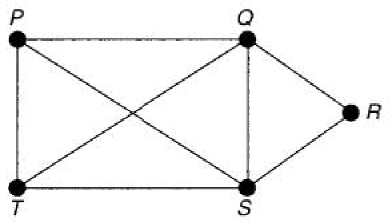
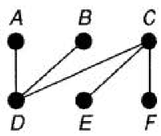
Wprowadzenie do teorii grafów

Lista 1

Zadanie 1. Podaj liczbę wierzchołków i krawędzi oraz stopnie poszczególnych wierzchołków w grafie na rysunkach 1 i 2.

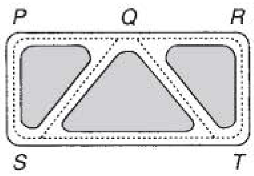


Rysunek 1



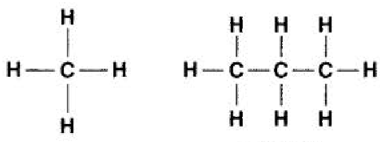
Rysunek 2

Zadanie 2. Narysuj graf odpowiadający sieci dróg pokazanej na rysunku 3 i podaj liczbę wierzchołków i krawędzi oraz stopnie poszczególnych wierzchołków.



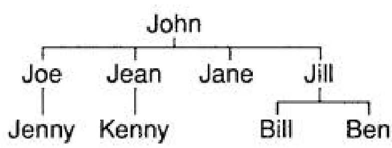
Rysunek 3

Zadanie 3. Na rysunku 4 znajdują się wzory cząsteczek metanu CH_4 i propanu C_2H_8. Jeśli potraktujemy te wzory jako grafy, to co można powiedzieć o ich wierzchołkach odpowiadających atomom węgla C i wodoru H? Istnieją dwie różne cząsteczki o wzorze C_4H_{10}. Narysuj grafy odpowiadające tym cząsteczkom.



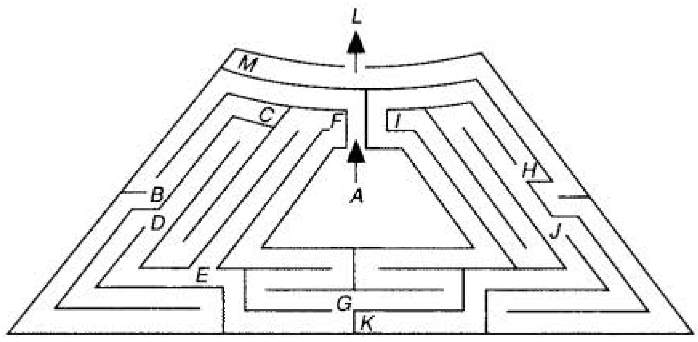
Rysunek 4

Zadanie 4. Narysuj graf reprezentujący drzewo genealogiczne z rysunku 5.



Rysunek 5

Zadanie 5. Narysuj graf, którego wierzchołki są oznaczone od A do M i który pokazuje różne drogi poruszania się po labiryncie z rysunku 6.

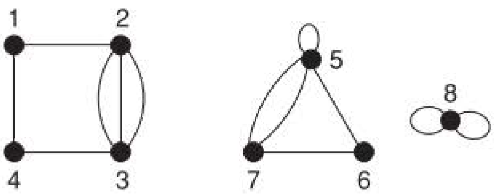


Rysunek 6

Zadanie 6. Węże zjadają żaby, a ptaki zjadają pająki. Ptaki i pająki zjadają owady. Żaby jedzą ślimaki, pająki i owady. Narysuj graf reprezentujący te zależności.

Zadanie 7. Maciek lubi Marię, Martę i Magdę. Marek lubi Marię i Magdę. Maria i Marta lubią się nawzajem. Narysuj graf ukazujący te relacje.

Zadanie 8. Podaj zbiór wierzchołków oraz krawędzi grafów z rysunku 7.



