

# Teoria krat

## LISTA 1

**Zadanie 1.** Wykaż, że jeśli  $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq x_0$ , to  $x_0 = x_1 = \dots = x_n = x_0$ .

**Zadanie 2.** Wymień wszystkie relacje częściowego porządku na zbiorze trzy i pięcioelementowym.

**Zadanie 3.** Udowodnij, że  $\langle P, \leq \rangle$ , dla  $P$  i  $\leq$  jak poniżej, jest posetem.

- (i) Niech  $P = 2^X$  dla dowolnego zbioru  $X$  i niech  $A \leq B$  oznacza, że  $A \subseteq B$  dla  $A, B \in P$ .
- (ii) Niech  $P$  będzie zbiorem wszystkich funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na zbiorze  $X$ . Dla  $f, g \in P$  piszemy  $f \leq g$ , gdy  $f(x) \leq g(x)$  dla wszystkich  $x \in X$ .
- (iii) Niech  $P$  będzie zbiorem wszystkich zbiorów otwartych pewnej topologii i niech  $\leq$  jak w (i).
- (iv) Niech  $P$  będzie zbiorem wszystkich istot ludzkich, i niech  $a \leq b$  oznacza, że  $a$  jest potomkiem  $b$ .

**Zadanie 4.** Niech  $A$  będzie zbiorem i niech  $P$  będzie zbiorem wszystkich relacji częściowego porządku na  $A$ . Dla  $\rho, \sigma \in P$ ,  $\rho \leq \sigma$  wtw., gdy  $a \rho b$  implikuje  $a \sigma b$  ( $a, b \in A$ ). Udowodnij, że  $\langle P, \leq \rangle$  jest posetem.

**Zadanie 5.** Wykaż, że jeśli dla wszystkich niepustych podzbiorów  $H$  posetu  $P$  istnieje  $\inf H$ , to istnieje również  $\sup \emptyset$  w  $P$ .

**Zadanie 6.** Przypuśćmy, że w posecie określone są  $b \vee c$ ,  $a \vee (b \vee c)$  oraz  $a \vee b$ . Wykazać, że określony jest  $(a \vee b) \vee c$  oraz, że  $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ .

**Zadanie 7.** Wykazać, że jeśli element  $a \wedge b$  jest określony w posecie, to również określony jest element  $(a \vee b) \wedge c$ .

**Zadanie 8.** Niech  $H$  i  $K$  będą podzbiarami pewnego posetu, takimi, że istnieją  $\sup H$ ,  $\sup K$  oraz  $\sup(H \cup K)$ . Wykazać, że  $(\sup H) \vee (\sup K)$  istnieje i jest równy  $\sup(H \cup K)$ .

# Teoria krat

## LISTA 2

**Zadanie 1.** Które z przykładów w zadaniu 3 z poprzedniej listy są kratami? Jak w nich można określić kres dolny i górny?

**Zadanie 2.** Wykaż, że każdy łańcuch jest kratą.

**Zadanie 3.** Niech  $P$  będzie zbiorem wszystkich podgrup grupy  $G$ . Dowieść, że  $\langle P, \subseteq \rangle$  jest kratą. Wyznaczyc  $X \wedge Y$  oraz  $X \vee Y$  dla  $X, Y \in P$ .

**Zadanie 4.** Niech  $P$  będzie zbiorem wszystkich podprzestrzeni przestrzeni wektorowej (afinicznej, rzutowej). Dowieść, że  $\langle P, \subseteq \rangle$  jest kratą. Wyznaczyc  $X \wedge Y$  oraz  $X \vee Y$  dla  $X, Y \in P$ .

**Zadanie 5.** Niech  $\langle P, \leq \rangle$  będzie posetem, w którym dla dowolnego  $H \subseteq P$  istnieje  $\inf H$ . Wykaż, że  $\langle P, \leq \rangle$  jest kratą.

**Zadanie 6.** Dowieść, że warunek pochłaniania implikuje warunek idempotencji operacji  $\wedge$  oraz  $\vee$  w kracie.

