Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

Justyna Laszczyńska

Produkt Segre częściowych przestrzeni prostych, własności, struktura podprzestrzeni, automorfizmy

Praca została napisana
pod kierunkiem
dr. Mariusz Żynel

Białystok 2014

Składam serdeczne podziękowania
dr. Mariuszowi Żynelowi
za cierpliwość i niezmierną pomoc.

Justyna Laszczyńska

Spis treści

Wstęp

Jedną z typowych konstrukcji w matematyce jest produkt prosty. W algebrze bierze się produkt kartezjański zbiorów i określa się na nim operacje. W geometrii sprawa się komplikuje, ponieważ poza zbiorem punktów mamy jeszcze zbiór prostych. Imitacją produktu prostego w geometrii jest produkt Segre.

W pracy badam produkt Segre dwóch przestrzeni, ale można rozważać produkt większej ilości przestrzeni. Wiele własności produktu dwóch przestrzeni przenosi się na produkt wielu przestrzeni, dochodzą oczywiście trudności techniczne.

Celem mojej pracy było zbadanie podstawowych własności tego produktu, zbadanie struktury podprzestrzeni, oraz zbadanie grupy automorfizmów produktu Segre.

W rozdziale pierwszym zajęłam się wprowadzeniem podstawowych definicji niezbędnych w pracy oraz omówieniem kluczowego pojęcia przestrzeni prostych. Opisałam też rzutowy warunek Veblena i warunek przestrzeni gamma.

W następnym rozdziale wprowadziłam tytułowy produkt Segre dwóch częściowych przestrzeni prostych. Badanie własności tego produktu zaczełam od sprawdzenia spójności w twierdzeniu 2.5. Zachodzenie spójności zilustrowałam w przykładzie 2.6. Zbadałam też strukturę podprzestrzeni z uwzględnieniem mocnych podprzestrzeni w twierdzeniu 2.8.
Przyglądając się mocnym podprzestrzenieniom ważne jest, aby znać postać trójkątów. Postać trójkątów w produkcie Segre jest w twierdzeniu 2.7.
Hiperpłaszczyzny w produkcie Segre to zagadnienie nie takie banalne i pełna ich charakteryzacja wymaga i dodatkowych założeń i nowych technik. Dlatego ograniczam się do zacytowania gotowego wyniku z literatury. Zanim sformułowałam twierdzenie charakteryzujące analizowałam różne możliwe warianty postaci hiperpłaszczyzn w serii przykładów 2.9, 2.10, 2.11, 2.12.
Sprawdziłam prawdziwość aksjomatu Veblena w twierdzeniu 2.16 i aksjomatu przestrzeni gamma w zależności od własności składowych produktu w twierdzeniu 2.17. Podsumowując, podstawowe własności produktu Segre są ściśle związane z odpowiednimi własnościami składowych tego produktu. Dokładnie rzecz biorąc, z tego co sprawdzałam w udowodnionych twierdzeniach, produkt Segre posiada pewną własność wtedy i tylko wtedy, gdy posiadają ją również obie składowe tego produktu.

Trzeci rozdział poświęcony jest podaniu przykładów produktów Segre znanych geometrii – przestrzeni rzutowych i afinicznych. W przypadku produktu Segre przestrzeni afinicznych relację równoległości można określać na różne sposoby. W pracy opisuję kilka z nich.

Rozdział 1

Podstawowe pojęcia

1.1 Częściowe przestrzenie prostych

Zaczynamy od zdefiniowania podstawowego dla naszych dalszych rozważań pojęcia.