Rysunek 7

Zadanie 9. Narysuj graf o 5 wierzchołkach i 8 krawędziach, który:

(i) jest prosty,

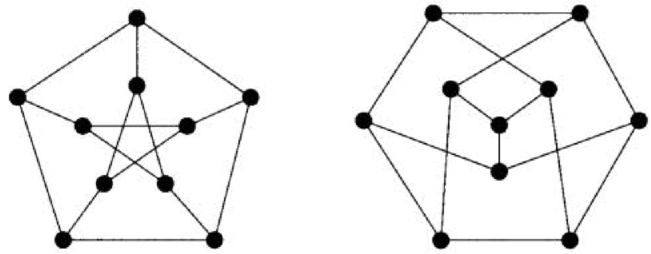
(ii) nie jest prosty, ale nie ma pętli,

(iii) nie jest prosty, ale nie ma krawędzi wielokrotnych.

Wprowadzenie do teorii grafów

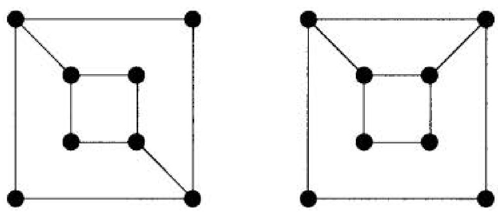
Lista 2

Zadanie 1. Wykaż, że grafy z rysunku 8 są izomorficzne.



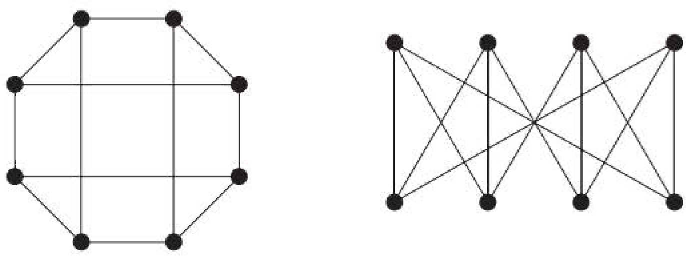
Rysunek 8

Zadanie 2. Czy grafy z rysunku 9 są izomorficzne?



Rysunek 9

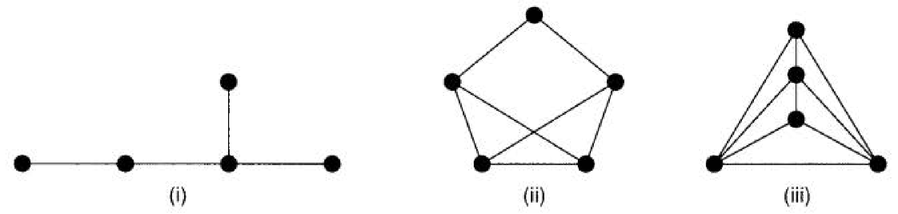
Zadanie 3. Czy grafy z rysunku 10 są izomorficzne?



Rysunek 10

Zadanie 4. Wykaż, że istnieje dokładnie $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ poetykietowanych grafów prostych o n wierzchołkach.

Zadanie 5. Wyznacz ciąg stopni grafów z rysunku 11.

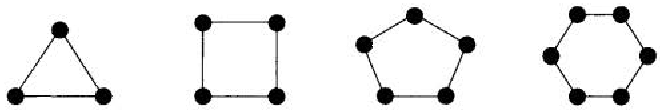


Rysunek 11

Zadanie 6. Narysuj graf mający 6 wierzchołków i ciąg stopni $(3, 3, 5, 5, 5, 5)$. Czy istnieje graf prosty o takich parametrach? A gdyby ciąg stopni był następujący $(2, 3, 3, 4, 5, 5)$?

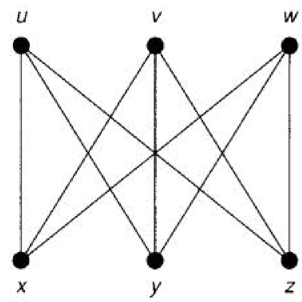
Zadanie 7. Udowodnij, że graf prosty o co najmniej 2 wierzchołkach musi zawierać 2 lub więcej wierzchołków tego samego stopnia.

Zadanie 8. Które grafy z rysunku 12 są podgrafami grafów z rysunku 8?



