslant 1$,

(d) $a_0 = 2, \quad a_1 = 5, \quad a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$,

(e) $a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_n = \dfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$ dla $n \geqslant 2$,

(f) $a_0 = 2, \quad a_1 = 5, \quad a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$,

(g) $a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = -14a_{n-1} - 49a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$,

(h) $a_0 = 1, \quad a_n = 2a_{n-1} + 1$ dla $n \geqslant 1$.

Zadanie 6. Niech a_n oznacza (a) sumę, (b) sumę kwadratów, (c) sumę sześcianów, pierwszych n liczb naturalnych. Podaj rekurencyjną definicję ciągu a_n.

Zadanie 7. W pewnym mieście jeden człowiek zachorował na grypę. Załóżmy, że każda chora osoba zaraża codziennie 3 zdrowe osoby. Ilu będzie chorych po upływie n dni? Podaj rozwiązanie w postaci jawnej i rekurencyjnej.

Matematyka dyskretna

Lista 7

Zadanie 1. Ile jest liczb naturalnych od 1 do 100 niepodzielnych ani przez 2, ani przez 3?

Zadanie 2. Ile jest liczb naturalnych od 1 do 100 niepodzielnych ani przez 2, ani przez 3, ani przez 5?

Zadanie 3. Zbadano 50 samochodów wykonując testy na poziom zawartości trzech grup zanieczyszczeń: NO, HC i CO. 1 samochód nie spełnia żadnej z trzech norm, 3 samochody przekroczyły poziom NO i HC, 2 samochody przekroczyły poziom NO i CO, 1 samochód przekroczył poziom HC i CO, 6 samochodów ma zbyt wysoki poziom NO, 4 samochody mają zbyt wysoki poziom HC, a 3 samochody mają zbyt wysoki poziom CO. Ile samochodów spełnia wszystkie testowane normy?

Zadanie 4. Piotrek ma w szufladzie 200 białych skarpetek i 300 czarnych. Lewe skarpetki są zupełnie nieodróżnialne od prawych. Niestety Piotr jest daltonistą i nie potrafi też odróżniać nawet białego i czarnego koloru.

Ile skarpetek musi on zabrać, aby mieć pewność, że choć dwie będą tego samego koloru?

Ile skarpetek musi on zabrać, aby mieć pewność, że choć 10 będzie tego samego koloru?

Zadanie 5. Uzasadnij, że wśród wszystkich mieszkańców Wilna są co najmniej dwie osoby, które mają tyle samo włosów na głowie.

Zadanie 6. W szufladzie jest 20 sztućców, to znaczy łyżek, noży i widelców. Udowodnij, że znajdziemy tam 7 łyżek, lub 10 noży, lub 5 widelców.

Zadanie 7. W browarze stoi 30 beczek piwa, to znaczy pilsa, przenicznego, stouta i IPA. Dlaczego musi tam być co najmniej 10 beczek pilsa, 8 beczek przenicznego, 6 beczek stouta lub 9 beczek IPA.

Zadanie 8. Kabel długości 100cm tniemy dowolnie na 6 części tak, że długość każdej z tych części wyraża się całkowitą liczbą centymetrów. Uzasadnić, że zawsze któraś z części będzie miała przynajmniej 17cm. Czy zawsze musi powstać część dłuższa niż 17cm?

Zadanie 9. Pokazać, że wśród 25 studentów zdających egzamin zawsze znajdziemy pięciu, którzy otrzymali te samą ocenę przy skali ocen: 2, 3, 3+, 4, 4+, 5.

Zadanie 10. Uzasadnij, że wśród pięciu punktów wybranych wewnątrz kwadratu wielkości 2×2 zawsze są dwa punkty odległe o nie więcej niż $\sqrt{2}$.

Zadanie 11. Uzasadnij, że wśród dowolnych 14 liczb naturalnych znajdziemy dwie, które przy dzieleniu przez 13 dają tę samą resztę.

Matematyka dyskretna

Lista 8

Zadanie 1. Ile jest ciągów długości n, gdzie $n > 3$, złożonych z cyfr $0, 1, \ldots, 9$ takich, w których nie występują cyfry 1, 2, 3.

Zadanie 2. Na ile sposobów z talii 52 kart można wybrać 1 asa? Na ile sposobów można wybrać 1 asa i 1 króla? Na ile sposobów można wybrać 1 asa, 1 króla i 1 damę? A na ile sposobów można wybrać 4 karty tak aby był dokładnie 1 as, 1 król i 1 dama?