Rozważmy niepusty zbiór S, którego elementy dalej będziemy nazywać punktami oraz rodzinę $\mathcal{L}$ podzbiorów zbioru S, tzn. $\mathcal{L} \subseteq 2^S$, której elementy będziemy nazywać prostymi. Mówimy, że punkty $a, b \in S$, są *współliniowe* i piszemy $a \sim b$, gdy istnieje prosta $k \in \mathcal{L}$, taka że $a, b \in k$. Prostą k przez dwa różne punkty a, b oznaczamy $k = \overline{a, b}$. O prostych $k, l \in \mathcal{L}$ mówimy, że są *współpękowe*, gdy istnieje punkt $a \in S$, taki że $a \in k, l$. Struktura $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ jest *cześciową przestrzenią prostych* jeśli spełnia następujące warunki:

A1: na każdej prostej leżą co najmniej dwa punkty,

A2: przez dwa różne punkty przechodzi co najwyżej jedna prosta.

Gdy $\mathfrak{A}$ spełnia dodatkowy warunek:

A3: przez każde dwa punkty przechodzi prosta,

to wtedy o $\mathfrak{A}$ mówimy, że jest *przestrzenią prostych*.

Definicja 1.1. Mówimy, że podzbiór $X \subseteq S$ jest *podprzestrzenią* w $\mathfrak{A}$, gdy jest domknięty na prowadzenie prostych, to znaczy, że dla dowolnej prostej $l \in \mathcal{L}$ jeśli $|l \cap X| \geqslant 2$, to $l \subseteq X$.

Definicja 1.2. Podprzestrzeń X przestrzeni $\mathfrak{A}$ jest *mocna*, gdy każde dwa jej punkty są współliniowe.

Definicja 1.3. Mówimy, że parami różne punkty $a, b, c \in S$ tworzą *trójkąt* w $\mathfrak{A}$, gdy są parami współliniowe, ale nie leżą na jednej prostej. Taki trójkąt oznaczamy wówczas przez abc.

Mówimy, że trzy parami różne proste $k, l, m \in \mathcal{L}$ tworzą *trójkąt* w $\mathfrak{A}$, gdy parami przecinają się, ale nie są współpękowe. Wtedy taki trójkąt oznaczamy przez klm.

1.1.1 Spójność

Definicja 1.4. Częściowa przestrzeń prostych $\mathfrak{A}$ jest *spójna*, gdy każde dwa jej punkty można połączyć łamaną, to znaczy, jeśli $a, b \in S$, to istnieje ciąg $c_0, c_1, \ldots, c_n \in S$ taki, że

$$c_0 = a, \quad c_n = b \quad \text{i} \quad c_{i-1} \sim c_i \text{ dla } i = 1, \ldots, n.$$

Gdy przejdziemy do automorfizmów produktu Segre będziemy potrzebować podobnego, ale silniejszego warunku.

Definicja 1.5. Częściowa przestrzeń prostych $\mathfrak{A}$ jest *mocno spójna*, gdy dla każdej co najmniej dwuelementowej mocnej podprzestrzeni X i każdego punktu $a \in S$ istnieje taki ciąg mocnych podprzestrzeni $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ w $\mathfrak{A}$, że

$$Y_0 = X, \quad a \in Y_n \quad \text{i} \quad |Y_{i-1} \cap Y_i| \geqslant 2 \text{ dla } i = 1, \ldots, n.$$

Z poprzedniej definicji wynika, że $|Y_{i-1} \cap Y_i|$ jest co najmniej prostą.

Lemat 1.6. *Jeśli częściowa przestrzeń prostych jest mocno spójna, to jest spójna.*

Dowód. Załóżmy, że częściowa przestrzeń prostych $\mathfrak{A}$ jest mocno spójna. Aby wykazać, że przestrzeń $\mathfrak{A}$ jest spójna, zgodnie z definicją 1.4, weźmy dwa dowolne punkty $a, b \in S$.

Niech X to mocna podprzestrzeń, do której należy punkt a. Taka podprzestrzeń istnieje, bo $\mathfrak{A}$ jest mocno spójna, a więc punkt a jest połączalny ciągiem mocnych podprzestrzeni z dowolną prostą w $\mathfrak{A}$. Innymi słowy w $\mathfrak{A}$ nie ma punktów izolowanych.