Rysunek 12

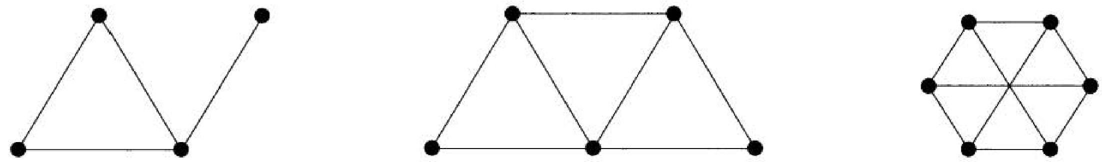
Zadanie 9. Niech G to graf z rysunku 13. Krawędź ux oznaczmy przez e. Narysuj grafy $G - e$ oraz $G \setminus e$.



Rysunek 13

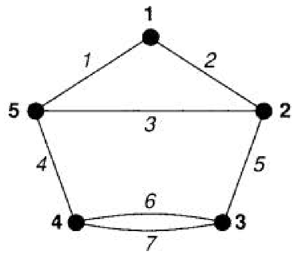
Zadanie 10. Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i m krawędziach. Niech v będzie wierzchołkiem stopnia k grafu G i niech e będzie krawędzią G. Ile jest wierzchołków i krawędzi w $G - e$, $G - v$ i $G \setminus e$?

Zadanie 11. Narysuj dopełnienia grafów z rysunku 14.



Rysunek 14

Zadanie 12. Podaj macierze sąsiedztwa oraz incydencji grafu z rysunku 15.



Rysunek 15

Zadanie 13. Narysuj graf o poniższej macierzy sąsiedztwa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zadanie 14. Narysuj graf o poniższej macierzy incydencji.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zadanie 15. Narysuj i przedstaw za pomocą macierzy incydencji graf $G = \langle V, E\rangle$, w którym

$$V = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}.$$

Zadanie 16. Czy graf o 7 wierzchołkach, w którym suma stopni wierzchołków wynosi 30 może być niespójny?

Zadanie 17. Czy graf $G = \langle V, E\rangle$ jest planarny, gdy

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \qquad E = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}?$$

Zadanie 18. Jeśli G jest grafem prostym, to przestrzenią wektorową grafu G jest przestrzeń liniowa nad $\mathbb{Z}_2$, której elementami są podzbiory rodziny $E(G)$. Sumą $E + F$ dwóch podzbiorów E i F jest zbiór krawędzi należących do E lub do F, ale nie do obu tych zbiorów jednocześnie, a mnożenie przez skalar jest zdefiniowane wzorami $1 \cdot E = E$ oraz $0 \cdot E = \emptyset$. Udowodnij, że jest to przestrzeń liniowa nad $\mathbb{Z}_2$ i znajdź jej bazę.

Wprowadzenie do teorii grafów

Lista 3

Zadanie 1. Narysuj następujące grafy:

(i) graf pusty N_5,

(ii) graf pełny K_6,

(iii) graf pełny dwudzielny $K_{2,4}$,

(iv) sumę grafów $K_{1,3}$ i W_4,

(v) dopełnienie cyklu C_4.

Zadanie 2. Ile krawędzi mają następujące grafy:

(i) K_{10},

(ii) $K_{5,7}$,

(iii) Q_4,

(iv) W_8,

(v) graf Petersena,

(vi) dopełnienie C_8?

Zadanie 3. Ile krawędzi ma graf regularny stopnia r o n wierzchołkach? Ile krawędzi ma graf Petersena oraz k-kostka Q_k?

Zadanie 4. Ile wierzchołków i krawędzi ma każdy z grafów platońskich?

Zadanie 5. Podaj przykład następującego grafu, o ile taki istnieje:

(i) graf dwudzielny regularny stopnia 5,

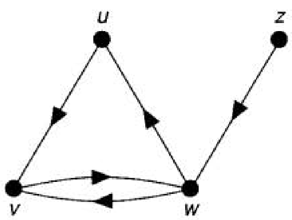
(ii) graf pełny który jest kołem,

(iii) graf kubiczny o 11 wierzchołkach,

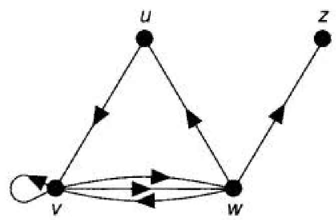
(iv) graf regularny stopnia 4 różny od K_5, $K_{4,4}$, Q_4.

