Teoria krat

Mariusz Żynel

9 września 2009

Spis treści

1 Zbiory częściowo uporządkowane

Niech P będzie niepustym zbiorem i niech $\leqslant \subseteq P \times P$ bedzię relacją binarną na zbiorze P. Rozważmy następujące własności relacji $\leqslant$. Niech $a, b, c \in P$, wówczas

1. $a \leqslant a$ — zwrotność,

2. jeśli $a \leqslant b$ i $b \leqslant a$, to $a = b$ — antysymetria,

3. jeśli $a \leqslant b$ i $b \leqslant c$, to $a \leqslant c$ — przechodniość,

4. $a \leqslant b$ lub $b \leqslant a$ — liniowość.

Zbiór P wraz z relacją $\leqslant$, czyli struktura $\langle P, \leqslant \rangle$, w której relacja $\leqslant$ jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia nazywa się *zbiorem częściowo uporządkowanycm* (ang. *partialy ordered set* lub krótko *poset*). Sama relacja $\leqslant$ jest wówczas nazywana relacją *częściowego porządku*. Poset $\langle P, \leqslant \rangle$, w którym relacja częściowego porządku jest dodatkowo liniowa nazywamy *łańcuchem*. W literaturze można również spotkać określenie *zbiór uporządkowany* lub *liniowo uporządkowany*. Relacja $\leqslant$ spełniająca ostatni warunek nazywana jest *porządkującą* lub *liniowo porządkującą*. Jeśli nie będzie prowadzić to do wieloznaczności zbiór P będziemy utożsamiać ze strukturą $\langle P, \leqslant \rangle$ traktując $\leqslant$ jako domyślny częściowy porządek.

W celu uproszczenia notacji dla $a, b \in P$ piszemy $a < b$, gdy $a \leqslant b$ i $a \neq b$.

Przykład 1.1. Przykładami posetów są:

- zbiór liczb rzeczywistych z relacją nie większości $\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle$,
- zbiór liczb naturalnych z relacją podzielności $\langle \mathbb{N}, | \rangle$,
- rodzina podzbiorów niepustego zbioru X z relacją zawierania $\langle 2^X, \subseteq \rangle$.

Mówimy, że elementy $a, b \in P$ są *nieporównywalne* i piszemy $a \parallel b$, gdy $a \nleqslant b$ oraz $b \nleqslant a$. Poset $\langle P, \leqslant \rangle$, w którym dla każdych dwóch elementów $a, b \in P$ zachodzi $a \parallel b$ nazywamy *antyłańcuchem*.

Niech $A \subseteq P$ taki, że $A \neq \emptyset$. W naturalny sposób można określić częściowy porządek $\leqslant_A$ na A w następujący sposób:

$$a \leqslant_A b \quad \text{wtw., gdy} \quad a \leqslant b, \quad \text{dla} \quad a, b \in A. \tag{1}$$

Para $\langle A, \leqslant_A \rangle$ nazywana jest *podposetem* posetu $\langle P, \leqslant \rangle$. Struktura $\langle A, \leqslant_A \rangle$ jako taka jest posetem.

Podzbiór $C \subseteq P$ nazywamy *łańcuchem*, gdy jako podposet jest łańcuchem, czyli gdy $\langle C, \leqslant_C \rangle$ jest łańcuchem. Liczbę

$$l(C) = |C| - 1 \tag{2}$$

nazywamy *długością* łańcucha C w posecie P. Mówimy, że poset P ma długość n, gdzie $n \in \mathbb{N}$, gdy w P istnieje łańcuch długości n i nie istnieje łańcuch dłuższy. Poset P ma szerokość n, gdy istnieje w nim antyłańcuch o n elementach i nie istnieje antyłańcuch o większej liczbie elementów.

1.1 Elementy minimalne, maksymalne, najmniejsze i największe

Niech $H \subseteq P$. Element $a \in H$ nazywamy elementem *minimalnym* w H, gdy dla dowolnego $h \in H$ jeśli $h \leqslant a$, to $a = h$. Analogicznie, element $a \in H$ nazywamy elementem *maksymalnym* w H, gdy dla dowolnego $h \in H$ z założenia, że $a \leqslant h$ wynika $a = h$.

Element $a \in H$ jest *najmniejszy* w H, gdy $a \leqslant h$ dla wszystkich $h \in H$. Element $a \in H$ jest *największy* w H, gdy $h \leqslant a$ dla wszystkich $h \in H$.

Zauważmy, że element najmniejszy jest minimalny oraz element największy jest maksymalny, ale nie na odwrót.

Przykład 1.2. Rozważmy poset $\langle \mathbb{N}, | \rangle$. W zbiorze $H = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ liczby pierwsze będą minimalne i nie istnieje tam element najmniejszy.

1.2 Ograniczenia i kresy

Niech $H \subseteq P$ i $a \in P$. Element a jest *ograniczeniem górnym* zbioru H wtw., gdy $h \leqslant a$ dla wszystkich $h \in H$. Górne ograniczenie a jest *kresem górnym* zbioru H wtw., gdy a jest najmniejszym spośród wszystkich ograniczeń górnych zbioru H.

Element a jest *ograniczeniem dolnym* zbioru H wtw. , gdy $a \leqslant h$ dla wszystkich $h \in H$. Dolne ograniczenie a jest *kresem dolnym* zbioru H wtw., gdy a jest największym wśród wszystkich ograniczeń dolnych zbioru H.

Stwierdzenie 1.3. *Kres górny i dolny wyznaczone są jednoznacznie*

Dowód. Załóżmy, że a_1 i a_2 są kresami górnymi zbioru H w pewnym posecie P. Z definicji $a_1 \leqslant a_2$ bo a_2 jest ograniczeniem górnym zbioru H. Podobnie $a_2 \leqslant a_1$, więc ostatecznie $a_1 = a_2$. Dowód dla kresu dolnego przebiega analogicznie. □

Możemy zatem dla oznaczenia kresu górnego zbioru H pisać $\sup H$ lub $\bigvee H$ jeśli taki kres itnieje. Kres dolny zbioru H zapisujemy jako $\inf H$ lub $\bigwedge H$.

Załóżmy, że kres $\sup \emptyset$ istnieje w posecie P i niech $a = \sup \emptyset$. Dla dowolnego $b \in P$ i dowolnego $h \in \emptyset$ mamy $h \leqslant b$ (bo takie h nie istnieje), a więc wszystkie $b \in P$ są ograniczeniami górnymi zbioru $\emptyset$. Zatem $a \leqslant b$ dla wszystkich $b \in P$. Stąd a jest najmniejszym elementem P wtw., gdy kres $\sup \emptyset$ istnieje. Podobnie, $\inf \emptyset$ jest największym elementem w P wtw., gdy kres $\inf \emptyset$ istnieje.

Najmniejszy element posetu nazywamy *zerem* i oznaczamy jako $\mathbf{0}$, największy element posetu nazywamy *jedynką* i oznaczamy przez $\mathbf{1}$.

1.3 Reguła dualności dla posetów

Pojęcia kresu górnego i dolnego, elementu najmniejszego i największego są do siebie „podobne”. Można temu wyrażeniu nadać jednak bardzo konkretne, formalne znaczenie.

Niech $\langle P, \leqslant \rangle$ będzie posetem. Określamy nową relację $\geqslant \subseteq P \times P$ w następujący sposób:

$$a \geqslant b \quad \text{wtw., gdy} \quad b \leqslant a.$$

Łatwo sprawdzić, że relacja $\geqslant$ jest częściowym porządkiem na P. Zatem $\langle P, \geqslant \rangle$ jest również posetem. Nazywamy go *posetem dualnym* do $\langle P, \leqslant \rangle$.

Teraz, jeśli Φ jest zdaniem o posetach i jeśli w Φ zastąpimy wszystkie wystąpienia relacji $\leqslant$ na relację $\geqslant$ dostaniemy zdanie dualne do Φ.

TWIERDZENIE 1.4 (Reguła dualności dla posetów)**.** *Jeśli Φ jest zdaniem prawdziwym we wszystkich posetach, to zdanie dualne do Φ jest również prawdziwe we wszystkich posetach.*

PRZYKŁAD 1.5. Weźmy zdanie: „Jeśli $\sup H$ istnieje, to jest wyznaczony jednoznacznie". Zdaniem dualnym do niego będzie: „Jeśli $\inf H$ istnieje to jest wyznaczony jednoznacznie".

2 Kraty

Poset $\langle L, \leqslant \rangle$ nazywamy *kratą* jeśli dla dowolnych $a, b \in L$ istnieją kresy $\sup\{a, b\}$ oraz $\inf\{a, b\}$. Definicję tę możemy sformułować nieco inaczej.

STWIERDZENIE 2.1. *Poset $\langle L, \leqslant \rangle$ jest kratą wtw., gdy dla dowolnego, niepustego, skończonego podzbioru $H \subseteq L$ istnieją kresy $\sup H$ oraz $\inf H$.*

DOWÓD. $\Rightarrow$: (Szkic dowodu.) Wykazać dla $H = \{a, b, c\}$, a następnie dowieść krok indukcyjny stosując analogiczne rozumowanie dla n-elementowego zbioru H.

$\Leftarrow$: Oczywiste. □

Algebrę $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ nazywamy kratą wtw., gdy L jest niepustym zbiorem, $\wedge$ i $\vee$ są binarnymi operacjami na L, tzn. $\wedge : L \times L \longrightarrow L$ i $\vee : L \times L \longrightarrow L$, oraz obie operacje $\wedge$ i $\vee$ są idempotentne, przemienne, łączne i spełniają reguły pochłaniania w następującym sensie:

1. $a \wedge a = a, \quad a \vee a = a$ — idempotencja,
2. $a \wedge b = b \wedge a, \quad a \vee b = b \vee a$ — przemienność,
3. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ — łączność,
4. $a \wedge (a \vee b) = a, \quad a \vee (a \wedge b) = a$ — pochłanianie (absorpcja).

dla wszyskich $a, b, c \in L$.

Zauważmy, że idempotencja wynika z pochłaniania, mianowicie z drugiej części pochłaniania mamy $a \vee (a \wedge b) = a$ dla dowolnych $a, b \in L$. Podstawiając do warunku na idempotentność $\wedge$ mamy

$$a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge b)) = a$$

z pierwszej części pochłaniania. Analogicznie postępujemy w przypadku idempotencji dla $\vee$.

TWIERDZENIE 2.2.

(i) *Niech poset $\mathfrak{L} = \langle L, \leqslant \rangle$ będzie kratą i niech $a \wedge b := \inf\{a, b\}$ oraz $a \vee b := \sup\{a, b\}$ dla $a, b \in L$. Wówczas algebra $\mathfrak{L}^a = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ jest kratą.*

(ii) *Niech algebra* $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ *będzie kratą. Stosujemy umowę, że* $a \leqslant b$ *wtw., gdy* $a \wedge b = a$ *dla* $a, b \in L$*. Wówczas* $\mathfrak{L}^p = \langle L, \leqslant \rangle$ *jest posetem i* $\mathfrak{L}^p$ *jako poset jest kratą.*

(iii) *Niech poset* $\mathfrak{L} = \langle L, \leqslant \rangle$ *będzie kratą. Wtedy* $(\mathfrak{L}^a)^p = \mathfrak{L}$.

(iv) *Niech algebra* $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ *będzie kratą. Wtedy* $(\mathfrak{L}^p)^a = \mathfrak{L}$.

Powyższe twierdzenie jest bardzo ważne dla teorii krat. Pozwala ono utożsamiać koncepcję kraty jako posetu i algebry. Od tej pory w kracie zdefiniowanej jako poset możemy używać operacji $\wedge$ i $\vee$ ze wszystkimi ich algebraicznymi własnościam i na odwrót, w kracie jako algebrze możemy używać częściowego porządku. Twierdzenie to dostarcza również explicite wzajemną charakteryzację operacji kresów dolnego i górnego oraz częściowego porządku.

Od tej pory mówiąc *krata* będziemy mieli na myśli jednocześnie poset i algebrę.

2.1 Reguła dualności dla krat

Dla krat jako posetów możemy stosować wcześniej poznaną regułę dualności. Dla krat jako algebr reguła dualności przybiera nieco inną postaś.

Niech Φ będzie zdaniem o kratach wyrażonym w terminach $\wedge$ i $\vee$. Zdanie dualne do Φ otrzymujemy wymieniając $\wedge$ z $\vee$.

