Matematyka dyskretna: sprawdzian pop. 1

Imię: ....

Nazwisko: ....

1	2	$\sum$	Ocena

Zadanie 1. (S1) Niech ρ będzie relacją określoną dla liczb naturalnych w następujący sposób:

$$x \,\rho\, y \iff x \text{ i } y \text{ dają taką samą resztę z dzielenia przez 7.}$$

Sprawdzić, że relacja ρ jest relacją równoważności. Podać klasy abstrakcji tej relacji o reprezentantach 0, 1 i 5.

Zadanie 2. (S2) Niech $f\colon \mathbb{R} \to [1, \infty)$, $f(x) = 3x^2 + 1$. Czy funkcja f jest iniekcją i suriekcją? Odpowiedź uzasadnij.

Matematyka dyskretna: sprawdzian pop. 2

Imię: ....

Nazwisko: ....

1	2	3	4	$\sum$	Ocena

Zadanie 1. (S1) Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i niech ρ będzie relacją w rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru X określoną w następujący sposób:

$$A \,\rho\, B \iff |A| = |B|.$$

Sprawdzić, że relacja ρ jest relacją równoważności. Podać klasę równoważności tej relacji o reprezentancie $\{1, 2\}$.

Zadanie 2. (S2) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 3$. Czy f jest bijekcją? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3. (S3) Sprawdzić indukcyjnie, że

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Zadanie 4. (S4) Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$,

$$3 \mid 10^n + 4^n + 4.$$

Matematyka dyskretna: sprawdzian pop. 3

Imię: ....

Nazwisko: ....

1	2	3	4	$\sum$	Ocena

Zadanie 1. (S3) Pokaż, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi następująca równość:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Zadanie 2. (S4) Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$,

$$3 \mid 10^n + 4^n - 5.$$

Zadanie 3. (S5) Znajdź wzór jawny ciągu. Poprawność wzoru uzasadnij indukcyjnie.

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 3, \qquad a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2.$$

Zadanie 4. (S6) Dany jest ciąg: $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$. Podaj wzór rekurencyjny oraz jawny tego ciągu.

Matematyka dyskretna: sprawdzian pop. 4

Imię: ....

Nazwisko: ....

1	2	3	4	$\sum$	Ocena

Zadanie 1. (S5) Znajdź wzór jawny ciągu. Poprawność wzoru uzasadnij indukcyjnie.

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = -1, \qquad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 3.$$

Zadanie 2. (S6) Dany jest ciąg: $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \ldots$. Podaj wzór rekurencyjny oraz jawny tego ciągu.

Zadanie 3. (S7) Ile jest liczb naturalnych w przedziale od 1 do 1000 niepodzielnych ani przez 3, ani przez 7?

Zadanie 4. (S8) W magazynie stoją beczki z benzyną, olejem, płynem hamulcowym i płynem do chłodnic. Razem jest ich 20. Uzasadnij, że wśród nich musi być co najmniej 8 beczek benzyny, albo 7 beczek oleju, albo 3 beczki płynu hamulcowego, albo 5 beczek płynu do chłodnic.

Matematyka dyskretna: sprawdzian pop. 5

Imię: ....

Nazwisko: ....

1	2	3	4	$\sum$	Ocena

Zadanie 1. (S7) Ile jest liczb naturalnych w przedziale od 1 do 1000 niepodzielnych ani przez 2, ani przez 7?

Zadanie 2. (S8) Dlaczego w grupie 100 osób są zawsze przynajmniej dwie soby, które mają tylu samo znajomych. Zakładamy, że gdy osoba A zna osobę B, to również osoba B zna A.

Zadanie 3. (S9) Pięciu chłopaków i dziesięć dziewcząt tańczy w parach. Na ile sposobów może być wykonany jeden taniec? A na ile sposobów może być wykonany taniec gdyby chłopaków też było diesięciu?

Zadanie 4. (S10) Na ile sposobów można wybrać 9 monet mając nieograniczony zapas po 1, 2, 5 i 10 centów?

Matematyka dyskretna: sprawdzian pop. 6

Imię: ....

Nazwisko: ....

1	2	3	4	$\sum$	Ocena

Zadanie 1. (S9) Na ile sposobów można umieścić 3 nierozróżnialne pamięci USB w 7 portach? Jak zmieni się wynik, gdy te pamięci USB będą rozróżnialne?

Zadanie 2. (S10) Na ile sposobów można wybrać 5 kul spośród 10 kul czarnych i 20 białych? A ile jest sposobów wyboru, gdy wiadomo, że mają być dokładnie 3 kule białe?

Zadanie 3. (S11) Niech $a = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 6^2$, $b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4$, $c = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 10^4$. Oblicz $\mathrm{NWD}(a, b)$, $\mathrm{NWW}(a, b)$, $\mathrm{NWD}(b, c)$, $\mathrm{NWW}(b, c)$, $\mathrm{NWD}(a, b, c)$ i $\mathrm{NWW}(a, b, c)$?

Zadanie 4. (S12) Oblicz $\mathrm{NWD}(6^{1001}, 68068)$ oraz $\mathrm{NWW}(30^{15}, 1980^{15})$.

Matematyka dyskretna: sprawdzian pop. specjalny

Imię: ....

Nazwisko: ....

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$	Ocena

Zadanie 1. (S1) Niech ρ będzie relacją określoną dla liczb naturalnych w następujący sposób:

$$x \; \rho \; y \iff x \text{ i } y \text{ dają taką samą resztę z dzielenia przez 5.}$$

Sprawdzić, że relacja ρ jest relacją równoważności. Podać klasy abstrakcji tej relacji o reprezentantach 0, 1 i 3.

Zadanie 2. (S2) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 1$. Czy f jest bijekcją?

Zadanie 3. (S3) Sprawdzić, że dla $0 < n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1).$$

Zadanie 4. (S4) Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$,

$$3 \mid 10^n + 4^n + 4.$$

Zadanie 5. (S5) Znajdź wzór jawny ciągu i uzasadnij jego poprawność indukcyjnie.

$$a_0 = 2, \qquad a_1 = 5, \qquad a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2.$$

Zadanie 6. (S6) Dany jest ciąg: $-5, 2, 9, 16, 23, \ldots$. Podaj wzór rekurencyjny oraz jawny tego ciągu.

Zadanie 7. (S7) Ile jest liczb naturalnych w przedziale od 1 do 1000 niepodzielnych ani przez 2, ani przez 3, ani przez 5?

Zadanie 8. (S8) Dlaczego w grupie 100 osób są zawsze przynajmniej dwie soby, które mają tylu samo znajomych. Zakładamy, że gdy osoba A zna osobę B, to również osoba B zna A.