Zadanie 3. Ile jest PIN-ów, czyli cztero-elementowych słów złożonych z takich cyfr dziesiętnych, że żadna cyfra się nie powtarza?

Zadanie 4. Na kurs tańca uczęszcza pięciu chłopaków i pięć dziewcząt. Kroki taneczne ćwiczy się parami. Na ile sposobów może być wykonany jeden taniec?

Zadanie 5. 128-miu uczestnikom pewnej konferencji informatycznej przygotowano konta komputerowe, gdzie ID są 8-znakowe i utworzone wyłącznie z liter a, b. Przydzielono je później losowo. Na ile sposobów było to możliwe?

Zadanie 6. Na ile sposobów można rozstawić 8 rozróżnialnych wież na ponumerowanych polach szachownicy 8×8 w taki sposób, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia?

Zadanie 7. Mamy 9 białych i 9 czarnych klocków o nieodróżnialnych kształtach. Na ile sposobów możemy zbudować wieżę o wysokości 10 klocków?

Zadanie 8. Ile jest różnych relacji dwuargumentowych na zbiorze n elementowym? Ile spośród nich jest zwrotnych, a ile symetrycznych?

Zadanie 9. Na przyjęciu spotkało się n znajomych. Wszyscy przywitali się podaniem ręki. Było 10 powitań. Ile wynosi n?

Zadanie 10. Z liczb 1,2,..., 1000 losujemy dwie liczby x i y. Ile jest par (x, y), aby

(a) $23 \mid x$ oraz $23 \nmid y$,
(b) $23 \mid xy$?

Zadanie 11. Ile jest 4-cyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie występuje jedna cyfra nieparzysta i trzy parzyste?

Zadanie 12. Ile jest liczb 5-cyfrowych, w zapisie których nie ma 0, jest jedna cyfra 7 i jedna cyfra parzysta?

Zadanie 13. Cyfry 0,1,2,3,4,5,6 ustawiamy losowo w liczbę 7-cyfrową bez 0 na początku. Ile jest możliwych ustawień, aby uzyskać liczbę:

(a) podzielną przez 4,

(b) parzystą?

Zadanie 14. Z cyfr 2,4,6,8 układamy liczbę 4-cyfrową. Ile jest takich liczb? Ile jest takich liczb parzystych, a ile nieparzystych?

Zadanie 15. Z cyfr 1,2,3,4,5,6,7,8 układamy liczbę 5-cyfrową. Ile jest takich liczb? Ile jest takich liczb parzystych, a ile nieparzystych?

Zadanie 16. Dla $n > 4$ ile jest rozwiązań nierówności

$$1 < x < y < n?$$

Zadanie 17. Ile jest par postaci (A, B), gdzie $A \subseteq B \subseteq X$, gdy $|X| = n$?

Matematyka dyskretna

Lista 9

Zadanie 1. Na ile sposobów można ustawić 7 książek na półce?

Zadanie 2. Na ile sposobów można posadzić 7 osób na siedmiu ponumerowanych miejscach?

Zadanie 3. Na ile sposobów można ustawić 5 osób w kolejce?

Zadanie 4. Ile liczb można utworzyć z cyfr: 1,2,3,4,5? Ile jest takich liczb, gdy każda cyfra występuje dokładnie raz, a ile, gdy każda cyfra występuje najwyżej raz.

Zadanie 5. Ile liczb, bez 0 na początku, można utworzyć z cyfr: 0,1,2,3,4? Ile jest takich liczb, gdy każda cyfra występuje dokładnie raz, a ile, gdy każda cyfra występuje najwyżej raz.

Zadanie 6. Na ile sposobów może ustawić się w szeregu grupa 5 chłopców i 5 dziewcząt, tak aby dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie?

Zadanie 7. Na ile sposobów może ustawić się w szeregu grupa 6 chłopców i 5 dziewcząt, tak aby dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie?

Zadanie 8. Do autobusu wsiada grupa pasażerów składająca się z 6 kobiet i 5 mężczyzn. Ile istnieje wszystkich możliwych sposobów wejścia pasażerów do autobusu, jeżeli pierwsze wsiadają kobiety i wsiadanie odbywa się pojedynczo?