**Zadanie 7.** Opisz najbardziej ogólną kratę utworzoną przez elementy  $a, b, c$  takie, że  $b < a$  (tzn.  $b \leq a$  i  $b \neq a$ ).

**Zadanie 8.** Opisz najbardziej ogólną kratę utworzoną przez elementy  $a, b, c$  takie, że  $b < a$ ,  $a \vee c = b \vee c$  oraz  $a \wedge c = b \wedge c$ .

# Teoria krat

## LISTA 3

**Zadanie 1.** Wykazać, że  $\wedge$ -homomorfizm i  $\vee$ -homomorfizm zachowuje porządek.

**Zadanie 2.** Czy przekształcenie krat  $f$  jest izomorfizmem jeśli odwzorowanie odwrotne  $f^{-1}$  zachowuje porządek?

**Zadanie 3.** Wykaż, że krata  $L$  jest łańcuchem wtw., gdy każdy niepusty podzbiór  $L$  jest podkratą.

**Zadanie 4.** Z ilu elementów składa się podkrata generowana przez dwa różne elementy?

**Zadanie 5.** Wykazać, że odcinek kraty jest podkratą wypukłą.

**Zadanie 6.** Wykazać, że ideał kraty jest podkratą wypukłą.

**Zadanie 7.** Wykaż, że obraz i przeciwobraz ideału przy homomorfizmie krat „na” jest ideałem.

**Zadanie 8.** Czy obraz ideału pierwszego przy homomorfizmie jest ideałem pierwszym?

**Zadanie 9.** Dowieść, że każdy ideał kraty  $L$  jest pierwszy wtw., gdy  $L$  jest łańcuchem.

**Zadanie 10.** Niech  $H$  będzie takim niepustym podzbiorem kraty, że dla  $a, b \in H$  mamy  $a \vee b \in H$ . Pokaż, że

$$(H] = \bigcup \{(h) : h \in H\}.$$

# Teoria krat

## LISTA 4

**Zadanie 1.** Wykaż, że jeśli  $K$  jest podkratą kraty  $L$ , to  $K$  jest izomorficzne z pewną podkratą kraty  $I(L)$  ideałów kraty  $L$ .

**Zadanie 2.** Niech  $L$  i  $K$  będą kratami i  $\varphi: L \rightarrow K$  homomorfizmem krat (nie koniecznie „na”). Wykaż, że jeśli  $K$  jest ograniczona z dołu, to  $I = \varphi^{-1}(0)$  jest ideałem w  $L$ .

**Zadanie 3.** Dowieść następujące zdanie:  $I$  jest ideałem właściwym kraty  $L$  wtw., gdy istnieje taki  $\vee$ -homomorfizm  $\varphi$  kraty  $L$  na  $C_2$ , że  $I = \varphi^{-1}(0)$ .

**Zadanie 4.** Dowieść, że:  $I$  jest ideałem pierwszym kraty  $L$  wtw., gdy istnieje taki homomorfizm  $\varphi$  kraty  $L$  na  $C_2$ , że  $I = \varphi^{-1}(0)$ .

**Zadanie 5.** Jak można określić częściowy porządek na produkcie prostym krat?

**Zadanie 6.** Niech  $L_1, L_2, K_1, K_2$  będą takimi kratami, że  $L_1 \cong L_2$  oraz  $K_1 \cong K_2$ . Wykaż, że

$$K_1 \times L_1 \cong L_1 \times K_1 \cong L_2 \times K_2.$$

**Zadanie 7.** Wyznacz kratę kongruencji łańcucha 2 i 3 elementowego. Czy w łańcuchu każda relacja równoważności jest relacją kongruencji?

**Zadanie 8.** Niech  $L$  będzie kratą,  $\rho$  kongruencją na  $L$  i niech  $K$  będzie podkratą  $L$ . Wykaż, że jeśli dla każdego  $a \in L$  mamy dokładnie jeden  $b \in K$  taki, że  $a \equiv_{\rho} b$ , to  $L/\rho \cong K$ .