Zadanie 6. Czy dopełnienie grafu pełnego i grafu pełnego dwudzielnego da się łatwo sklasyfikować?

Zadanie 7. Wypisz zbiór wierzchołków i łuków grafu z rysunku 16 i 17.

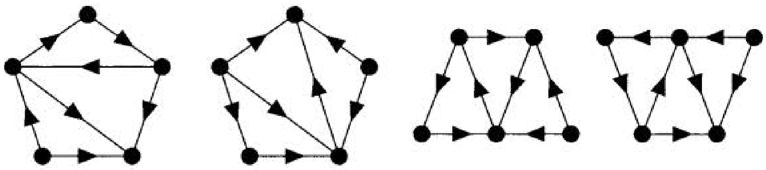


Rysunek 16



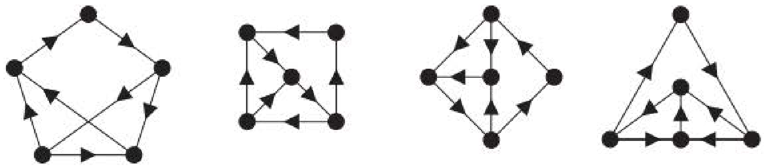
Rysunek 17

Zadanie 8. Które z grafów na rysunku 18 są izomorficzne?



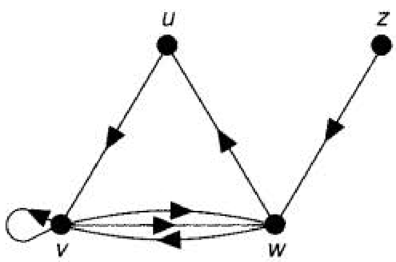
Rysunek 18

Zadanie 9. Które z grafów na rysunku 19 są izomorficzne?

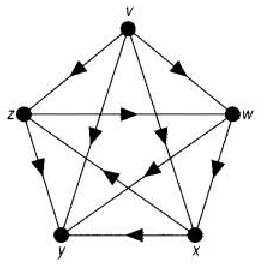


Rysunek 19

Zadanie 10. Zapisz macierz sąsiedztwa grafu z rysunku 20 i 21.



Rysunek 20



Rysunek 21

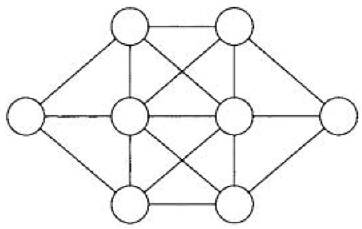
Zadanie 11. Podaj przykład:

(i) nieskończonego grafu dwudzielnego,
(ii) nieskończonego, spójnego grafu kubicznego,
(iii) nieskończonego grafu z nieskończoną ilością liści,
(iv) nieskończonego grafu z nieprzeliczalną ilością wierzchołków i krawędzi.

Wprowadzenie do teorii grafów

Lista 4

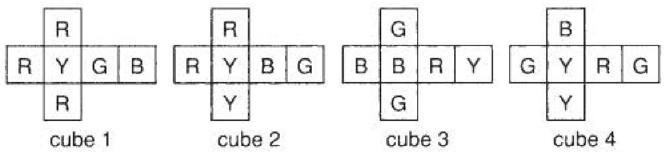
Zadanie 1. Umieść litery A, B, C, D, E, F, G, H w ośmiuk ółkach na rysunku 22 w taki sposób, by żadna litera nie sąsiadowała z literą występującą bezpośrednio po niej w alfabecie.



Rysunek 22

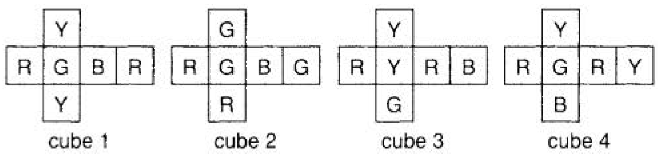
Zadanie 2. Udowodnij, że w dowolnej grupie 6 osób zawsze istnieją albo trzy osoby znające się nawzajem, albo trzy, z których żadna nie zna pozostałych dwóch.