Zadanie 9. W kolejce do kasy biletowej ustawiły się 4 dziewczynki i 5 chłopców. Ile wynosi liczba wszystkich możliwych ustawień osób w tej kolejce?

Zadanie 10. Grupie n dziewczynek i n chłopców przydzielono miejsca w jednym rzędzie. Na ile różnych sposobów można ich posadzić, tak aby dziewczynki siedziały obok siebie?

Zadanie 11. Podczas zawodów lekkoatletycznych w biegu startowało siedmiu zawodników. Ile było możliwych wyników ukończenia biegu, jeśli:

(a) wszyscy zawodnicy ukończyli bieg,
(b) jeden z zawodników nie ukończył biegu i jego nazwisko jest znane,
(c) jeden z zawodników nie ukończył biegu i jego nazwisko nie jest znane?

Zadanie 12. Na ile sposobów można rozstawić 8 nierozróżnialnych wież na ponumerowanych polach szachownicy 8×8 w taki sposób, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia?

Zadanie 13. Ile różnych słów, mających sens lub nie, można ułożyć, przestawiając litery wyrazu *matematyka*?

Matematyka dyskretna

Lista 10

Zadanie 1. Ile jest ciągów długości n, $n > 3$, złożonych z cyfr $0, 1, \ldots, 9$ takich, w których nie występują cyfry 1, 2, 3. Ile jest takich ciągów, że każda z cyfr 1, 2, 3 występuje w każdym z ciągów co najmniej raz?

Zadanie 2. Na ile sposobów z talii 52 kart można wybrać 5 kart tak, aby otrzymać co najmniej jednego asa, co najmniej jednego króla i co najmniej jedną damę?

Zadanie 3. Z urny, gdzie jest 15 losów, w tym 5 wygrywających, wyciągamy 3 losy bez zwracania. Na ile sposobów można wylosować:

(a) same losy wygrywające,

(b) dokładnie jeden los wygrywający,

(c) co najmniej 2 losy wygrywające?

Zadanie 4. Na ile sposobów można rozmieścić 5 czerwonych kulek w 4 ponumerowanych pudełkach?

Zadanie 5. Ile jest sposobów rozmieszczenia n identycznych przedmiotów w k ponumerowanych pudełkach?

Zadanie 6. Na ile sposobów można wybrać 10 monet mając nieograniczony zapas po 1, 5, 10 i 20 groszy?

Zadanie 7. 12 identycznych listów ma być wrzuconych do 4 różnych skrzynek pocztowych. Na ile sposobów można to zrobić? Ile jest możliwych sposobów, gdy do każdej ze skrzynek muszą być wrzucone co najmniej 2 listy?

Zadanie 8. Ile można otrzymać różnych mieszanek po 10 cukierków jeśli mamy do dyspozycji 4 rodzaje cukierków w nieograniczonej ilości?

Zadanie 9. Wykaż, że

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Zadanie 10. Wykaż, że

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}.$$

Zadanie 11. Wykaż, że

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Rozważ liczbę wyborów n osób z $2n$-osobowej grupy złożonej z n mężczyzn i n kobiet.

Zadanie 12. Wykaż, że

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$

Rozważ liczbę wyborów z grupy n osób podzbioru z wyznaczonym w nim przywódcą.

Zadanie 13. Wykaż, że

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = 2^k\binom{n}{k}.$$

Rozważ liczbę kolorowań dwoma kolorami k rozróżnialnych obiektów wybranych spośród n obiektów.

Matematyka dyskretna

Lista 11

Zadanie 1. Rzucamy n monetami. Ile istnieje wszystkich możliwych wyników rzutu?

Zadanie 2. W pojemniku znajduje się 6 kul białych i 6 kul czarnych. Kule białe i czarne są ponumerowane od 1 do 6. Na ile różnych sposobów można wyjąć z pojemnika dwie kule tak, aby każda miała inny numer?

Zadanie 3. Windą, która zatrzymuje się na 10-ciu piętrach jedzie 8 osób. Na ile sposobów mogą one wyjść z windy, jeśli każda osoba wysiada na innym piętrze?

Zadanie 4. Przebudowano centralę telefoniczną 7-cyfrową, wprowadzając numery 8-cyfrowe. Ile w ten sposób przybędzie numerów jeśli zero nie może być na początku?

Zadanie 5. Ile jest liczb 6-cyfrowych bez zera na początku z jedną cyfrą 1 i z co najmniej dwiema cyframi 2?