Twierdzenie 2.3 (Reguła dualności dla krat)**.** *Jeśli* Φ *jest zdaniem prawdziwym we wszystkich kratach, to zdanie dualne do* Φ *jest również prawdziwe we wszystkich kratach.*

2.2 Kraty zupełne

Lemat 2.4. *Niech* P *będzie posetem. Jeśli dla dowolnego podzbioru* $H \subseteq P$ *istnieje kres dolny* $\bigwedge H$*, to dla dowolnego podzbioru* $H \subseteq P$ *istnieje również kres górny* $\bigvee H$.

Dowód. Niech $H \subseteq P$ i niech K będzie zbiorem wszystkich ograniczeń górnych zbioru H, tzn. $K = \{x \in P \colon h \leqslant x \text{ dla wszystkich } h \in H\}$. Z założenia $a := \bigwedge K$ jest elementem posetu P.

Weźmy teraz dowolny element $h \in H$. Mamy $h \leqslant x$ dla wszystkich $x \in K$. Czyli h jest ograniczeniem dolnym K. Zatem $h \leqslant a$ bo a jest największym ograniczeniem dolnym K. Pokazaliśmy, że $h \leqslant a$ dla wszystkich $h \in H$, a więc $a \in K$.

Teraz rozważmy dowolny $x \in K$. Z określenia kresu dolnego mamy $a \leqslant x$, a więc a jest najmniejszym elementem K. Tak więc a jest najmniejszym ograniczeniem górnym H, czyli $a = \bigvee H$. □

Z powyższego lematu możemy wyciągnąć dwa szybkie wnioski. Po pierwsze, na mocy reguły dualności dla posetów z istnienia dowolnych kresów górnych w posecie istnieją dowolne kresy dolne. Po drugie poset, w którym istnieją dowolne kresy dolne lub górne jest kratą.

Definicja 2.5. Krata L, w której dla dowolnego podzbioru $H \subseteq L$ istnieje $\bigwedge H$ oraz $\bigvee H$ nazywa się *zupełna.*

Z uwagi na 2.4 w powyższej definicji słowo „oraz” można zastąpić słowem „lub”.

Fakt 2.6. *Kraty skończonej wysokości są zupełne.*

3 Pojęcia algebraiczne

3.1 Homomorfizmy

Spośród wszystkich przekształceń posetów na uwagę zasługują te, które zachowują porządek. Niech $\langle P_1, \leqslant_1\rangle$,$\langle P_2, \leqslant_2\rangle$ będą posetami i niech $f : P_1 \to P_2$. Mówimy, że przekształecenie f *zachowuje porządek* (jest przekształceniem *izotonicznym* lub *monotonicznym*), gdy dla wszystkich $a, b \in P_1$

$$\text{jeśli} \quad a \leqslant_1 b, \quad \text{to} \quad f(a) \leqslant_2 f(b). \tag{3}$$

Mówimy, że posety P_1, P_2 są *izomorficzne*, a f jest *izomorfizmem* tych posetów, gdy f jest bijekcją zachowującą porządek.

Odpowiednikiem pojęcia przekształcenia izotonicznego dla krat jako algebr jest pojęcie *homomorfizmu* krat. Niech $\langle L_1, \wedge_1, \vee_1\rangle$ i $\langle L_2, \wedge_2, \vee_2\rangle$ będą kratami. Przekształcenie $f : L_1 \to L_2$ jest $\wedge$-*homomorfizmem*, gdy dla wszystkich $a, b \in L_1$

$$f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b). \tag{4}$$

Analogicznie, f jest $\vee$-*homomorfizmem*, gdy dla wszystkich $a, b \in L_1$

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b). \tag{5}$$

Odwzorowanie jest *homomorfizmem* krat jeśli jest jednocześnie $\wedge$-homomorfizmem oraz $\vee$-homomorfizmem. Homomorfizm kraty w siebie zwany jest *endomorfizmem*. Jeśli homomorfizm f jest różnowartościowy (jest injekcją) to naywamy go *zanurzeniem*. Mówimy, że kraty L_1, L_2 są *izomorficzne*, a f jest *izomorfizmem* tych krat, gdy f jest bijektywnym homomorfizmem.

LEMAT 3.1. *Jeśli $f : L_1 \to L_2$ jest $\wedge$-homomorfizmem ($\vee$-homomorfizmem) kraty L_1 w kratę L_2, to f zachowuje porządek.*

DOWÓD. Załóżmy, że f jest $\wedge$-homomorfizmem. Niech $a, b \in L_1$ takie, że $a \leqslant_1 b$ jak w (3). Wówczas $a \wedge_1 b = a$. Stąd $f(a) = f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b)$ na mocy (4). Tak więc $f(a) \leqslant_2 f(b)$ w kracie L_2, co dowodzi, że f zachowuje porządek.

Dla $\vee$-homomorfizmów dowód przebiega dualnie. □

Z powyższego lematu natychmiast wynika, że homomorfizmy krat zachowują porządek.

Następny fakt wiąże pojęcie zachowywania porządku w kratach jako posetach z pojęciem izomorfizmu dla krat jako algebr.

LEMAT 3.2. *Niech X, Y będą kratami jako posety. Jeśli odwzorowania $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$ zachowują porządek, $gf = \mathrm{id}_X$ oraz $fg = \mathrm{id}_Y$, to f jest homomorfizmem i w konsekwencji tego jest izomorfizmem krat jako algebr.*

DOWÓD. Zauważmy, że odwzorowanie f jest odwracalne bo $f^{-1} = g$, więc f musi być bijekcją. Pokażemy, że f jest $\vee$-homomorfizmem. W tym celu niech $a, b \in X$. Ponieważ zawsze $a, b \leqslant a \vee b$, więc $f(a), f(b) \leqslant f(a \vee b)$ bo f zachowuje porządek. Stąd

$$f(a) \vee f(b) \leqslant f(a \vee b) \tag{6}$$

jako, że $f(a \vee b)$ jest górnym ograniczeniem $f(a)$ i $f(b)$.

Z drugiej strony zawsze mamy $f(a), f(b) \leqslant f(a) \vee f(b)$. Niech $x := g\big(f(a) \vee f(b)\big)$. Wówczas $g(f(a)), g(f(b)) \leqslant x$, czyli $a, b \leqslant x$, bo $gf = \mathrm{id}_X$. Zatem $a \vee b \leqslant x$, a stąd

$$f(a \vee b) \leqslant f(x) = f(a) \vee f(b),$$

co razem z (6) daje, że f jest $\vee$-homomorfizmem.

Rozumując dualnie wykażemy, że f jest również $\wedge$-homomorfizmem, a więc ostatecznie f jest izomorfizmem. □

3.2 Podkraty

Niepusty podzbiór K kraty L nazywamy *podkratą*, gdy K jest domknięty ze względu na $\wedge$ i $\vee$. Podkrata K z operacjami kraty L obciętymi do K jest kratą. Podposet kraty L nie jest podkratą w określonym wyżej sensie.

Zauważmy, że przekrój dowolnej ilości podkrat kraty L jest domknięty na operacje kresu dolnego i górnego, a więc jest podkratą w L. Zatem, jeśli weźmiemy dowolny, byle niepusty, podzbiór $H \subseteq L$, to przekrój wszystkich podkrat K zawierających H, a mianowicie

$$[H] := \bigcap \{K \text{ podkrata } L \colon H \subseteq K\}$$

jest *podkratą generowaną przez* H. Zbiór H nazywamy *zbiorem generatorów* (lub *zbiorem generującym*) podkratę $[H]$.

Podzbiór $H \subseteq L$ jest *wypukły*, gdy dla wszystkich $a, b \in H$ i $x \in L$ takich, że $a \leqslant x \leqslant b$ mamy $x \in H$.

Niech $a, b \in L$ takie, że $a \leqslant b$. Zbiór postaci

$$[a, b] := \{x \in L \colon a \leqslant x \leqslant b\} \tag{7}$$

nazywamy *odcinkiem* kraty L. Jest to ważny przykład podkraty wypukłej (dowód na ćwiczeniach). Dla łańcucha C możemy określić *odcinki półotwarte*. Niech $a, b \in C$ takie, że $a \leqslant b$ wtedy

$$(a, b] := \{x \in L \colon a < x \leqslant b\},$$
$$[a, b) := \{x \in L \colon a \leqslant x < b\}$$

oraz *odcinek otwarty*

$$(a, b) := \{x \in L \colon a < x < b\}.$$

3.3 Ideały

Podkratę I w kracie L nazywamy *ideałem* kraty L, gdy dla wszystkich $a \in I$ oraz $x \in L$ mamy $a \wedge x \in I$. Ideał I kraty L jest *właściwy*, gdy $I \neq L$. Właściwy ideał I kraty L nazywamy *ideałem pierwszym*, gdy dla wszystkich $a, b \in L$ z założenia, że $a \wedge b \in I$ wynika, że $a \in I$ lub $b \in I$. Każdy ideały kraty jest wypukły (dowód na ćwiczeniach).

Ponieważ przekrój dowolnej ilości podkrat wypukłych jest podkratą wypukłą. Podobnie dla ideałów. Przekrój dowolnej ilości ideałów jest ideałem. Pozwala to zdefiniować najmniejszy ideał generowany przez niepusty podzbiór H w kracie L. Będziemy go oznaczać $(H]$. Jeśli $H = \{a\}$ to piszemy krótko $(a]$ zamiast $a(\{a\}]$. Ten specyficzny ideał $(a]$ nazwyamy *ideałem głównym.*

Lemat 3.3. *Niech L będzie kratą i niech H oraz I będą jej niepustymi podzbiorami.*

(i) *I jest ideałem wtw., gdy po pierwsze dla wszystkich $a, b \in I$ mamy $a \vee b \in I$ i po drugie jeśli dla $a \in I$, $x \in L$ z faktu, że $x \leqslant a$ wynika $x \in I$.*

(ii) *$I = (H]$ wtw., gdy I jest ideałem, $H \subseteq I$ oraz dla wszystkich $a \in I$ istnieje liczba naturalna $n \geqslant 1$ i istnieją $h_0, \dots h_{n-1} \in H$ takie, że $a \leqslant h_0 \vee \cdots \vee h_{n-1}$.*

(iii) *Dla wszystkich $a \in L$ mamy $(a] = \{x \colon x \leqslant a\} = \{x \wedge a \colon x \in L\}$.*

Dowód. (i) $\Rightarrow$: Niech I będzie ideałem. Wtedy dla $a, b \in I$ mamy $a \vee b \in I$ bo I jest podkratą. Jeśli $a \in I$ i $x \leqslant a$, to $x = x \wedge a$, a więc $x \in I$ z definicji ideału.

$\Leftarrow$: Niech I spełnia podane oba warunki. Niech $a, b \in I$. Wówczas $a \vee b \in I$ z pierwszego warunku. Ponieważ $a \wedge b \leqslant a$ i $a \in I$, więc również $a \wedge b \in I$ z drugiego warunku. Zatem I jest podkratą. Jeśli $x \in L$ i $a \in I$, to $a \wedge x \leqslant a$ i $a \in I$, więc $a \wedge x \in I$ z drugiego warunku, co oznacza, że I jest ideałem.

(ii) Niech

$$I_0 := \{a \colon a \leqslant h_0 \vee \cdots \vee h_{n-1} \text{ dla } h_0, \dots, h_{n-1} \in H \text{ dla pewnego } n \geqslant 1\}.$$

Z (i) I_0 jest ideałem i $H \subseteq I$. Jeśli $H \subseteq J$ dla pewnego ideału J, to $I_0 \subseteq J$. Tak więc I_0 jest najmniejszym idealem zawierającym H, to znaczy, $I = I_0$.

(iii) Wynika wprost z definicji lub z (ii). ☐

3.4 Kongruencje

Relację równoważności ρ na kracie L nazywamy *kongurencją* wtw., gdy spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli} \quad a \equiv_\rho b \quad \text{i} \quad c \equiv_\rho d, \quad \text{to} \quad a \wedge c \equiv_\rho b \wedge d \quad \text{oraz} \quad a \vee c \equiv_\rho b \vee d. \tag{8}$$

Standardowymi przykładami kongruencji jest kongruencja *totalna* ω

$$a \equiv_\omega b \quad \text{wtw., gdy} \quad a, b \text{ dowolne w } L$$

oraz kongruencja *identycznościowa* ι

$$a \equiv_\iota b \quad \text{wtw., gdy} \quad a = b.$$

Dla elementu $a \in L$ zbiór

$$[a]_\rho = \{x \in L \colon x \equiv_\rho a\} \tag{9}$$

jest klasą abstrakcji relacji ρ wyznaczoną przez element a.