Zadanie 3. Dane są 4 kostki, którch ścianki są pomalowane na czerwono, niebiesko, zielono i żółto, tak jak na rysunku 23. Czy można ustawić je jedna na drugiej w taki sposób, by na każdej ścianie bocznej otrzymanego prostopadłościanu o wymiarach $4 \times 1 \times 1$ wystąpiły wszystkie 4 kolory?



Rysunek 23

Zadanie 4. Znajdź rozwiązanie zadania 3 dla zestawu kostek z rysunku 24.



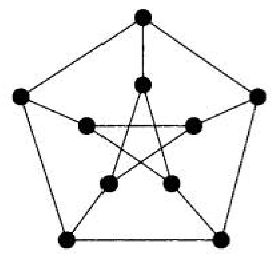
Rysunek 24

Wprowadzenie do teorii grafów

Lista 5

Zadanie 1. W grafie Petersena (rysunek 25) znaleźć

(i) ścieżkę długości 5,
(ii) drogę długości 9,
(iii) cykle długości 5, 6, 8 i 9,
(iv) rozcięcia o 3, 4 oraz 5 krawędziach.



Rysunek 25

Zadanie 2. *Obwodem* grafu nazywamy długość najkrótszego cyklu w tym grafie. Wyznacz obwód grafu

(i) K_9, (ii) $K_{5,7}$, (iii) C_8, (iv) W_8, (v) Q_5.

Zadanie 3. Udowodnij, że graf prosty i jego dopełnienie nie mogą jedocześnie być niespójne.

Zadanie 4. Wyznacz liczby $\kappa(G)$ oraz $\lambda(G)$ dla następujących grafów G:

(i) C_6, (ii) $K_{4,7}$, (iii) W_6, (iv) Q_4.

Zadanie 5. Wykaż, że jeśli graf G jest spójny i minimalny stopień wierzchołka w G wynosi k, to $\lambda(G) < k$.

Zadanie 6. Udowodnij, że graf jest 2-spójny krawędziowo wtedy i tylko wtedy, gdy każda para różnych wierzchołków może być połączona przynajmniej dwoma drogami bez wspólnych krawędzi.

Zadanie 7. Udowodnij, że graf o przynajmniej 3 wierzchołkach jest 2-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każda para różnych wierzchołków może być połączona przynajmniej dwoma drogami bez wspólnych wierzchołków.

Wprowadzenie do teorii grafów

Lista 6

Zadanie 1. W grafie spójnym G, dla wierzchołków a, b, określamy funkcję $d(a, b)$ jako długość najkrótszej drogi z a do b. Jest to *odległość* wierzchołka a od b.

(i) Wykaż, że $\langle V(G), d\rangle$ jest przestrzenią metryczną.

(ii) Wykaż, że jeśli $2 \leqslant d(a, b)$, to istnieje taki wierzhołek c, że

$$d(a, c) + d(c, b) = d(a, b).$$

(iii) Wykaż, że w grafie Petersena dla dowolnych wierzchołków a, b albo $d(a, b) = 1$, albo $d(a, b) = 2$.

Zadanie 2. *Średnicą* grafu nazywamy największą odległość pomiędzy dwoma dowolnymi jego wierzchołkami. Wyznacz średnicę grafu

(i) K_9, (ii) $K_{5,7}$, (iii) C_8, (iv) W_8, (v) Q_5.

Zadanie 3. Wykaż, że grafy K_n dla $3 \leqslant n$ oraz $K_{r,s}$ dla $2 \leqslant r, s$ są orientowalne.

Zadanie 4. Znajdź orientację w grafie Petersena.

Wprowadzenie do teorii grafów

Lista 7

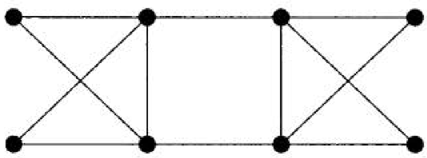
Zadanie 1. Które z grafów są eulerowskie lub półeulerowskie?

(i) K_5,
(ii) $K_{2,3}$,
(iii) graf sześcianu,
(iv) graf ośmiościanu,
(v) graf Petersena.