Zadanie 6. W urnie znajduje się 12 kul ponumerowanych od 1 do 12. Losujemy kolejno 4 kule bez zwracania i zapisujemy ich numery w kolejności losowania. Ile możemy w ten sposób utworzyć liczb 4-ro cyfrowych większych od 500?

Zadanie 7. Święty Mikołaj ma 5 różnych prezentów. Na ile sposobów może obdarować troje dzieci wszystkimi prezentami pod warunkiem, że każde dziecko otrzyma co najmniej jeden prezent?

Zadanie 8. Przy okrągłym stole przydzielono miejsca w sposób losowy 10-ciu osobom. Wśród tych osób są rodzice i ich trójka dzieci. Ile jest sposobów przydziału miejsc przy tym stole w taki sposób, aby dzieci siedziały bezpośrednio między rodzicami?

Zadanie 9. Ile jest różnych możliwości wrzucenia trzech listów do dziesięciu skrzynek, jeżeli do jednej skrzynki można wrzucić tylko jeden list?

Zadanie 10. W klasie jest 13 dziewczynek i 15 chłopców. Na ile sposobów można wybrać 2-osobową delegację, w której będzie tylko jedna dziewczynka.

Zadanie 11. W klasie jest 13 dziewczynek i 15 chłopców. Na ile sposobów można wybrać 5-osobową delegację, w której będą dokładnie dwie dziewczynki.

Zadanie 12. W klasie jest 13 dziewczynek i 15 chłopców. Na ile sposobów można wybrać 5-osobową delegację, w której będą co najmniej dwie dziewczynki.

Zadanie 13. W biegu na 100 metrów startuje 8-miu zawodników. Ile istnieje możliwości ukończenia biegu, jeśli punktowane są tylko 3 pierwsze miejsca?

Zadanie 14. W urnie jest 5 kul ponumerowanych od 1 do 5. Losujemy kolejno 5 kul bez zwracania. Ile jest możliwych wyników tego losowania?

Zadanie 15. Dziesięciu przyjaciół na nadchodzące święta wysłało sobie wzajemnie życzenia na kartkach pocztowych. Ile kartek pocztowych wysłali wszyscy razem?

Zadanie 16. Oblicz liczbę przekątnych n-kąta wypukłego.

Zadanie 17. Ile prostych jest wyznaczonych przez 10 punktów, z których żadne 3 nie są współliniowe?

Zadanie 18. Na ile sposobów można umieścić w 7-miu szufladach 6 koszul i 5 krawatów?

Zadanie 19. W klasie liczącej 40 uczniów rozlosowano 4 bilety do kina na 4 różne filmy. Ile jest możliwości wyników losowania?

Zadanie 20. Spotyka się 9 osób. Ile nastąpi powitań?

Zadanie 21. Krzysiek urodził się w 1995 roku. Ile różnych czterocyfrowych kodów można utworzyć, przestawiając dowolnie cyfry w jego roku urodzenia?

Zadanie 22. Ile jest liczb 5-cyfrowych bez zera na początku zawierających dokładnie 2 cyfry nieparzyste podzielnych przez 2?

Zadanie 23. W turnieju szachowym wystartowało 10 zawodników. Każdy z każdym rozgrywa mecz i rewanż. Ile partii zostanie rozegranych w całym turnieju?

Zadanie 24. W pudełku jest 200 cukierków czekoladowych i 100 cukierków orzechowych. Na ile sposobów możemy zjeść 5 losowo wybranych cukierków?

Zadanie 25. Z talii 52 kart losujemy jedną, zwracamy ją, karty tasujemy i losujemy drugą. Ile jest możliwych wyników losowania?

Zadanie 26. Czterech studentów zdaje egzamin. Na ile sposobów mogą być wystawione oceny 2, 3, 3+, 4, 4+, 5 jeśli wiadomo, że student nie dostanie oceny 2?

Zadanie 27. Na ile sposobów można rozdzielić 4 jednoosobowe zaproszenia między 10 osób?

Matematyka dyskretna

Lista 12

Zadanie 1. Udowodnij, że dla $a, b, n \in \mathbb{N}$, jeśli $a \mid n$, $b \mid n$ i $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$, to $ab \mid n$.

Zadanie 2. Udowodnij, że:

(a) $2 \mid n^2 - n$,

(b) $6 \mid n^3 - n$,

(c) $30 \mid n^5 - n$,

(d) $10 \mid 2^{2^n} - 6$, dla $n \geqslant 2$.