Lemat 3.4. *Niech ρ będzie relacją kongruencji na kracie L. Wtedy dla wszystkich $a \in L$, klasa abstrakcji $[a]_\rho$ jest wypukłą podkratą L.*

Dowód. Niech $x, y \in [a]_\rho$. Wówczas $x \equiv_\rho a$ oraz $y \equiv_\rho a$. Na mocy definicji kongruencji mamy $x \wedge y \equiv_\rho a \wedge a = a$ oraz $x \vee y \equiv_\rho a \vee a = a$, co oznacza, że $[a]_\rho$ jest podkratą.

Jeśli weźmiemy takie $t \in L$, że $x \leqslant t \leqslant y$, to

$$t = t \wedge y \equiv_\rho t \wedge a.$$

Stąd i z własności kongruencji mamy

$$t = t \vee x \equiv_\rho (t \wedge a) \vee x \equiv_\rho (t \wedge a) \vee a = a,$$

co oznacza, że $t \in [a]_\rho$, a więc $[a]_\rho$ jest podkratą wypukłą. □

Lemat 3.5. *Zwrotna relacja binarna ρ na kracie L jest kongruencją wtw., gdy następujące trzy warunki są spełnione dla $x, y, z, t \in L$:*

(i) $x \equiv_\rho y$ *wtw., gdy* $x \wedge y \equiv_\rho x \vee y$.

(ii) *jeśli* $x \leqslant y \leqslant z$, $x \equiv_\rho y$ *i* $y \equiv_\rho z$, *to* $x \equiv_\rho z$.

(iii) *jeśli* $x \leqslant y$ *i* $x \equiv_\rho y$, *to* $x \wedge t \equiv_\rho y \wedge t$ *oraz* $x \vee t \equiv_\rho y \vee t$.

Dowód. (Praca domowa.) □

Pomiędzy homomorfizmami i kongruencjami zachodzi wiele ścisłych związków. Wprowadzimy teraz pojęcie kraty ilorazowej. Niech L będzie kratą i niech ρ będzie relacją kongruencji na L. Przez L/ρ będziemy oznaczać zbiór wszystkich klas abstrakcji ρ, tzn.

$$L/\rho = \{[a]_\rho \colon a \in L\}. \tag{10}$$

Na elementach L/ρ określamy dwie operacje:

$$[a]_\rho \wedge [b]_\rho = [a \wedge b]_\rho \tag{11}$$

oraz

$$[a]_\rho \vee [b]_\rho = [a \vee b]_\rho. \tag{12}$$

Rzeczywiście takie określenie kresów nie zależy od wyboru reprezentantów klas abstrakcji, ponieważ jeśli $[a]_\rho = [a']_\rho$ oraz $[b]_\rho = [b']_\rho$, to $a \equiv_\rho a'$ i $b \equiv_\rho b'$, a stąd $a \wedge b \equiv_\rho a' \wedge b'$, co oznacza, że $[a \wedge b]_\rho = [a' \wedge b']_\rho$. Dualnie pokażemy, że $\vee$ jest również dobrze określoną operacją na L/ρ. Sprawdzenie aksjomatów kraty jako algebry dla tak wprowadzonych operacji pozostawiamy jako pracę domową.

Otrzymaliśmy nową kratę L/ρ. Nazywamy ją *kratą ilorazową kraty L modulo ρ*.

Lemat 3.6. *Odwzorowanie $\varphi_\rho \colon L \to L/\rho$ działające w następujący sposób:*

$$\varphi_\rho(x) = [x]_\rho \qquad \textit{dla} \qquad x \in L \tag{13}$$

jest homomorfizmem kraty L na kratę ilorazową L/ρ.

Dowód. Wynika natychmiast z określenia kresów na klasach abstrakcji. □

Mówimy, że krata K jest *homomorficznym obrazem* kraty L, gdy istnieje homomorfizm kraty L *na* kratę K (surjekcja).

Twierdzenie 3.7 (O homomorfiźmie). *Każdy homomorficzny obraz kraty L jest izomorficzny z odpowiednią kratą ilorazową kraty L. Jeśli $\varphi\colon L \to K$ jest homomorfizmem L na K, to relacja binarna ρ określona na L w następujący sposób*

$$x \equiv_\rho y \quad \textit{wtw., gdy} \quad \varphi(x) = \varphi(y), \tag{14}$$

jest kongruencją i

$$L/\rho \cong K.$$

Izomorfizm dany jest przekształceniem $\psi\colon L/\rho \to K$ takim, że

$$\psi([x]_\rho) = \varphi(x), \quad \textit{dla} \quad x \in L. \tag{15}$$

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\varphi", "na"'] \arrow[d, "x \mapsto [x]_\rho"', "\varphi_\rho"] & K \\
L/\rho \arrow[ur, "\psi", "{[x]_\rho \mapsto \varphi(x)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dowód. Najpierw należy wykazać, że ρ jest relacją kongruencji. Zwróćmy uwagę w (14), że relacja ρ jest określona za pomocą relacji $=$, która oczywiście jest relacją równoważności. Tak więc ρ jest również relacją równoważności. Załóżmy teraz, że $x \equiv_\rho y$ oraz $u \equiv_\rho w$ dla dowolnych $x, y, u, w \in L$. Stąd, zgodnie z (14), mamy $\varphi(x) = \varphi(y)$ i $\varphi(u) = \varphi(w)$. Ponieważ φ jest homomorfizmem, to

$$\varphi(x \wedge u) = \varphi(x) \wedge \varphi(u) = \varphi(y) \wedge \varphi(w) = \varphi(y \wedge w),$$

co oznacza, że $x \wedge u \equiv_\rho y \wedge w$. Dualnie pokażemy, że $x \vee u \equiv_\rho y \vee w$ i w ten sposób ρ jest kongruencją.

Sprawdzimy teraz, że odwzorowanie ψ jest dobrze określone. W tym celu załóżmy, że $[x]_\rho = [y]_\rho$ dla pewnych $x, y \in L$. Klasy abstrakcji są równe, gdy ich reprezentanci są w relacji ze sobą, czyli $x \equiv_\rho y$. Stąd, zgodnie z (14) mamy $\varphi(x) = \varphi(y)$. Dalej, na podstawie (15) dostajemy

$$\psi([x]_\rho) = \varphi(x) = \varphi(y) = \psi([y]_\rho).$$

Wykazaliśmy, że biorąc wartość ψ dla różnych reprezentantów tej samej klasy abstrakcji dostajemy to samo, innymi słowy, wartość ψ nie zależy od wyboru reprezentanta klasy abstrakcji.

Teraz wykażemy, że ψ jest injekcją. Zakładamy, że $\psi([x]_\rho) = \psi([y]_\rho)$ dla pewnych $x, y \in L$. Z (15) mamy $\varphi(x) = \varphi(y)$. Stąd, na mocy (14) otrzymujemy $x \equiv_\rho y$, ale to oznacza, że $[x]_\rho = [y]_\rho$, czyli, że ψ jest różnowartościowe.

Aby dowieść, że ψ jest surjekcją, weźmy dowolne $x' \in K$. Homomorfizm φ jest „na”, więc istnieje takie $x \in L$, że $\varphi(x) = x'$. Z (15) mamy

$$x' = \varphi(x) = \psi([x]_\rho).$$

Wskazaliśmy klasę abstrakcji $[x]_\rho$ w kracie ilorazowej L/ρ, której obrazem przy ψ jest x', więc ψ jest „na”.

Pozostało pokazać, że ψ jest homomorfizmem. Niech $x, y \in L$. Wówczas

$$\psi([x]_\rho \wedge [y]_\rho) = \psi([x \wedge y]_\rho) = \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y) = \psi([x]_\rho) \wedge \psi([y]_\rho)$$

kolejno z określenia $\wedge$ w kracie ilorazowej L/ρ, (15), tego, że φ jest homomorfizmem i ponownie z (15). Dla $\vee$ rozumowanie jest dualne. □

Powyższe twierdzenie mówi, że każdemu homomorfimowi kraty L na kratę K (podkreślmy słowo „na” w sensie „surjekcja”) odpowiada dokładnie jeden kongruentny podział kraty L. Podział ten wyrażony jest w tym twierdzeniu relacją ρ.

3.5 Produkt prosty

Kolejnym ważnym pojęciem, typowym dla algebry, jest *produkt prosty* krat. Niech L, K będą kratami. Na zbiorze $L \times K$ wszystkich par uporządkowanych (a, b), gdzie $a \in L$, $b \in K$, definiujemy operacje $\wedge$ oraz $\vee$ po współrzędnych, tzn.:

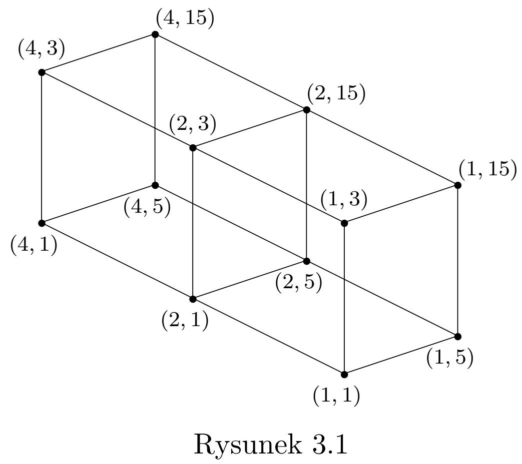
$$(a, b) \wedge (c, d) = (a \wedge c, b \wedge d), \tag{16}$$

$$(a, b) \vee (c, d) = (a \vee c, b \vee d). \tag{17}$$

Łatwo sprawdzić, że tak określone operacje $\wedge$ i $\vee$ są odpowienio kresem dolnym i górnym na $L \times K$. Tak więc otrzymujemy kratę $L \times K$ zwaną dalej *produktem prostym* krat L i K.

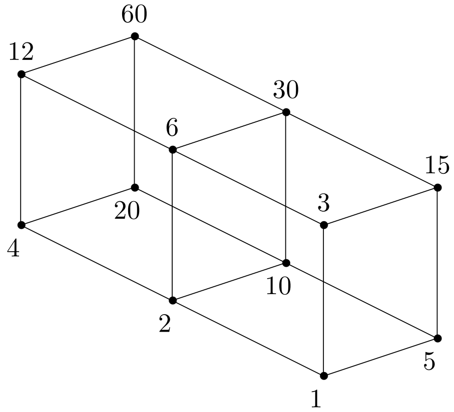
Zadanie 3.8. Jak można określić częściowy porządek na produkcie prostym krat?

Dla zilustrowania zdefiniowanego produktu rozważmy kratę L dzielników liczby 4 oraz kratę K dzielników liczby 15. Oczywiście $L = \{1, 2, 4\}$ oraz $K = \{1, 3, 5, 15\}$. Diagram produktu $L \times K$ przedstawiono na rys. 3.1.



Rysunek 3.1

Na podanym przykładzie można również zilustrować wcześniej poznane pojęcie izomorfizmu krat. Zauważmy otóż, że każdą etykietę (a, b) na rys. 3.1 można jednoznacznie zastąpić iloczynem $a \cdot b$ jak na rys. 3.2.



Rysunek 3.2

Zauważmy, że można rozumować odwrotnie, tzn. każdy dzielnik liczby 60 można rozłożyć jednoznacznie na iloczyn liczby ze zbioru L i ze zbioru K. Podkreślmy użyte dwukrotnie słowo „jednoznacznie”. Mamy zatem bijekcję φ ze zbioru $L \times K$ na zbiór dzielników liczby 60, określoną następująco $\varphi(a,b) = a \cdot b$ dla $a \in L$, $b \in K$. Przystawanie diagramów 3.1 i 3.2 oznacza, że przekształcenie φ jest izomorfizmem.

Warto tutaj zwrócić jeszcze uwagę na to, że kolejność mnożenia w φ jest arbitralna, co oznacza, że izomorficzne są produkty proste $L \times K$ oraz $K \times L$. Mówi o tym między innymi następujący lemat.