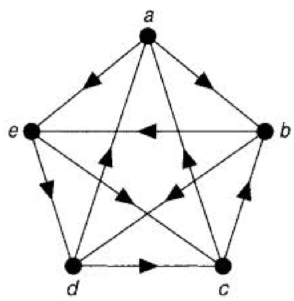
Zadanie 2.

(i) Dla jakich wartości n graf K_n jest eulerowski?
(ii) Dla jakich wartości r, s graf $K_{r,s}$ jest eulerowski?

Zadanie 3. Znajdź ścieżkę Eulera w grafie na rysunku 26 i 30.



Rysunek 26



Rysunek 27

Zadanie 4. Niech D będzie digrafem, którego wierzchołki są parami liczb naturalnych: $11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33$ i którego łuki łączą wierzchołek ij z kl tylko wtedy, gdy $j = k$. Znajdź ścieżkę Eulera w grafie D.

Zadanie 5. Sprawdź bez rysowania grafu, czy w grafie o macierzy sąsiedztwa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

istnieje ścieżka Eulera?

Wprowadzenie do teorii grafów

Lista 8

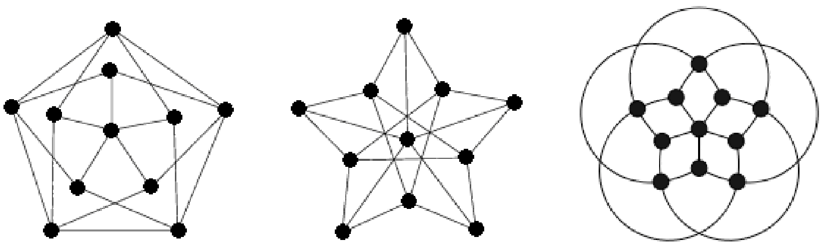
Zadanie 1. Które z grafów są hamiltonowskie lub półhamiltonowskie?

(i) K_5, (ii) $K_{2,3}$, (iii) ośmiościan, (iv) W_6, (v) Q_4.

Zadanie 2.

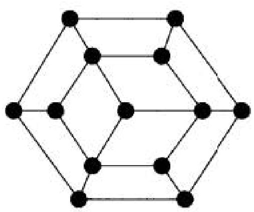
(i) Dla jakich wartości n graf K_n jest hamiltonowski?
(ii) Dla jakich wartości r, s graf $K_{r,s}$ jest hamiltonowski?
(iii) Dla jakich wartości n graf W_n jest hamiltonowski?
(iv) Dla jakich wartości k graf Q_k jest hamiltonowski?

Zadanie 3. Czy graf Grötzscha na rysunku 28 jest hamiltonowski?

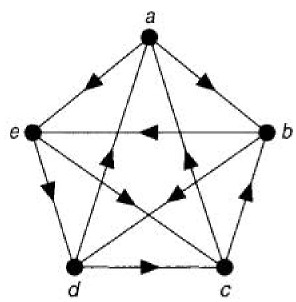


Rysunek 28

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli graf dwudzielny ma nieprzystą ilość wierzchołków, to nie jest hamiltonowski. Jaki związek ma ten fakt z grafem na rysunku 29?



Rysunek 29



Rysunek 30

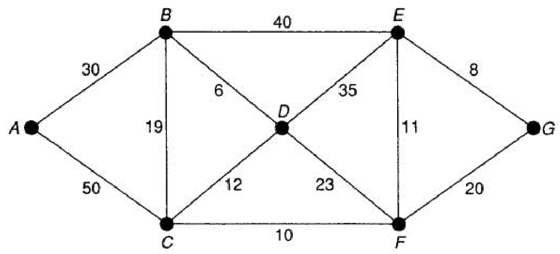
Zadanie 5. Czy graf o n wierzchołkach i $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$ krawędziach jest hamiltonowski? Znajdź graf niehamiltonowski o n wierzchołkach i $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ krawędziach.

Zadanie 6. Znajdź cykl Hamiltona w turnieju na rysunku 30.