Zadanie 3. Stosując algorytm Euklidesa oblicz $\mathrm{NWD}(101, 1001)$ oraz $\mathrm{NWD}(55, 89)$.

Zadanie 4. Która liczba jest większa $2^8 \cdot 18^{10}$ czy 6^{19}?

Zadanie 5. Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 5^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 7^2$. Oblicz NWD i NWW dla wszystkich możliwych par liczb oraz $\mathrm{NWD}(a, b, c)$ i $\mathrm{NWW}(a, b, c)$?

Zadanie 6. Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 6^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 4^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^2$. Oblicz NWD i NWW dla wszystkich możliwych par liczb oraz $\mathrm{NWD}(a, b, c)$ i $\mathrm{NWW}(a, b, c)$?

Zadanie 7. Oblicz $\mathrm{NWD}(27729, 1050)$.

Zadanie 8. Oblicz $\mathrm{NWD}(24!, 24^8)$ oraz $\mathrm{NWW}(12^{12}, 18^{18})$.

Zadanie 9. Oblicz $\mathrm{NWD}(254678914^{37}, 10^{43})$.

Zadanie 10. Oblicz $\mathrm{NWD}(472851364^{43}, 2^{50})$.

Zadanie 11. Oblicz $\mathrm{NWD}(27721^{59}, 18^{95})$.

Zadanie 12. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których liczba $n^2 - 1$ jest pierwsza.

Zadanie 13. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $3p + 1$ jest pierwsza.

Zadanie 14. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba p^2+2 jest pierwsza.

Matematyka dyskretna

Lista 13

Zadanie 1. Oblicz:

(a) $3^{31} - 10^4 \mod 8$,

(b) $10^{999} \mod 9$,

(c) $1 + 10^2 2 + 10^3 3 + 10^4 4 + 10^5 5 \mod 9$,

(d) $18^{15} \mod 11$,

(e) $19^{15} + 989^{444} \mod 12$,

(f) $999^{12} + 999^{24} + 999^{36} \mod 14$.

Zadanie 2. Podaj zbiór rozwiązań następujących równań:

(a) $21x \equiv_{36} 5$,

(b) $4x \equiv_{7} 6$,

(c) $3x \equiv_{33} 27$,

(d) $3x \equiv_{100} 59$,

(e) $2x \equiv_{4} 3$,

(f) $16x \equiv_{24} 8$.

(g) $11x \equiv_{22} 33$,

(h) $42x \equiv_{12} 78$,

(i) $8x \equiv_{6} 50$.

Zadanie 3. Niech n będzie liczbą całkowitą różną od 1. Pokaż, że n nie dzieli $2^n - 1$.

Zadanie 4. Znajdź ostatnią cyfrę liczby $53^{53} - 33^{33}$.

Zadanie 5. Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby $99^{99} - 51^{51}$.

Zadanie 6. Udowodnij, że liczba naturalna n jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr też jest podzielna przez 9. Jak jest dla liczby 3?

Zadanie 7. Znajdź najmniejszą, nieujemną liczbę x, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, przy dzieleniu przez 11 daje resztę 4, a przy dzieleniu przez 16 daje resztę 5.

Zadanie 8. Znajdź najmniejszą, nieujemną liczbę x, która przy dzieleniu przez 31 daje resztę 23, przy dzieleniu przez 12 daje resztę 7, a przy dzieleniu przez 35 daje resztę 12.

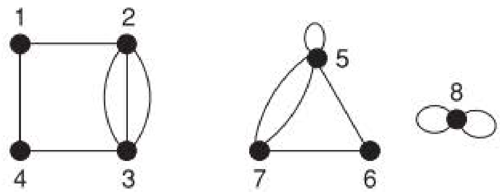
Zadanie 9. Znajdź najmniejszą, nieujemną liczbę x, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, przy dzieleniu przez 13 daje resztę 12, przy dzieleniu przez 11 daje resztę 10, a przy dzieleniu przez 7 daje resztę 1.

Zadanie 10. Znajdź najmniejszą, nieujemną liczbę x, która jest podzielna przez 2, przy dzieleniu przez 12 daje resztę 7, a przy dzieleniu przez 15 daje resztę 2.

Matematyka dyskretna

Lista 14

Zadanie 1. Podaj zbiór wierzchołków oraz krawędzi grafów z rysunku 1.