LEMAT 3.9. *Niech L_1, L_2, K_1, K_2 będą takimi kratami, że $L_1 \cong L_2$ oraz $K_1 \cong K_2$. Wówczas*

$$K_1 \times L_1 \cong L_1 \times K_1 \cong L_2 \times K_2.$$

SZKIC DOWODU. Pierwszy z dwu powyższych izomorfizmów realizowany jest za pomocą przekształcenia $\xi\colon L_1 \times K_1 \to K_1 \times L_1$, które zamienia kolejność elementów w parze, tzn. $\xi(a,b) = (b,a)$ dla $a \in L_1$, $b \in K_1$.

Aby określić drugi izomorfizm, rozważmy izomorfizmy które mamy z założenia tzn. $\varphi\colon L_1 \to L_2$ oraz $\psi\colon K_1 \to K_2$. Weźmy przekształcenie $\eta\colon L_1 \times K_1 \to L_2 \times K_2$ takie, że $\eta(a,b) = (\varphi(a), \psi(b))$ dla $a \in L_1$, $b \in K_1$. $\square$

Na koniec podamy twierdzenie wiążące produkt prosty z kongruencjami.

TWIERDZENIE 3.10. *Niech L, K będą kratami, ρ kongruencją na L i σ kongruencją na K. Rozważmy relację $\rho \times \sigma$ na zbiorze $L \times K$ określoną w następujący sposób:*

$$(a,b) \equiv_{\rho\times\sigma} (c,d) \qquad \textit{wtw., gdy} \qquad a \equiv_\rho c \quad \textit{i} \quad b \equiv_\sigma d. \tag{18}$$

Relacja $\rho \times \sigma$ jest kongruencją na produkcie prostym $L \times K$ i na odwrót, każda kongruencja na produkcie prostym $L \times K$ jest takiej postaci.

DOWÓD. Sprawdzenie, że relacja $\rho\times\sigma$ jest kongruencją sprowadza się do rozwinięcia odpowiednich definicji.

Wykażemy, że dowolna kongruencja δ na produkcie $L \times K$ da się rozłożyć na kongruencje na składnikach tego produktu. W tym celu określamy kongruencję ρ na L w następujący sposób

$$a \equiv_\rho b \quad \text{wtw., gdy istnieje takie } c \in K, \text{ że } (a,c) \equiv_\delta (b,c) \tag{19}$$

dla dowolnych $a, b \in L$. Niech $d \in K$. Załóżmy, że $a \equiv_\rho b$. Wówczas z (19) mamy

$$\begin{array}{ccccc} (a \wedge b, d) & \vee & (a, c) & = & (a, b \vee c), \\ \equiv_\delta & & \equiv_\delta & & \\ (a \wedge b, d) & \vee & (b, c) & = & (b, d \vee c), \end{array}$$

a zatem modulo δ muszą również przystawać pary z prawej strony równości i dalej

$$\begin{array}{ccccc} (a, b \vee c) & \wedge & (a \vee b, d) & = & (a, d), \\ \equiv_\delta & & \equiv_\delta & & \\ (b, d \vee c) & \wedge & (a \vee b, d) & = & (b, d), \end{array}$$

tak więc z dowolności wyboru d mamy

$$a \equiv_\rho b \quad \text{wtw., gdy dla dowolnego } d \in K \ (a, d) \equiv_\delta (b, d). \tag{20}$$

Podobnie postępując dla $c, d \in K$ dostaniemy

$$c \equiv_\sigma d \quad \text{wtw., gdy dla pewnego/dowolnego } a \in L \ (a, c) \equiv_\delta (a, d). \tag{21}$$

Tak określone ρ i σ są kongruencjami.

Załóżmy teraz, że $(a, b) \equiv_{\rho\times\sigma} (c, d)$. Wtedy odpowiednio z (20) i (21) mamy $(a, x) \equiv_\delta (c, x)$ dla dowolnego $x \in K$ i $(y, b) \equiv_\delta (y, d)$ dla dowolnego $y \in L$. Na mocy definicji kongruencji (8) bierzemy kres górny stronami

$$(a, x) \vee (y, b) \equiv_\delta (c, x) \vee (y, d).$$

Podstawiając $x = b \wedge d$ oraz $y = a \wedge c$ i stosując regułę pochłaniania otrzymamy

$$(a, b) \equiv_\delta (c, d).$$

Odwrotnie, załóżmy teraz, że $(a, b) \equiv_\delta (c, d)$. Z obu stron weźmy kres dolny z $(a \vee c, b \wedge d)$. Dostaniemy

$$(a, b \wedge d) \equiv_\delta (c, b \wedge d),$$

co dzięki (19) oznacza, że

$$a \equiv_\rho c. \tag{22}$$

Biorąc natomiast z obu stron kres górny z $(a \vee c, b \wedge d)$ dostaniemy

$$(a \vee c, b) \equiv_\delta (a \vee c, d),$$

co z kolej z uwagi na (21) oznacza, że

$$b \equiv_\sigma d. \tag{23}$$

Łącząc (22) z (23) na mocy (18) mamy

$$(a, b) \equiv_{\rho\times\sigma} (c, d).$$

Ostatecznie $\delta = \rho \times \sigma$. □

4 Wielomiany, tożsamości i nierówności

Wielomian o zmiennych $x_1, \dots, x_n$ w kracie L to wyrażenie zbudowane przy pomocy operacji kresów $\wedge$, $\vee$ i nawiasów. Przykładami wielomianów są:

$$x_1,$$
$$x_1 \wedge x_2,$$
$$(x_1 \wedge x_2) \vee x_3.$$

Formalnie zbiór wielomianów definiuje się rekurencyjnie. Zbiór P_n wielomianów o n zmiennych w kracie L jest najmniejszym zbiorem spełniającym dwa warunki:

(i) $x_i \in P_n$ dla $i = 1, \dots, n$,

(ii) jeśli $p, q \in P_n$, to $(p \wedge q), (p \vee q) \in P_n$.

Tożsamości w kracie to wyrażenia postaci $p = q$, natomiast *nierówności* to wyrażenia postaci $p \leqslant q$, gdzie p, q to wielomiany. Mówimy, że tożsamość (nierówność) w kracie jest *spełniona* w kracie L wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p(a_1, a_2, \dots) = q(a_1, a_2, \dots)$$

dla dowolnych $a_1, a_2, \dots \in L$.

Przykładem tożsamości w kracie L może być reguła pochłaniania

$$(x \vee y) \wedge x = x.$$

Z lewej strony mamy wielomian $p(x, y) = (x \vee y) \wedge x$, a z prawej $q(x, y) = x$. Równość $p(x, y) = q(x, y)$ zachodzi dla wszystkich $x, y \in L$.

Bardzo często pojawia się taka oto nierówność:

$$x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z). \tag{24}$$

Jest ona prawdziwa w dowolnej kracie L, dla dowlnych $x, y, z \in L$. Zauważmy bowiem, że $x \leqslant x \vee y$ oraz $y \wedge z \leqslant y \leqslant x \vee y$, czyli, że $x \vee y$ jest górnym ograniczeniem x i $y \wedge z$. Stąd mamy

$$x \vee (y \wedge z) \leqslant x \vee y \tag{25}$$

bo z lewej strony jest kres górny, czyli najmniejsze z górnych ograniczeń elemenów x i $y \wedge z$. Ponieważ z kolei $x \leqslant x \vee z$ oraz $y \wedge z \leqslant z \leqslant x \vee z$, więc

$$x \vee (y \wedge z) \leqslant x \vee z. \tag{26}$$

Ostatecznie z (25) i (26) otrzymujemy (24).

TWIERDZENIE 4.1. *Tożsamości zachowują się ze względu na podkraty, homomorficzne obrazy i produkty proste.*

DOWÓD. Niech p, q będą wielomianami n zmiennych w kracie L. Załóżmy, że tożsamość $p = q$ jest spełniona w L.

Rozważmy podkratę K kraty L. Jeśli $x_1, \dots, x_n \in K$, to oczywiście $x_1, \dots, x_n \in L$ i od razu z założeń mamy

$$p(x_1, \dots, x_n) = q(x_1, \dots, x_n).$$

Niech teraz K będzie kratą, a $\varphi\colon L \to K$ homomorfizmem L na K. Rozważmy $y_1, \dots, y_n \in K$. Homomorfizm φ jest surjekcją, więc mamy takie $x_1, \dots, x_n \in L$, że $\varphi(x_i) = y_i$ dla $i = 1, \dots, n$. Wówczas

$$\begin{aligned} p(y_1, \dots, y_n) = p(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = \varphi(p(x_1, \dots, x_n)) = \\ = \varphi(q(x_1, \dots, x_n)) = q(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = q(y_1, \dots, y_n), \end{aligned}$$

a więc równość $p = q$ jest prawdziwa w K.

Pozostało rozpatrzeć produkt prosty krat, powiedzmy $L \times K$. Zakładamy, że tożsamość $p = q$ spełniona jest zarówno w L, jak i w K. Wtedy

$$\begin{aligned} p((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) = (p(x_1, \dots, x_n), p(y_1, \dots, y_n)) = \\ = (q(x_1, \dots, x_n), q(y_1, \dots, y_n)) = q((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)), \end{aligned}$$

co oznacza, że równość $p = q$ jest spełniona w $L \times K$. □

Powyższe twierdzenie stanie się bardzo ważnym, gdy zaczniemy badać specyficzne klasy krat zadane przez tożsamości. Pozwala ono bowiem stwierdzić, że zarówno podkrata, homomorficzny obraz jak i produkt prosty pewnej klasy krat zdefiniowanych tożsamościami należy również do tej klasy.

Lemat 4.2. *Następujące nierówności spełnione są w każdej kracie:*

(i) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leqslant x \wedge (y \vee z)$,

(ii) $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,

(iii) $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leqslant (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$,

(iv) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leqslant x \wedge (y \vee (x \wedge z))$.

Dowód. Nierówność (ii) została już wykazana w (24). Pozostałe do sprawdzenia na ćwiczeniach. □

Lemat 4.3. *Poniższe tożsamości i nierówności są równoważne w każdej kracie:*

(i) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$,

(ii) $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$,

(iii) $(x \vee y) \wedge z \leqslant x \vee (y \wedge z)$.

Dowód. Na ćwiczeniach. □

5 Kraty generowane

Zacznijmy od formalnej definicji kraty generowanej.

Definicja 5.1. Niech P będzie posetem i niech $\mathcal{K}$ będzie klasą krat spełniających ustalony zestaw tożsamości. Mówimy, że krata $F_{\mathcal{K}}(P)$ jest kratą *generowaną* przez P nad $\mathcal{K}$ wtw., gdy są spełnione następujące warunki:

(i) $F_{\mathcal{K}}(P) \in \mathcal{K}$,

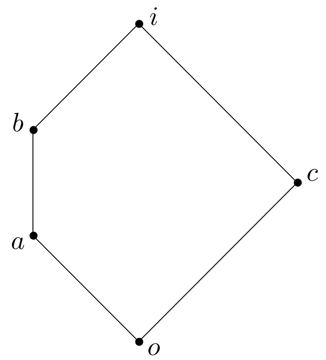
(ii) $P \subseteq F_{\mathcal{K}}(P)$ oraz dla $a, b, c \in P$ mamy $\inf\{a, b\} = c$ w P wtw., gdy $a \wedge b = c$ w $F_{\mathcal{K}}(P)$ i $\sup\{a, b\} = c$ w P wtw., gdy $a \vee b = c$ w $F_{\mathcal{K}}(P)$,

(iii) $[P] = F_{\mathcal{K}}(P)$,

(iv) niech $L \in \mathcal{K}$ i niech $\varphi\colon P \to L$ będzie przekształceniem zachowującym porządek o takiej własności dla $a, b, c \in P$, że jeśli $\inf\{a, b\} = c$ w P, to $\varphi(a) \wedge \varphi(b) = \varphi(c)$ w L i jeśli $\sup\{a, b\} = c$ w P, to $\varphi(a) \vee \varphi(b) = \varphi(c)$ w L; wówczas istnieje homomorfizm krat $\phi\colon F_{\mathcal{K}}(P) \to L$ rozszerzający φ w tym sensie, że $\phi(a) = \varphi(a)$ dla wszystkich $a \in P$.