**Zadanie 9.** Niech  $L$  i  $K$  będą kratami i niech  $\varphi: L \rightarrow K$  będzie bijekcją taką, że

$$\{\varphi(a \wedge b), \varphi(a \vee b)\} = \{\varphi(a) \wedge \varphi(b), \varphi(a) \vee \varphi(b)\}$$

dla wszystkich  $a, b \in L$ . Wykaż, że jeśli  $A$  jest podkratą  $L$ , to  $\varphi(A)$  jest podkratą  $K$ .

# Teoria krat

## LISTA 5

**Zadanie 1.** Wykaż prawdziwość poniższych nierówności w dowolnej kratce:

- (i)  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$ ,
- (ii)  $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ ,
- (iii)  $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$ ,
- (iv)  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee (x \wedge z))$ .

**Zadanie 2.** Wykaż równoważność poniższych tożsamości i nierówności w dowolnej kratce:

- (i)  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$ ,
- (ii)  $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$ ,
- (iii)  $(x \vee y) \wedge z \leq x \vee (y \wedge z)$ .

**Zadanie 3.** Wykaż, że przekształcenie izotoniczne łańcucha jest jego homomorfizmem.

**Zadanie 4.** Wykaż, że jeśli każde przekształcenie izotoniczne kraty  $L$  jest homomorfizmem, to  $L$  jest łańcuchem.

**Zadanie 5.** Wykaż, że w kratce skończonej wysokości przeciwobrazem dowolnego elementu przy homomorfizmie jest odcinek.

# Teoria krat

## LISTA 6

**Zadanie 1.** Wykaż, że krata dzielników normalnych grupy jest modularna.

**Zadanie 2.** Wykaż, że krata podprzestrzeni przestrzeni wektorowej (desarguesowskiej przestrzeni rzutowej) jest modularna.

**Zadanie 3.** Wykaż, że krata podprzestrzeni przestrzeni afinicznej nie jest modularna.

**Zadanie 4.** Wykaż, że krata jest modularna wtw., gdy zachodzi nierówność

$$x \wedge (y \vee z) \leq y \vee ((x \vee y) \wedge z).$$

**Zadanie 5.** Wykaż, że krata jest modularna wtw. gdy, spełnia tożsamość

$$(x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z) = (x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge z).$$

**Zadanie 6.** Niech  $L$  będzie kratą i  $a, b \in L$ . Wówczas  $\varphi_b: x \rightarrow x \wedge b$  odwzorowuje  $[a, a \vee b]$  w  $[a \wedge b, b]$  oraz  $\psi_a: x \rightarrow x \vee a$  odwzorowuje  $[a \wedge b, b]$  w  $[a, a \vee b]$ . Pokaż, że  $\varphi_b \psi_a \varphi_b = \varphi_b$  oraz  $\psi_a \varphi_b \psi_a = \psi_a$ .

**Zadanie 7.** Wykaż, że w kratce modularnej

$$x \wedge y = [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)] \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z)].$$

**Zadanie 8.** Wykaż, że krata  $L$  jest modularna wtw., gdy dla dowolnych  $x, y, z \in L$

$$x \wedge (y \vee z) = x \wedge ((y \wedge (x \vee z)) \vee z).$$

**Zadanie 9.** Wykaż, że krata  $L$  jest modularna wtw., gdy dla dowolnych  $x, y, z \in L$

$$[(x \wedge z) \vee y] \wedge z = [(y \wedge z) \vee x] \wedge z.$$

**Zadanie 10.** Czy podkrata i homomorficzny obraz kraty modularnej jest kratą modularną? Czy produkt prosty krat modularnych jest modularny?

# Teoria krat

## LISTA 7

**Zadanie 1.** Wykaż, że w ograniczonej kracie dystrybutywnej, jeśli elementy  $a, b$  mają dopełnienia odpowiednio  $a', b'$ , to

$$(a \wedge b)' = a' \vee b', \quad (a \vee b)' = a' \wedge b'.$$

**Zadanie 2.** Wykaż, że w kracie dystrybutywnej jeśli  $a \vee b$  oraz  $a \wedge b$  mają uzupełnienia, to również  $a$  i  $b$  mają uzupełnienia.