Wprowadzenie do teorii grafów

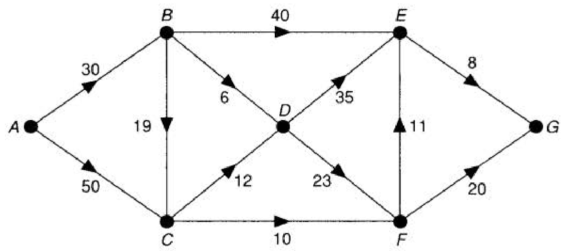
Lista 9

Zadanie 1. W grafie ważonym na rysunku 31 znajdź najkrótszą drogę z wierzchołka A do G.



Rysunek 31

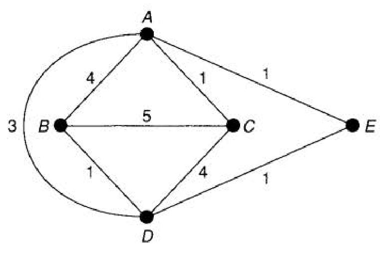
Zadanie 2. W sieci na rysunku 32 znajdź najdłuższą drogę z wierzchołka A do G.



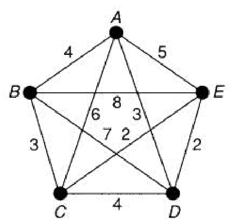
Rysunek 32

Zadanie 3. Znajdź rozwiązanie problemu chińskiego listonosza w grafie ważonym na rysunku 33.

Zadanie 4. Znajdź rozwiązanie problemu komiwojażera w grafie ważonym na rysunku 34.



Rysunek 33



Rysunek 34

Wprowadzenie do teorii grafów

Lista 10

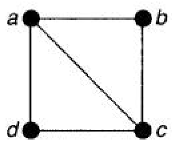
Zadanie 1. Narysuj wszystkie drzewa o sześciu wierzchołkach.

Zadanie 2. Narysuj wszystkie drzewa o siedmiu wierzchołkach.

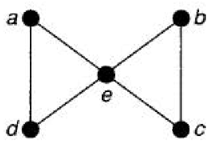
Zadanie 3. Udowodnij, że drzewo jest grafem dwudzielnym.

Zadanie 4. Jakie drzewa są pełnymi garfami dwudzielnymi?

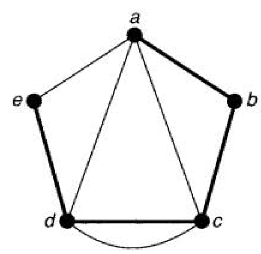
Zadanie 5. Znajdź wszystkie drzewa rozpinające w grafach na rysunkach 35 i 36.



Rysunek 35



Rysunek 36



Rysunek 37

Zadanie 6. Znajdź fundamentalny zbiór cykli oraz rozcięć w grafie na rysunku 37, związany z zaznaczonym drzewem.

Zadanie 7. Wyznacz rząd cykliczności oraz rząd rozcięcia grafów:

(i) K_5, (ii) $K_{3,3}$, (iii) W_5, (iv) N_5, (v) Petersena.

Zadanie 8. Co można opowiedzieć o krawędzi grafu, która jest w każdym drzewie rozpinającym, albo takiej, która nie jest w żadnym z drzew rozpinających tego grafu.

Zadanie 9. W grafie spójnym *centrum* grafu to wierzchołek v o tej własności, że maksymalna odległość od v do pozostałych wierzchołków jest możliwie najmniejsza. Uzasadnij, że każde drzewo ma jedno centrum albo dwa sąsiednie centra. Podaj przykłady drzew o siedmiu wierzchołkach z centrum obu typów.

Zadanie 10. Niech T_1, T_2 będą drzewami rozpinającymi grafu spójnego G.

(i) Pokaż, że dla każdej krawędzi $e \in E(T_1)$ istnieje taka krawędź $f \in E(T_2)$, że graf $(T_1 - \{e\}) \cup \{f\}$ jest również drzewem rozpinającym G.

(ii) Wykaż, że można przetransformować T_1 na T_2 wymieniając po jednej krawędzi tak, aby na każdym etapie otrzymać drzewo rozpinające.

Wprowadzenie do teorii grafów

Lista 11

Zadanie 1. Ile jest poetykietowanych drzew o 5 wierzchołkach? Jak to uzasadnić nie powołując się na twierdzenie Cayleya?