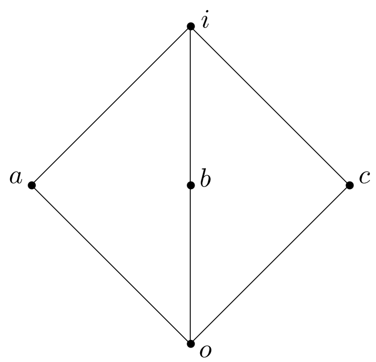
Mówiąc poglądowo, choć może nieprecyzyjnie, krata generowana to najbardziej ogólna krata spełniająca pewne kryteria.

Kratą generowaną przez pięć elementów o, a, b, c, i spełniających warunki: $a < b$, $a \vee c = i$ i $b \wedge c = o$ jest krata N_5 zwana *pięciokątem*, przedstawiona na rys. 5.1.



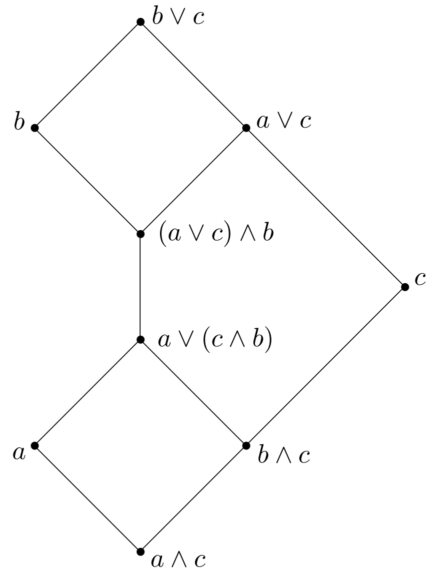
Rysunek 5.1: Krata N_5 – pięciokąt.

Te same elementy z warunkami: $a \wedge b = b \wedge c = c \wedge a = o$ i $a \vee b = b \vee c = c \vee a = i$ generują kratę M_3 zwaną *diamentem*. Jej diagram przedstawia rys. 5.2.



Rysunek 5.2: Krata M_3 – diament.

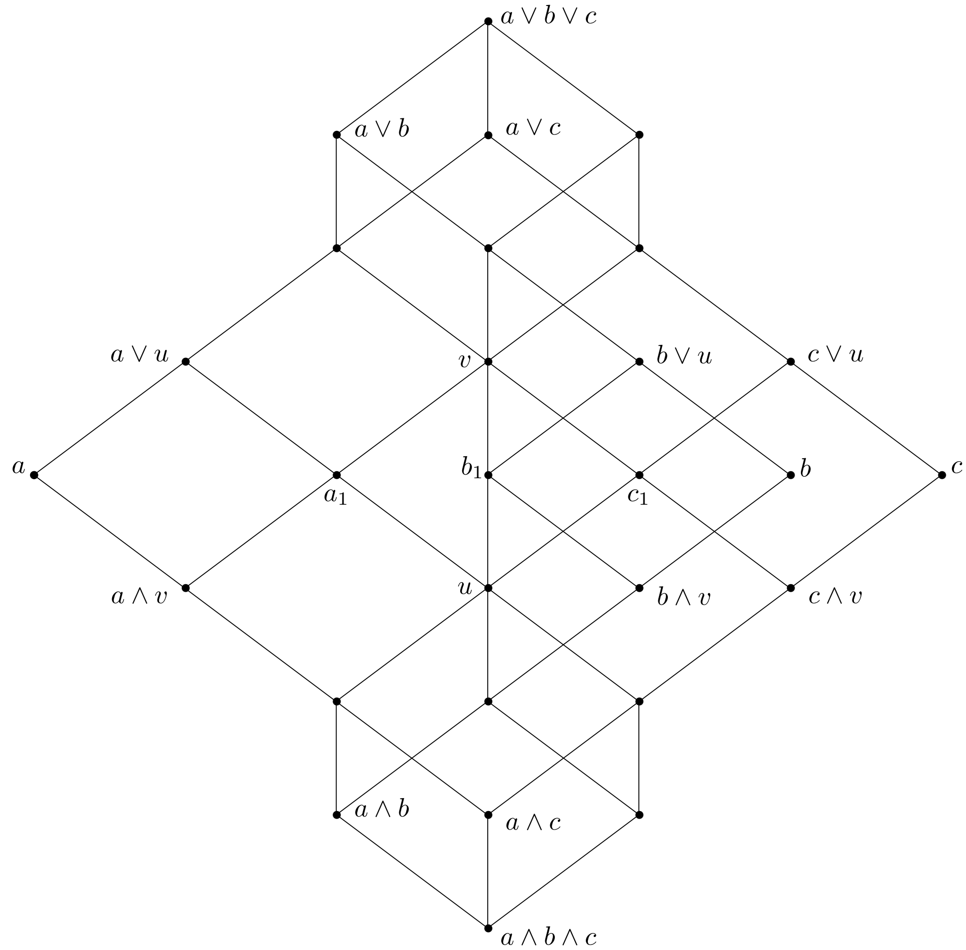
Diagram kraty generowanej przez trzy elementy a, b, c z założeniem, że $a < b$ jest przedstawiony na rys. 5.3.



Rysunek 5.3: Krata generowana przez a, b, c takie, że $a < b$.

Diagram kraty modularnej, tzn. spełniającej warunek (M), str. 19, generowanej przez trzy elementy a, b, c jest przedstawiony na rys. 5.4. Zastosowano tam następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
u &= (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a),\\
v &= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a),\\
a_1 &= (a \wedge v) \vee u,\\
b_1 &= (b \wedge v) \vee u,\\
c_1 &= (c \wedge v) \vee u.
\end{aligned}$$



Rysunek 5.4: Krata modularna generowana przez a, b, c takie, że $a < b$.

6 Kraty modularne

6.1 Charakteryzacja

Kratę, w której dla dowolnych elementów a, b, c zachodzi

$$\text{jeśli} \quad a \leqslant b, \quad \text{to} \quad a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b \tag{M}$$

nazywamy *modularną*.

Kraty modularne możemy scharakteryzować za pomocą tożsamości oraz za pomocą specjalnych podkrat.

Mówimy krótko, że krata nie zawiera pięciokąta (diamentu), w tym sensie, że nie zawiera ona podkraty izomorficznej z kratą N_5 (M_3).

Twierdzenie 6.1. *W każdej kracie L następujące warunki są równoważne:*

(i) *krata L jest modularna,*

(ii) *krata L, dla dowolnych $a, b, c \in L$, spełnia tożsamość*

$$\Big(a \vee (c \wedge (a \vee b))\Big) \wedge b = (a \vee c) \wedge b \tag{27}$$

(iii) *krata L, dla dowolnych $a, b, c \in L$, spełnia tożsamość*

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge b) = ((a \wedge b) \vee c) \wedge b \tag{28}$$

(iv) *krata L nie zawiera pięciokąta.*

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Ponieważ zawsze $a \leqslant a \vee b$, więc z definicji modularności (M) mamy

$$a \vee (c \wedge (a \vee b)) = (a \vee c) \wedge (a \vee b).$$

Jeśli weźmiemy obustronnie kres dolny z b i zastosujemy regułę pochłaniania z prawej strony równości, to otrzymamy (27).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Wstawmy $a \wedge b$ za a w (27). Wówczas otrzymamy

$$\Big((a \wedge b) \vee (c \wedge ((a \wedge b) \vee b))\Big) \wedge b = ((a \wedge b) \vee c) \wedge b.$$

Korzystając z reguły pochłaniania dostajemy

$$((a \wedge b) \vee (c \wedge b)) \wedge b = ((a \wedge b) \vee c) \wedge b.$$

Z uwagi na fakt, że $a \wedge b \leqslant b$ oraz $c \wedge b \leqslant b$, a więc $(a \wedge b) \vee (c \wedge b) \leqslant b$, powyższa równość staje się równością (28).

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Na mocy 4.1 wszystkie podkraty L spełniają warunek (27). Dla elementów a, b, c takich jak na rys. 5.1 pięciokąt N_5 nie spełnia (27), zatem żadna podkrata kraty L nie może być z nią izomorficzna.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Przypuśćmy, że krata L nie jest modularna. Zgodnie z (M) istnieją więc takie $a, b, c \in L$, że $a \leqslant b$ i $a \vee (c \wedge b) \neq (a \vee c) \wedge b$. Krata generowana przez trzy elementy a, b, c takie, że $a \leqslant b$ pokazana jest na rys. 5.3. Dlatego podkrata kraty L wygenerowana przez elementy a, b, c jest homomorficznym obrazem kraty 5.3. Jeśli dwa z pięciu elementów $c \wedge b$, $a \vee (c \wedge b)$, $(a \vee c) \wedge b$, $a \vee c$, c zostaną utożsamione przy tym homomorfiźmie, to również elementy $a \vee (c \wedge b)$ i $(a \vee c) \wedge b$ zostaną utożsamione, co przeczy naszemu założeniu. Zatem, te wszystkie pięć elementów są parami różne i tworzą pięciokąt. □

Charakteryzacja przy pomocy tożsamości jest o tyle istotna, że pozwala na mocy 4.1, szybko stwierdzić, że zarówno podkraty, homomorficzne obrazy jak i produkty proste krat modularnych są modularne.

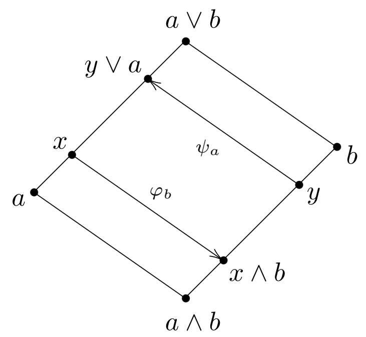
6.2 Twierdzenie o izomorfiźmie

Twierdzenie 6.2 (Twierdzenie o izomorfiźmie)**.** *Niech L będzie kratą modularną i niech $a, b \in L$. Wówczas odwzorowanie*

$$\varphi_b \colon x \leadsto x \wedge b$$

jest izomorfizmem odcinków $[a, a \vee b]$ oraz $[a \wedge b, b]$. Izomorfizm odwrotny dany jest przekształceniem

$$\psi_a \colon x \leadsto x \vee a.$$



Rysunek 6.1

Dowód. Odwzorowania φ_b i ψ_a zachowują porządek, więc aby były izomorfizmami wystarczy pokazać, że

$$\psi_a \varphi_b = \mathrm{id}_{[a, a\vee b]} \qquad \text{i} \qquad \varphi_b \psi_a = \mathrm{id}_{[a\wedge b, b]}\,.$$

Niech więc $x \in [a, a \vee b]$, czyli w szczególności $a \leqslant x$. Wówczas z modularności kraty L mamy

$$\psi_a \varphi_b(x) = (x \wedge b) \vee a = x \wedge (b \vee a) = x.$$

Teraz niech $y \in [a \wedge b, b]$. Stąd w szczególności mamy $y \leqslant b$ i z modularności kraty L otrzymujemy

$$\varphi_b \psi_a(y) = (y \vee a) \wedge b = y \vee (a \wedge b) = y.$$

W ten sposób dowód jest zakończony. □

Zauważmy, że dla a, b oraz φ_b, ψ_a takich jak w 6.2 jeśli $x, y \in [a \wedge b, b]$, to

$$\psi_a(x \wedge y) = \psi_a(x) \wedge \psi_a(y)$$

z uwagi na to, że zgodnie z 6.2, ψ_a jest homomorfizmem. Zanotujmy ten fakt jako wniosek.

Wniosek 6.3. *Niech L będzie kratą modularną i niech $a, b \in L$. Dla wszystkich $x, y \in [a \wedge b, b]$ zachodzi*

$$a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y).$$

6.3 Niezależność w kratach

Niech L będzie kratą ograniczoną z dołu. Podzbiór $H \subseteq L \setminus \{\mathbf{0}\}$ nazywamy *niezależnym* wtw., gdy dla dowolnych, skończonych podzbiorów $X, Y \subseteq H$ zachodzi

$$\bigvee X \wedge \bigvee Y = \bigvee (X \cap Y).$$

CDN...

7 Kraty dystrybutywne

7.1 Charakteryzacja

Kratę L nazywamy *dystrybutywną* (*rozdzielną*), gdy dla wszystkich $a, b, c \in L$ prawdziwa jest tożsamość

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c). \tag{D}$$

Na mocy 4.3 warunek (D) jest równoważny z warunkiem do niego dualnym:

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c) \tag{D*}$$

i dlatego może on również być traktowany jako warunek definiujący kraty dystrybutywne. Przykładami kraty, które nie spełniają (D) są pięciokąt (rys. 5.1) i diament (rys. 5.2).