Rysunek 1

Zadanie 2. Maciek lubi Marię, Martę i Magdę. Marek lubi Marię i Magdę. Maria i Marta lubią się nawzajem. Narysuj graf ukazujący te relacje.

Zadanie 3. Narysuj graf o 5 wierzchołkach i 8 krawędziach, który:

(i) jest prosty,
(ii) nie jest prosty, ale nie ma pętli,
(iii) nie jest prosty, ale nie ma krawędzi wielokrotnych.

Zadanie 4. Narysuj graf o poniższej macierzy sąsiedztwa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zadanie 5. Narysuj graf o poniższej macierzy incydencji.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zadanie 6. Przedstaw za pomocą macierzy incydencji graf $\mathbb{G} = \langle V, E\rangle$ w którym

$$V = \{1,2,3,4\} \qquad \text{i} \qquad E = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,3\},\{2,4\}\}.$$

Narysuj ten graf.

Zadanie 7. Czy graf (nieskierowany) o 7 wierzchołkach, w którym suma stopni wierzchołków wynosi 30 może być niespójny?

Zadanie 8. Wykaż, że istnieje dokładnie $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ poetykietowanych grafów prostych o n wierzchołkach.

Zadanie 9. Narysuj następujące grafy:

(i) graf pusty N_5,

(ii) graf pełny K_6,

(iii) graf pełny dwudzielny $K_{2,4}$,

(iv) sumę grafów $K_{1,3}$ i W_4,

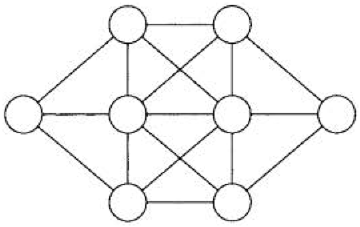
(v) dopełnienie cyklu C_4.

Zadanie 10. Czy graf $\mathbb{G} = \langle V, E \rangle$ w którym

$$V = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad \text{i} \qquad E = \{\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,5\},\{3,6\}\}$$

jest planarny?

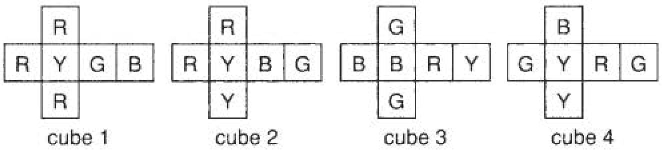
Zadanie 11. Umieść litery A, B, C, D, E, F, G, H w ośmiuk ółkach na rysunku 2 w taki sposób, by żadna litera nie sąsiadowała z literą występującą bezpośrednio po niej w alfabecie.



Rysunek 2

Zadanie 12. Udowodnij, że w dowolnej grupie 6 osób zawsze istnieją albo trzy osoby znające się nawzajem, albo trzy, z których żadna nie zna pozostałych dwóch.

Zadanie 13. Dane są 4 kostki, którch ścianki są pomalowane na czerwono, niebiesko, zielono i żółto, tak jak na rysunku 3. Czy można ustawić je jedna na drugiej w taki sposób, by na każdej ścianie bocznej otrzymanego prostopadłościanu o wymiarach $4 \times 1 \times 1$ wystąpiły wszystkie 4 kolory?



Rysunek 3

Matematyka dyskretna

Lista 15

Zadanie 1. W grafie Petersena znaleźć

(i) ścieżkę długości 5,
(ii) drogę długości 9,
(iii) cykle długości 5, 6, 8 i 9.

Zadanie 2. Które z grafów są eulerowskie lub półeulerowskie?

(i) K_5,
(ii) $K_{2,3}$,
(iii) graf sześcianu,
(iv) graf ośmiościanu,
(v) graf Petersena.

Zadanie 3.

(i) Dla jakich wartości n graf K_n jest eulerowski?
(ii) Dla jakich wartości r, s graf $K_{r,s}$ jest eulerowski?

Zadanie 4. Sprawdź bez rysowania grafu, czy w grafie o macierzy sąsiedztwa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

istnieje droga lub cykl Eulera?

Zadanie 5. Które z grafów są hamiltonowskie lub półhamiltonowskie?