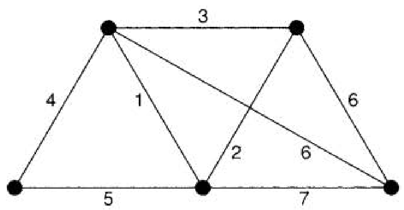
Zadanie 2. Narysuj wszystkie grafy odpowiadające cząsteczkom C_5H_{12} i C_6H_{14}.

Zadanie 3. Wykaż, że dla każdego n graf odpowiadający cząsteczce alkoholu $C_nH_{2n+1}OH$ jest drzewem. Narysuj graf odpowiadający cząsteczce C_2H_5OH.

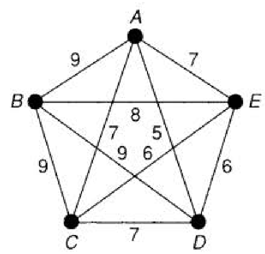
Zadanie 4. Ile jest drzew o n wierzchołkach, w których dany wierzchołek jest liściem?

Zadanie 5. Ile jest drzew rozpinających dla grafu $K_{2,s}$?

Zadanie 6. Znajdź drzewo rozpinające o minimalnej wadze w grafie na rysunku 38 oraz 39.



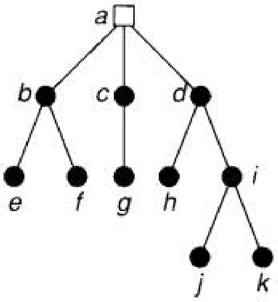
Rysunek 38



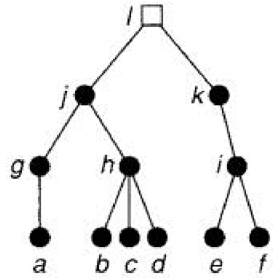
Rysunek 39

Zadanie 7. Znajdź drzewo rozpinające o maksymalnej wadze w grafie na rysunku 38 oraz 39.

Zadanie 8. Wykonaj przeszukiwanie wszerz i wgłąb w drzewach 40 oraz 41.

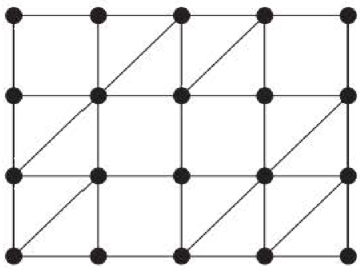


Rysunek 40

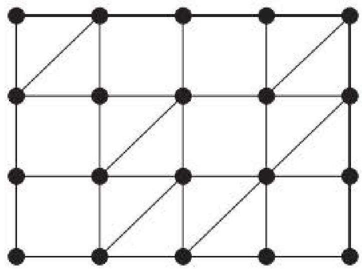


Rysunek 41

Zadanie 9. Czy wzmocniony szkielet na rysunku 42 oraz 43 jest sztywny? Czy takie wzmocnienie jest minimalne?

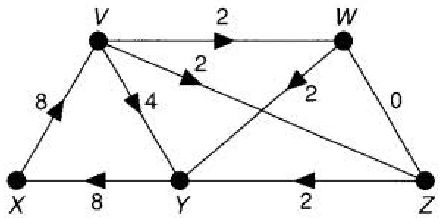


Rysunek 42



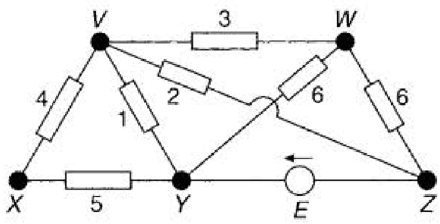
Rysunek 43

Zadanie 10. Sprawdź napięcia na rysunku 44 stosując prawo Kirchoffa do fundamentalnych cykli związanych z drzewem rozpinającym o krawędziach VX, VW, WZ, YZ.



Rysunek 44

Zadanie 11. Napisz równania Kirchoffa dla sieci z rysunku 45, gdzie podane wartości to oporność. Wykorzystaj drzewo rozpinające o krawędziach VW, WZ, XV, WZ.



Rysunek 45

Zadanie 12. Niech $\tau(G)$ oznacza ilość lasów rozpinających grafu G. Uzasadnij, że $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \setminus e)$ dla dowolnej krawędzi e w G.