TWIERDZENIE 7.1. *Krata jest dystrybutywna wtw., gdy jest modularna i nie zawiera diementu.*

DOWÓD. $\Rightarrow$: Zakładamy, że krata L jest dytrybutywna. Z warunku (D) wynika (28) więc L jest modularna. Wszystkie podkraty L są dystrybutywne, a więc L nie może zawierać diamentu, który nie jest dystrybutywny.

$\Leftarrow$: Przypuśćmy, że krata L jest modularna, nie zawiera diamentu i nie jest dytrybutywna. Wówczas istnieją takie $a, b, c \in L$, że

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \neq a \wedge (b \vee c).$$

Krata generowana przez trzy elementy pokazana jest na rys. 5.4. Elementy u, a_1, b_1, c_1, v tworzą diement. Podkrata kraty L wygenerowana przez a, b, c jest homomorficznym obrazem kraty 5.4. Obrazy elementów u, a_1, b_1, c_1, v tworzą podkratę izomorficzną z kratą ilorazową diamentu. Krata M_3 posiada dwie kraty ilorazowe: M_3 i jednoelementową kratę. W pierwszym przypadku mamy sprzeczność z założeniem, że L nie zawiera diamentu, natomiast w drugim musi być

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c),$$

co przeczy naszemu założeniu. □

Podamy jeszcze inne twierdzenia charakteryzujące kraty dystrybutywne i boolowskie. Wcześniej jednak musimy wprowadzić dwa dodatkowe pojęcia.

Niech X będzie niepustym zbiorem. Rodzinę S podzbiorów X, tzn. $S \subseteq 2^X$, nazywamy *pierścieniem zbiorów* jeśli jest ona domknięta na przekroje i sumy, tzn, gdy dla wszystkich $A, B \in S$ mamy $A \cap B, A \cup B \in S$. Rodzina S zwana jest *ciałem zbiorów*, gdy S jest pierścienim zbiorów domkniętym ze względu na dopełnienia, tzn. gdy dla dowolnego $A \in S$ mamy $X \setminus A \in S$. Zauważmy, że pierścień, jak i ciało zbiorów posiada strukturę kraty z naturalnym porządkiem $\subseteq$.

Twierdzenie 7.2 (Birkhoff, Stone)**.** *Krata jest dytrybutywna wtw., gdy jest izomorficzna z pieścieniem zbiorów.*

7.2 Dopełnienia

Poset jest *ograniczony z dołu*, gdy zawiera element najmniejszy, czyli $\mathbf{0}$, jest on natomiast *ograniczony z góry*, gdy zawiera element największy, czyli $\mathbf{1}$. Gdy poset zawiera oba te elementy mówimy wtedy krótko, że jest on *ograniczony.*

W kracie ograniczonej L element a jest *dopełnieniem* elementu b wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a \wedge b = \mathbf{0} \qquad \text{oraz} \qquad a \vee b = \mathbf{1}.$$

Zauważmy, że aby w ogóle mówić o dopełnieniach w kracie L to musi ona zawierać $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$, także założenie, że L jest ograniczona jest tutaj jak najbardziej uzasadnione. Krata L jest *kratą z dopełnieniami*, gdy każdy element L posiada dopełnienie.

Lemat 7.3. *Element ograniczonej kraty dystrybutywnej może mieć najwyżej jedno dopełnienie.*

Dowód. Niech b_1, b_2 będą dopełnieniami elementu a w ograniczonej kracie dystrybutywnej L. Wówczas

$$b_1 = b_1 \wedge \mathbf{1} = b_1 \wedge (a \vee b_2) = (b_1 \wedge a) \vee (b_1 \wedge b_2) = \mathbf{0} \vee (b_1 \wedge b_2) = b_1 \wedge b_2.$$

Zamieniając ideksy przy b_1, b_2 wykażemy, że $b_2 = b_1 \wedge b_2$. Tak, więc $b_1 = b_2$. □

Rozważmy odcinek $[a, b]$ w dowolnej kracie L oraz dwa elementy $x, y \in [a, b]$. Mówimy, że element y jest *względnym dopełnieniem* elementu x w odcinku $[a, b]$, gdy

$$x \wedge y = a \qquad \text{oraz} \qquad x \vee y = b.$$

Mówimy, że krata L jest *kratą ze względnymi dopełnieniami*, gdy każdy element L posiada względne dopełnienia we wszystkich odcinkach, do których należy. Łatwo zauważyć, że krata ograniczona ze względnymi dopełnieniami jest kratą z dopełnieniami ponieważ $L = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. Twierdzenie odwrotne prawdziwe jest w kratach modularnych.

Lemat 7.4. *W ograniczonej kracie modularnej, jeśli element posiada dopełnienie, to posiada również względne dopełnienie w każdym odcinku, do którego należy.*

Dowód. Niech z będzie dopełnieniem elementu x i niech $[a, b]$ będzie takim odcinkiem, że $x \in [a, b]$. Rozważmy $y = a \vee (z \wedge b)$. Zauważmy, że $y \in [a, b]$. Ponieważ krata jest modularna, to mamy

$$\begin{aligned} x \wedge y = x \wedge \big(a \vee (z \wedge b)\big) = x \wedge (a \vee z) \wedge b = \\ = \big(a \vee (z \wedge x)\big) \wedge b = (a \vee \mathbf{0}) \wedge b = a \wedge b = a. \end{aligned}$$

Dualnie pokażemy, że $x \vee y = b$. □

O tym jak branie dopełnienia w kracie ma się względem operacji kresów mówią Prawa De Morgana.

LEMAT 7.5 (Prawa De Morgana)**.** *W ograniczonej kracie dystrybutywnej, jeśli elementy a, b mają dopełnienia odpowiednio a', b', to elementy $a \wedge b$ i $a \vee b$ również posiadają dopełnienia, odpowiednio $(a \wedge b)'$ i $(a \vee b)'$ oraz*

$$(a \wedge b)' = a' \vee b', \qquad (a \vee b)' = a' \wedge b'.$$

DOWÓD. Na ćwiczeniach. □

Krata dystrybutywna z dopełnieniami nazywa się *boolowska.* Na mocy 7.3 w kracie boolowskiej każdy element posiada dokładnie jedno dopełnienie. W kratach boolowskich możemy więc mówić o *operacji dopełnienia.* Ponieważ krata dystrybutywna jest modularna, więc na mocy 7.4 krata boolowska jest kratą ze względnymi dopełnieniami.

Przekształcenie φ kraty L w kratę K o tej własności, że

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \vee \varphi(b) \qquad \text{i} \qquad \varphi(a \vee b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$$

dla $a, b \in L$ nazywamy *anty-homomorfizmem.* Jeśli takie przekształcenie jest dodatkowo bijekcją i $K = L$, to nazywamy je *anty-automorfizmem.*

STWIERDZENIE 7.6. *W kracie boolowskiej operacja dopełnienia jest inwolucyjnym anty-automorfizmem.*

DOWÓD. Niech L będzie kratą boolowską. Z definicji kraty boolowskiej oraz z 7.3 wynika, że operacja dopełnienia jest różnowartościowa. Na mocy 7.5 natomiast operacja ta jest anty-homomorfizmem. Aby wykazać, że jest ona inwolucją rozważmy $a \in L$ i przyjmijmy, że $a' = b$. Wówczas

$$a \wedge b = \mathbf{0} \qquad \text{oraz} \qquad a \vee b = \mathbf{1}.$$

Ponadto w tej kracie mamy

$$b' \wedge b = \mathbf{0} \qquad \text{oraz} \qquad b' \vee b = \mathbf{1}.$$

Ponieważ dopełnienia są jednoznaczne, to musi być $a = b'$, czyli $a = (a')'$, co oznacza, że operacja dopełnienia jest inwolucją. Stąd natychmiast widać również, że operacja dopełnienia jest surjekcją bo dla dowolnego elementu $a \in L$ wystarczy wziąć jego dopełnienie a', którego obrazem przy dopełnianianiu będzie a. □

Ważny jest również związek operacji dopełnienia w kratach boolowskich z homomorfizmami.

STWIERDZENIE 7.7. *Niech L, K będą kratami boolowskimi i niech $\varphi\colon L \to K$ będzie homomorfizmem. Wówczas dla $a \in L$ zachodzi*

$$\varphi(a') = \varphi(a)'.$$

DOWÓD. Na ćwiczeniach. □

Na koniec podamy twierdzenie o reprezentacji dla krat boolowskich.

TWIERDZENIE 7.8 (Stone)**.** *Krata jest boolowska wtw., gdy jest izomorficzna z ciałem zbiorów.*

8 Kraty półmodularne

Niech a, b będą elementami kraty L. Mówimy, że *a poprzedza b* i piszemy $a \prec b$, gdy $a < b$ i nie istnieje taki element $c \in L$, że $a < c < b$. Gdy $a \prec b$, element a nazywa się *bezpośrednim poprzednikiem* b, a element b nazywa się *bezpośrenim następnikiem* a. W literaturze (np. w [3]) można spotkać określenie, że *b pokrywa a*. Czasami wygodnie jest dopuścić równość elementów a i b, co zapisujemy jako $a \preceq b$. Formalnie więc $a \preceq b$ oznacza, że $a \prec b$ lub $a = b$.

Definicję poprzedzania w kracie możemy zapisać także nieco inaczej, na co często będziemy się powoływać. Otóż $a \prec b$ wtw., gdy $a < b$ i dla dowolnego c z założenia, że $a \leqslant c \leqslant b$ wynika $a = c$ lub $c = b$.

Mówimy, że krata L jest *półmodularna*, gdy dla dowolnych elementów $a, b, c \in L$ spełniony jest warunek

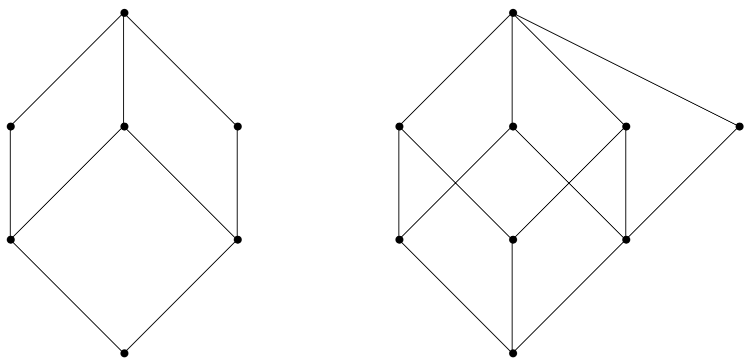
$$\text{jeśli} \quad a \prec b, \quad \text{to} \quad a \vee c \preceq b \vee c. \tag{UCC}$$

Definicja oraz nazwa powyższego warunku (ang. *Upper Covering Condition*) zaczerpnięta jest z [3]. W zasadzie w odniesieniu do kraty spełniającej (UCC) powinno stosować się termin *półmodularna z góry* (ang. *join-semimodular*). Natomiast krata spełniająca warunek

$$\text{jeśli} \quad a \prec b, \quad \text{to} \quad a \wedge c \preceq b \wedge c \tag{LCC}$$

nazywa się *półmodularna z dołu* (ang. *meet-semimodular*).

Przykłady krat polmodularnych przedstawiono na rys. 8.1.



Rysunek 8.1: Przykłady krat półmodularnych.

Ważne przykłady wywodzą się z geometrii. Sztandarowym przykładem kraty półmodularnej jest krata podprzestrzeni przestrzeni afinicznej, zwanej krótko *kratą afiniczną*. Podkreślmy tutaj, że nie jest ona modularna, gdyż para różnych prostych równoległych wraz z dowolnym punktem na jednej z nich, zbiorem pustym jako **0** i płaszczyzną rozpiętą przez te proste jako **1** tworzą pięciokąt.

Geometryczne intuicje lepiej oddaje inny warunek definiujący kraty półmodularne, oznaczany tutaj jako (Sm).