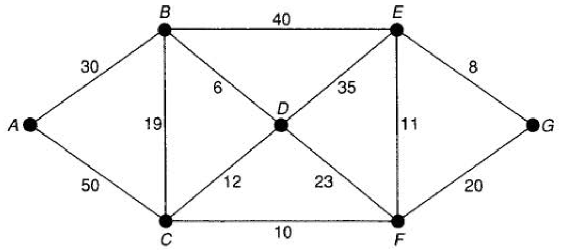
(i) K_5, (ii) $K_{2,3}$, (iii) ośmiościan, (iv) W_6, (v) Q_4.

Zadanie 6. Czy w grafie $\mathcal{K}_{17,17}$ istnieje cykl Hamiltona? Jeśli tak to ile wynosi długość tego cyklu?

Matematyka dyskretna

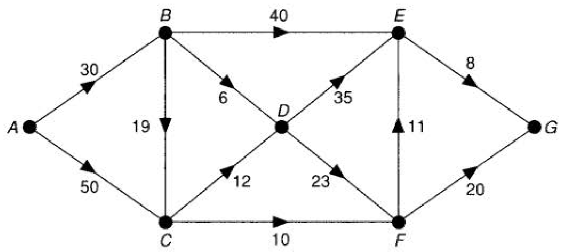
Lista 16

Zadanie 1. W grafie na rysunku 4 znajdź najkrótszą drogę z wierzchołka A do G.



Rysunek 4

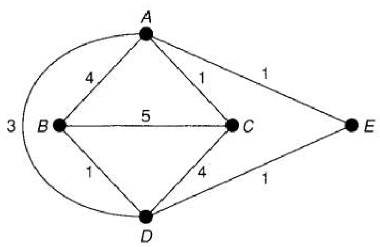
Zadanie 2. W grafie na rysunku 5 znajdź drogę krytyczną z wierzchołka A do G.



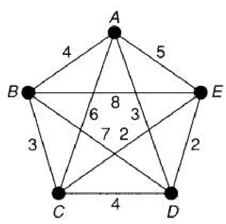
Rysunek 5

Zadanie 3. Znajdź rozwiązanie problemu chińskiego listonosza w grafie na rysunku 6.

Zadanie 4. Znajdź rozwiązanie problemu komiwojażera w grafie na rysunku 7.



Rysunek 6



Rysunek 7

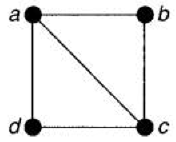
Zadanie 5. Narysuj wszystkie drzewa o sześciu wierzchołkach.

Zadanie 6. Narysuj wszystkie drzewa o siedmiu wierzchołkach.

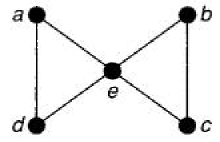
Zadanie 7. Udowodnij, że drzewo jest grafem dwudzielnym.

Zadanie 8. Jakie drzewa są pełnymi garfami dwudzielnymi?

Zadanie 9. Znajdź wszystkie drzewa rozpinające w grafach na rysunkach 8 i 9.

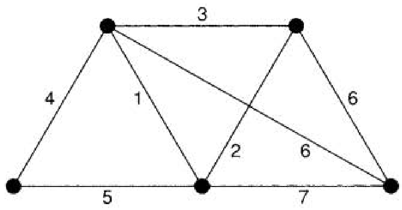


Rysunek 8

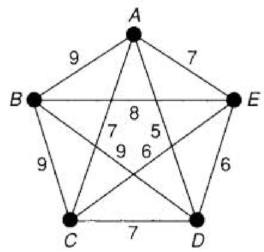


Rysunek 9

Zadanie 10. Znajdź drzewo rozpinające o minimalnej wadze w grafie na rysunku 10 oraz 11.

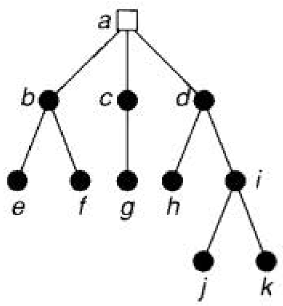


Rysunek 10

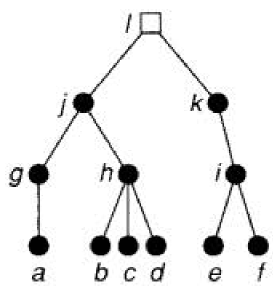


Rysunek 11

Zadanie 11. Wykonaj przeszukiwanie wszerz i wgłąb w drzewach 12 oraz 13.



Rysunek 12



Rysunek 13