**Zadanie 3.** Niech  $L, K$  będą kratami boolowskimi i niech  $\varphi: L \rightarrow K$  będzie homomorfizmem. Wykaż, że wówczas dla  $a \in L$  zachodzi

$$\varphi(a') = \varphi(a)'$$

**Zadanie 4.** W kracie ograniczonej wykaż, że jeśli  $x$  jest względnym uzupełnieniem  $a$  w odcinku  $[b, c]$ ,  $y$  jest względnym uzupełnieniem  $c$  w  $[x, 1]$ ,  $z$  jest względnym uzupełnieniem  $b$  w  $[0, x]$ , oraz  $t$  jest względnym uzupełnieniem  $x$  w  $[z, y]$ , to  $t$  jest uzupełnieniem  $a$ .

**Zadanie 5.** Wykaż, że każda dystrybutywna krata jest modułarna, ale nie na odwrót. Jaka jest najmniejsza krata modułarna i niedystrybutywna?

**Zadanie 6.** Wykaż, że łańcuch jest dystrybutywny.

**Zadanie 7.** Wykaż, że krata  $L$  jest dystrybutywna wtw., gdy dla dowolnych  $x, y, z \in L$

$$(x \vee y) \wedge [z \vee (x \wedge y)] = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x).$$

**Zadanie 8.** Wykaż, że krata  $L$  jest dystrybutywna wtw., gdy dla dowolnych  $x, y, z \in L$

$$(x \vee y) \wedge z \leq x \vee (y \wedge z).$$

**Zadanie 9.** Niech  $L$  będzie kratą boolowską. Wykazać, że zbiór  $L$  wraz z operacją

$$a + b := (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$$

jest grupą abelową. Ile to  $a + a$ ?

**Zadanie 10.** Niech  $L$  będzie kratą dystrybutywną i niech  $a, b, c \in L$  takie, że  $a \leq b$ . Czy to prawda, że krata  $[a, b]$  jest boolowska wtw., gdy kraty  $[a \wedge c, b \wedge c]$  oraz  $[a \vee c, b \vee c]$  są boolowskie?

**Zadanie 11.** Niech  $L$  będzie kratą modułarną i  $a, b \in L$ . Dowieść, że odcinek  $[a \wedge b, a \vee b]$  jest podkratą generowaną przez  $[a \wedge b, a] \cup [a \wedge b, b]$  wtw. gdy  $L$  jest dystrybutywna.

# Teoria krat

## LISTA 8

**Zadanie 1.** Wykaż, że krata  $L$  jest półmodularna wtw. gdy  $x \wedge y \prec x$  implikuje  $y \prec x \vee y$ .

**Zadanie 2.** Niech  $L$  będzie kratą półmodularną. Wykaż, że jeśli  $p, q$  są atomami w  $L$ ,  $a \in L$  oraz  $a < a \vee q \leq a \vee p$ , to  $a \vee p = a \vee q$  (aksjomat wymiany Steinitz'a-MacLane'a).

**Zadanie 3.** Niech  $L$  będzie kratą. Wykaż, że wszystkie podkraty  $L$  są półmodularne wtw. gdy  $L$  jest modularna.

**Zadanie 4.** Wykaż, że produkt prosty krat półmodularnych jest półmodularny.

**Zadanie 5.** Wykaż, że wypukła podkrata kraty półmodularnej jest półmodularna.

**Zadanie 6.** Wykaż, że obraz kraty półmodularnej skończonej długości przy homomorfizmie jest kratą półmodularną.

**Zadanie 7.** Mówimy, że krata  $L$  spełnia warunek MacLane'a wtw. gdy, dla  $a, b, c \in L$  takich, że  $a \parallel b$  i  $a \wedge b < c \leq a$  istnieje  $d \in L$  takie, że  $a \wedge (b \vee d) = c$ . Wykaż, że warunek MacLane'a implikuje UCC.

**Zadanie 8.** Wykaż, że krata  $L$  skończonej długości jest półmodularna wtw. gdy  $L$  spełnia warunek MacLane'a.