TWIERDZENIE 8.1. *Krata L jest półmodularna wtw., gdy dla dowolnych $a, b \in L$*

$$\textit{jeśli} \quad a \wedge b \prec b, \quad \textit{to} \quad a \prec a \vee b. \tag{Sm}$$

Dowód. Załóżmy, że krata L jest półmodularna, czyli spełnia (UCC). Niech $a, b \in L$ takie, że $a \wedge b \prec b$. Jako c w (UCC) weźmy a, wtedy

$$(a \wedge b) \vee a \preceq a \vee b.$$

Tak więc $a \preceq a \vee b$. Gdyby $a = a \vee b$, to $b \leqslant a$ i wówczas mielibyśmy $a \wedge b = b$ i zgodnie z założeniem na początku $b \prec b$, co nie jest możliwe.

Teraz załóżmy, że krata L spełnia (Sm). Niech $a, b, c \in L$ takie, że

$$a \prec b. \tag{29}$$

Zauważmy, że

$$a \leqslant (a \vee c) \wedge b \leqslant b,$$

a więc mamy dwa możliwe przypadki:

$$(a \vee c) \wedge b = \begin{cases} a, & \text{gdy} \quad b \nleqslant a \vee c, \\ b, & \text{gdy} \quad b \leqslant a \vee c. \end{cases}$$

W pierwszym z nich na podstawie (29) mamy $(a \vee c) \wedge b \prec b$ i po zastosowaniu (Sm) otrzymujemy

$$a \vee c \prec (a \vee c) \vee b = a \vee b \vee c = b \vee c. \tag{30}$$

W drugim przypadku mamy $b \leqslant a \vee c$. Zatem

$$b \vee c \leqslant a \vee c,$$

ale jednocześnie z (29) mamy

$$a \vee c \leqslant b \vee c,$$

tak więc

$$a \vee c = b \vee c. \tag{31}$$

Ostatecznie z (30) i (31) otrzymujemy $a \vee c \preceq b \vee c$, co kończy dowód. $\square$

Zanotujmy teraz implikację przeciwną do (Sm):

$$\text{jeśli} \quad a \prec a \vee b, \quad \text{to} \quad a \wedge b \prec b. \tag{Sm*}$$

Stosując rozumowanie dualne można twierdzenie 8.1 wzmocnić.

Twierdzenie 8.2.

(i) (UCC) $\iff$ (Sm),

(ii) (LCC) $\iff$ (Sm*).

Zauważmy, że jeśli w (Sm) za a, b weźmiemy proste z przestrzeni afinicznej, to warunek $a \wedge b \prec b$ należy interpretować w ten sposób, że proste a, b mają punkt wspólny $a \wedge b$. Istotnie, punkty i proste to podprzestrzenie przestrzeni afinicznej, a odcinek, w sensie kratowym, utworzony z punktu i prostej przez ten punkt jest dokładnie dwuelementowy. Wiemy, że w przestrzeni afinicznej dwie różne proste przecinające się rozpinają płaszczyznę, w naszym przykładzie będzie to ich kres górny $a \vee b$. Zatem (Sm) ma ładną interpretację geometryczną: jeśli dwie różne proste przecinają się, to rozpinają płaszczyznę.

Warunek (Sm*), jako dualny, interpretuje się następująco: jeśli dwie różne proste rozpinają płaszczyznę, to przecinają się. Od razu widać, że warunek ten nie jest spełniony w kracie afinicznej. Jest on natomiast spełniony w *kracie rzutowej*, tzn. kracie podprzestrzeni przestrzeni rzutowej, która jest modularna. Podkreślmy w tym miejscu, że krata rzutowa spełnia zarówno (Sm) jak i (Sm*), co łatwo widać w interpretacji geometrycznej.

Warunek podobny do (Sm), zaproponowany przez Birkhoffa, ale nieco słabszy jednak, jeszcze ładniej interpretuje się w języku geometrii, a mianowicie:

$$\text{jeśli} \quad a \wedge b \prec a, b, \quad \text{to} \quad a, b \prec a \vee b. \tag{Bi}$$

Zauważmy, że jeśli $a \wedge b$ jest punktem (lub prostą) i $a \wedge b \prec a, b$, to a, b muszą być prostymi (lub odpowiednio płaszczyznami). W tym sensie warunek (Bi) mówi więcej niż (Sm), ale jest przez to słabszy. Istotnie, z (Sm) bezpośrednio wynika (Bi), ale implikacja odwrotna prawdziwa jest tylko w kratach skończonej wysokości.

Zanotujmy również warunek dualny do (Bi):

$$\text{jeśli} \quad a, b \prec a \vee b, \quad \text{to} \quad a \wedge b \prec a, b. \tag{Bi*}$$

Tak jak należało oczekiwać, klasa krat półmodularnych obejmuje kraty modularne.

STWIERDZENIE 8.3. *Krata modularna spełnia* (UCC) *i* (LCC).

DOWÓD. Wykażemy, że krata modularna L spełnia (UCC). W tym celu niech $a, b, c \in L$. Zakładamy, że $a \prec b$. Zastosujemy twierdzenie 6.2 o izomorfiźmie do elementów $a \vee c$ oraz b. Mamy dwa odcinki:

$$X = [a \vee c, a \vee c \vee b] = [a \vee c, b \vee c],$$
$$Y = [(a \vee c) \wedge b, b].$$

Zauważmy, że $a \leqslant a \vee c$ i $a \leqslant b$, więc $a \leqslant (a \vee c) \wedge b$. Z drugiej strony $(a \vee c) \wedge b \leqslant b$. Zatem

$$a \leqslant (a \vee c) \wedge b \leqslant b.$$

Ponieważ $a \prec b$, więc z definicji relacji poprzedzania, albo

$$a = (a \vee c) \wedge b \tag{32}$$

albo

$$(a \vee c) \wedge b = b. \tag{33}$$

W pierwszym przypadku mamy $Y = [a, b]$ i z 6.2 odcinki X i Y jako kraty są izomorficzne. Stąd, porównując końce odcinków, mamy $a \vee c \prec b \vee c$ bo $a \prec b$.

W drugim przypadku po dodaniu obustronnie $a \vee c$ do równania (33) otrzymujemy $a \vee c = b \vee c$, gdyż $b \vee a = b$.

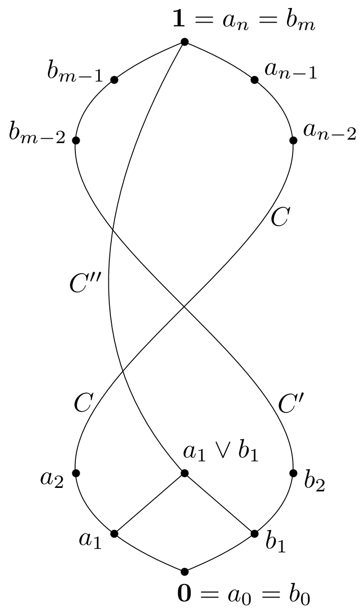
Pokazaliśmy, że $a \vee c \preceq b \vee c$. Zatem L spełnia (UCC). Dulanie wykażemy, że L spełnia (LCC). □

Dla krat skończonej wysokości udowodnimy również twierdzenie odwrotne, ale będziemy do tego potrzebować kilku dodatkowych faktów.

Niech L będzie kratą ograniczoną z dołu i niech $a \in L$. Przez $h(a)$ oznaczać będziemy długość najdłuższego, skończonego, maksymalnego łańcucha w odcinku $[\mathbf{0}, a]$. Jeśli taki łańcuch nie istnieje, to przyjmujemy $h(a) = \infty$. Wartość $h(a)$ nazywamy *wysokością* elementu a w kracie L.

TWIERDZENIE 8.4 (The Jordan-Hölder Chain Condition). *Niech L będzie kratą skończonej wysokości. Jeśli L jest półmodularna, to każde dwa maksymalne łańcuchy w L są tej samej długości.*

DOWÓD. Niech $C = \{a_0, \ldots, a_n\}$, gdzie $\mathbf{0} = a_0 < \cdots < a_n = \mathbf{1}$, będzie maksymalnym łańcuchem długości n. Indukcyjnie pokażemy, że każdy inny maksymalny łańcuch jest też długości n.



Rysunek 8.2

Jeśli $n = 1$, to dowód jest trywialny. Załóżmy teraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich krat o wysokości mniejszej niż n. Niech $C' = \{b_0, \ldots b_m\}$, gdzie $\mathbf{0} = b_0 < \cdots < b_m = \mathbf{1}$ będzie innym maksymalnym łańcuchem w L.

Jeśli $a_1 = b_1$, to wówczas w kracie $[a_1)$ maksymalny łańcuch $C \setminus \{a_0\}$ jest długości $n-1$. Tak więc maksymalny łańcuch $C' \setminus \{b_0\}$ też musi być długości $n-1$ z założenia indukcyjnego. Zatem $n = m$.

Jeśli $a_1 \neq b_1$, to wtedy niech C'' będzie maksymalnym łańcuchem w kracie $[a_1 \vee b_1)$ i niech k będzie długością C''. Z (UCC) mamy $a_1 \prec a_1 \vee b_1$ oraz $b_1 \prec a_1 \vee b_1$ bo $\mathbf{0} = a_0 = b_0 \prec a_1, b_1$. Stąd $C'' \cup \{a_1\}$ jest maksymalnym łańcuchem długości $k+1$ i $C \setminus \{a_0\}$ jest maksymalnym łańcuchem długości $n-1$ oba w odcinku $[a_1)$. Zatem $k + 1 = n - 1$. Podobnie dla pary C'' i C', skąd $k + 1 = m - 1$. Ostatecznie otrzymujemy $n - 1 = k + 1 = m - 1$, a więc $n = m$. □

W pięciokącie jak na rys. 5.1 mamy dwa maksymalne łańcuchy $C = \{o, a, b, i\}$

oraz $D = \{o, c, i\}$. Są one jednak różnej długości, a mianowicie $l(C) = 3$ i $l(D) = 2$. Nie ma sprzeczności bo pieciokąt nie jest półmodularny.

Twierdzenie 8.5. *Niech L będzie kratą skończonej wysokości i niech $a, b, c \in L$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *Krata L jest półmodularna.*

(ii) *Krata L spełnia* (Bi).

(iii) *Jeśli $a \leqslant b$ i C jest maksymalnym łańcuchem w $[a, b]$, to $\{x \vee c \colon x \in C\}$ jest maksymalnym łańcuchem w $[a \vee c, b \vee c]$.*

(iv) $h(a) + h(b) \geqslant h(a \wedge b) + h(a \vee b)$.

Dowód. (ii) $\Longrightarrow$ (i): Musimy dowieść prawdziwość warunku (UCC). Tak więc niech $a \prec b$.

Zacznijmy od przypadku, gdy $c \leqslant a$. Wówczas $a = a \vee c$ i $b = b \vee c$. Zatem $a \vee c \prec b \vee c$.

Rozważmy drugi przypadek, gdy $b \leqslant a \vee c$. W tej sytuacji $b \vee c \leqslant a \vee c$, ale ponieważ $a \prec b$, więc $a \vee c \leqslant b \vee c$. Ostatecznie $a \vee c = b \vee c$.

Teraz załóżmy, że nie zachodzi żaden z dotychczas rozpatrywanych przypadków, czyli $c \nleqslant a$ i $b \nleqslant a \vee c$. Wówczas $(a \vee c) \wedge b = a$, bo $a \leqslant (a \vee c) \wedge b \leqslant b$ oraz $a \prec b$, więc gdyby $(a \vee c) \wedge b = b$, to $b \leqslant a \vee c$, co wykluczyliśmy. Niech

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = a \vee c$$

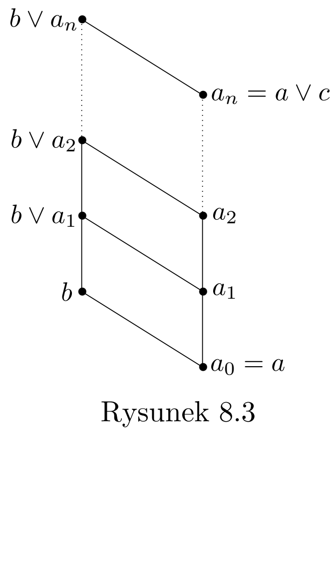
będzie maksymalnym łańcuchem w odcinku $[a, a \vee c]$. Tak więc relację $<$ powyżej możemy zastąpić $\prec$. Mamy $a \prec b$ i $a \prec a_1$. Zauważmy, że gdyby $b = a_1$, to $b \leqslant a \vee c$. Więc $a = b \wedge a_1 \prec b, a_1$ i z (ii) dostajemy $b, a_1 \prec b \vee a_1$. Stąd, ponieważ $a_1 \prec a_2$, więc

$$a_1 = (b \vee a_1) \wedge a_2 \prec b \vee a_1, a_2.$$

Ponownie z (ii) otrzymujemy

$$b \vee a_1, a_2 \prec b \vee a_1 \vee a_2 = b \vee a_2.$$

Zatem mamy sytuację jak na rys. 8.3.



Rysunek 8.3

Kontynuując dostaniemy $a_i \prec b \vee a_i$ dla $i = 0, \dots, n$ i w końcu

$$a \vee c = a_n \prec b \vee a_n = b \vee a \vee c = b \vee c,$$

co kończy dowód prawdziwości (UCC).

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Jeśli y jest następnym po x elementem w łańcuchu C, czyli gdy $x \prec y$, to z (UCC) mamy $x \vee c \preceq y \vee c$, więc nie jesteśmy w stanie nic „wcisnąć" pomiędzy dwa kolejne elementy w łańcuchu o wyrazach postaci $x \vee c$, co dowodzi, że jest on maksymalny.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Warunek (iii) implikuje (UCC), wystarczy bowiem zauważyć, że dla $a \prec b$ łańcuch C jest dwuelementowy, a więc odcinek $[a \vee c, b \vee c]$ nie może być więcej niż dwuelementowy. Dlatego też krata L jest półmodularna i prawdziwe jest w niej 8.4. Weźmy maksymalny łańcuch C w odcinku $[a \wedge b, b]$. Z 8.4 łańcuch C ma długość

$$l(C) = h(b) - h(a \wedge b). \tag{34}$$

Rozważmy łańcuch $D := \{x \vee a \colon x \in C\}$. Zgodnie z tą definicją, długość łańcucha D nie może przekraczać długości łańcucha C, tzn.

$$l(D) \leqslant l(C). \tag{35}$$

Z (iii) łańcuch D jest maksymalny w odcinku $[a, a \vee b]$, więc z 8.4

$$l(D) = h(a \vee b) - h(a), \tag{36}$$

co razem z (34) i (35) ostatecznie daje warunek (iv).

(iv) $\Longrightarrow$ (ii): Niech $x \in L$. Krata ma skończoną wysokość, więc przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na $h(x)$. Oczywiście (Bi) spełniony jest w $(\mathbf{0}]$.

Załóżmy, że (Bi) spełniony jest w $(y]$ dla wszystkich $y < x$. Wykażemy, że warunek (Bi) spełniony jest w $(x]$.

Niech $a, b \in (x]$ takie, że

$$a \wedge b \prec a, b.$$

Zauważmy, że $a \neq b$ zatem musi być $a < x$, bo $a, b \leqslant x$. To oznacza, że (Bi) zachodzi w $(a]$, a pokazaliśmy na samym początku dowodu, że (Bi) pociąga za sobą (UCC), czyli krata $(a]$ jest półmodularna. Z 8.4 mamy

$$h(a) - h(a \wedge b) = 1.$$

Na mocy (iv) dostajemy

$$h(a \vee b) \leqslant h(a) + h(b) - h(a \wedge b) = h(b) + 1,$$

co oznacza, że albo $b = a \vee b$, ale wykluczyliśmy to na samym początku, albo $b \prec a \vee b$. Podobnie wykażemy, że $a \prec a \vee b$. □

Twierdzenie 8.6. *Niech L będzie kratą skończonej wysokości i niech $a, b \in L$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *Krata L jest modularna.*

(ii) *Krata L spełnia* (UCC) *i* (LCC).

(iii) $h(a) + h(b) = h(a \wedge b) + h(a \vee b)$.

DOWÓD. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Bezpośrednio z 8.3.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Na mocy 8.5 warunek (UCC) pociąga $\geqslant$ w warunku (iii), natomiast na mocy wersji dualnej 8.5 (LCC) pociąga $\leqslant$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Przypuśćmy, że krata L nie jest modularna, tzn. zawiera pięciokąt zgodnie z 6.1. Oznaczenia elementów tego pięciokąta przyjmijmy jak na rys. 5.1. Wówczas

$$h(i) = h(b) + h(c) - h(o)$$

oraz

$$h(i) = h(a) + h(c) - h(o),$$

ale to oznacza, że $h(a) = h(b)$, co jest sprzeczne z określeniem a i b. □

Z udowodnionego przed chwilą twierdzenia oraz z 8.2 możemy teraz wywnioskować inną charakteryzację krat modularnych.

TWIERDZENIE 8.7 (Stern). *Jeśli krata skończonej wysokości spełnia warunki* (Sm) *i* (Sm*)*, to jest modularna. Każda krata modularna spełnia* (Sm) *i* (Sm*)*.*

W kracie L ograniczonej z dołu bezpośredni następnik elementu $\mathbf{0}$, tzn, takie $a \in L$, że $\mathbf{0} \prec a$, nazywamy *atomem* kraty L. Dualnie, jeśli krata L jest ograniczona z góry, to takie $a \in L$, że $a \prec \mathbf{1}$ nazywamy *koatomem* kraty L.

LEMAT 8.8. *W ograniczonej kracie półmodularnej, jeśli $a \in L$ jest atomem, to podkrata $[a, 1]$ spełnia* (LCC).

DOWÓD. CDN... □

TWIERDZENIE 8.9. *W ograniczonej kracie półmodularnej skończonej wysokości, jeśli $a \in L$ jest atomem, to podkrata $[a, 1]$ jest modularna.*

DOWÓD. Wynika wprost z 8.8 oraz 8.5????. □

Uporządkowana para elementów (a, b) w kracie L nazywa się *parą modularną*, co zapisuje się $a \mathrm{M} b$, gdy dla $x \in L$

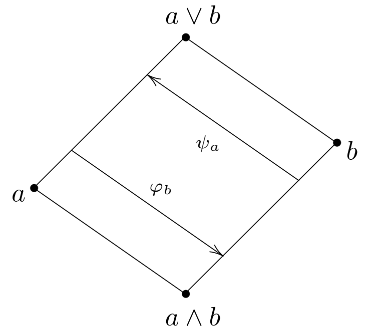
$$x \leqslant b \quad \text{implikuje} \quad x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b. \tag{37}$$

Kratę, w której relacja M jest symetryczna nazywamy *M-symetryczną*. Zgodnie z (M) krata, w której relacja M jest totalna, jest kratą modularną i na odwrót.

Niech L będzie dowolną kratą. Ustalmy dwa elementy $a, b \in L$ i rozważmy następujące odwzorowania (patrz rys. 8.4):

$$\varphi_b \colon [a, a \vee b] \longrightarrow [a \wedge b, b], \qquad \varphi_b \colon x \mapsto x \wedge b, \tag{38}$$

$$\psi_a \colon [a \wedge b, b] \longrightarrow [a, a \vee b], \qquad \psi_a \colon x \mapsto x \vee a. \tag{39}$$



Rysunek 8.4

Lemat 8.10. *Niech L będzie kratą i $a, b \in L$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) $a \,\mathrm{M}\, b$,

(ii) φ_b *jest surjekcją,*

(iii) ψ_a *jest injekcją.*

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Zakładamy, że dla a, b spełniony jest warunek (37). Niech $x \in [a \wedge b, b]$. Wówczas $a \wedge b \leqslant x \leqslant b$ i mamy

$$\varphi_b(x \vee a) = (x \vee a) \wedge b = x \vee (a \wedge b) = x,$$

co oznacza, że φ_b jest surjekcją.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Niech teraz $x, y \in [a \wedge b, b]$, $x \neq y$ i załóżmy, że $\psi_a(x) = \psi_a(y)$. Wtedy

$$\psi_a(x \vee y) = x \vee a \vee y \vee a = \psi_a(x) \vee \psi_a(y) = \psi_a(x) = \psi_a(y).$$

Ponieważ nie może być jednocześnie $x = x \vee y$ oraz $y = x \vee y$, więc albo $x \lneqq x \vee y$, albo $y \lneqq x \vee y$. Przjmijmy, że zachodzi pierwsza z nierówności. Z założenia, istnieje $z \in [a, a \vee b]$ taki, że $\varphi_b(z) = x$. Zauważmy, że $x \leqslant z$ oraz $a \leqslant z$. Stąd $x \vee a \leqslant z$. Ponieważ

$$x \vee y \leqslant x \vee y \vee a = \psi_a(x \vee y) = \psi_a(x) = x \vee a \leqslant z,$$

więc mamy $x \vee y \leqslant z$. Zatem, z wcześniejszych obserwacji oraz z tego, że $x \vee y \leqslant b$ mamy

$$x \lneqq x \vee y \leqslant z \wedge b = \varphi_b(z) = x$$

i powstaje sprzeczność.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $x \leqslant b$. Łatwo sprawdzić, że

$$\psi_a(x \vee (a \wedge b)) = x \vee (a \wedge b) \vee a = x \vee a. \tag{40}$$

Pokażemy teraz, że

$$((x \vee a) \wedge b) \vee a = x \vee a. \tag{41}$$

Ponieważ $a \leqslant x \vee a$ oraz $(x \vee a) \wedge b \leqslant x \vee a$, więc

$$((x \vee a) \wedge b) \vee a \leqslant x \vee a.$$

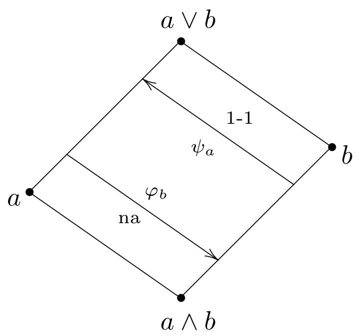
Oznaczmy przez t lewą stronę tej nierówności i zauważmy, że $(x \vee a) \wedge b) \leqslant t$ oraz $a \leqslant t$. Z uwagi na to, że $x \leqslant b$ jak założyliśm na początku i tego, że $x \leqslant x \vee a$ otrzymujemy $x \leqslant (x \vee a) \wedge b \leqslant t$. Stąd $x \vee a \leqslant t$. Zatem ostatecznie

$$\psi_a((x \vee a) \wedge b) = ((x \vee a) \wedge b) \vee a = x \vee a, \tag{42}$$

co razem z (40) i założeniem, że ψ_a jest injekcją daje równość wymaganą w warunku (37) definiującym parę modularną . □

Jak wiemy, w kracie rzutowej (kracie podprzestrzeni geometrii rzutowej) posiadanie przez dwa elementy wspólnego poprzednika jest równoważne z posiadaniem wspólnego następnika. Inaczej jest w kracie afinicznej. Tutaj posiadanie wspólnego poprzednika przez dwa elementy implikuje posiadanie wspólnego następnika, ale nie dla każdych dwóch elementów twierdzenie odwrotne jest prawdziwe. Przykładem takich dwóch elementów są proste równoległe – rozpinają płaszczyznę, ale nie przecinają się.

Wracając do 8.10, dla dowolnej kraty L i dowolnych $a, b \in L$ mamy sytuację taką jak na rys. 8.5.



Rysunek 8.5

Stwierdzenie 8.11. *W kracie półmodularnej L dla $a, b \in L$, jeśli $a \mathrm{M} b$, to*

$$a \wedge b \prec b \quad \textit{wtw., gdy} \quad a \prec a \vee b.$$

Dowód. Na mocy 8.1 w kracie L, dla $a, b \in L$ zawsze prawdziwa jest implikacja

$$\text{jeśli} \quad a \wedge b \prec b, \quad \text{to} \quad a \prec a \vee b.$$

Wystarczy dowieść tę drugą. Załóżmy zatem, że $a \prec a \vee b$ i przypuśćmy, że istnieje taki $x \in L$, że

$$a \wedge b < x < b. \tag{43}$$

Albo $\psi_a(x) = a$, albo $\psi_a(x) = a \vee b$, ale w obu przypadkach mamy sprzeczność z różnowartościowością odwzorowania ψ_a w 8.10. Nasze przypuszczenie (43) okazało się zatem fałszywe, a więc $a \wedge b \prec b$, co było do okazania. □

Literatura

[1] Bennettt, M. K. *Affine and projective geometry.* Wiley-Interscience, New York, 1995.

[2] Birkhoff, G. *Lattice theory.* American Mathematical Society, Providence, 1967.

[3] Grätzer, G. *General lattice theory.* Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, 1978.

[4] Stern, M. *Semimodular Lattices.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.