Chcemy połączyć punkty a i b. Z definicji 1.5 wiemy, że podprzestrzeń X jest połączona ciągiem podprzestrzeni z punktem końcowym b, to znaczy istnieją mocne podprzestrzenie $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ w $\mathfrak{A}$ takie, że

$$Y_0 = X, \qquad b \in Y_n, \qquad \text{oraz} \qquad |Y_{i-1} \cap Y_i| \geqslant 2 \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Weźmy $c_i \in Y_{i-1} \cap Y_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. Zauważmy, że punkty a, oraz c_1 leżą w mocnej podprzestrzeni $X = Y_0$, a więc są współliniowe. Dalej, każde dwa punkty c_i, oraz c_{i+1} dla $i = 1, \ldots, n-1$ leżą w mocnej podprzestrzeni Y_i, a więc są współliniowe. Na koniec mamy też punkty c_n i b w Y_n, więc one też są współliniowe. Podsumowując, mamy ciąg prostych

$$\overline{a, c_1}, \quad \overline{c_1, c_2}, \ldots, \overline{c_{n-1}, c_n}, \quad \overline{c_n, b},$$

które łączą punkt a z b, co oznacza spójność $\mathfrak{A}$ zgodnie z 1.4. $\square$

1.1.2 Hiperpłaszczyzny

Mówimy, że podprzestrzeń X w $\mathfrak{A}$ jest *właściwa*, gdy jest właściwa jako podzbiór zbioru punktów S, czyli gdy $X \neq S$.

Definicja 1.7. Zbiór $H \subsetneq S$ nazywamy *hiperpłaszczyzną* w $\mathfrak{A}$, gdy H jest właściwą podprzestrzenią $\mathfrak{A}$, która z każdą prostą w $\mathfrak{A}$ ma punkt wspólny.

Z powyższej definicji wynika, że:

Stwierdzenie 1.8. *Zbiór H jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy H jest własciwym podzbiorem w $\mathfrak{A}$, oraz dla każdej prostej $l \in \mathcal{L}$, albo $l \subseteq H$, albo $|l \cap H| = 1$.*

DOWÓD. $\Rightarrow$: Niech $l \in \mathcal{L}$. Ponieważ H jest hiperpłaszczyzną, to z definicji H jest właściwą podprzestrzenią taką że $|l \cap H| \geqslant 1$. Mamy tutaj dwie możliwości:

$$\text{albo} \quad |l \cap H| \geqslant 2, \quad \text{albo} \quad |l \cap H| = 1.$$

Skoro H jest podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$, to w pierwszym przypadku mamy $l \subseteq H$, co kończy tę część dowodu.

$\Leftarrow$: Musimy pokazać po pierwsze, że H jest podprzestrzenią, a to oznacza, że H przecina każdą prostą.

Niech $l \in \mathcal{L}$. Załóżmy, że $|l \cap H| \geqslant 2$. Ponieważ albo $l \subseteq H$, albo $|l \cap H| = 1$, więc musi być $l \subseteq H$. Zatem H jest podprzestrzenią.

Dla dowolnej prostej $l \in \mathcal{L}$ wiemy, że $l \subseteq H$ lub $|l \cap H| = 1$. W obu wypadkach mamy $l \cap H \neq \emptyset$ co kończy dowód. $\square$

Gdyby w przestrzeni $\mathfrak{A}$ była określona funkcja wymiaru dla podprzestrzeni, to można by powiedzieć, że hiperpłaszczyzna, to podprzestrzeń kowymiaru 1, to znaczy, że gdy wymiar całej przestrzeni $\mathfrak{A}$ jest n, to wymiar hiperpłaszczyzny jest $n-1$.
W przestrzeniach prostych hiperpłaszczyzna to maksymalna podprzestrzeń właściwa.

Lemat 1.9. *Niech $S_0 \subseteq S$ i $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$ takie, że $\mathcal{L}_0 \subseteq 2^{S_0}$. Jeżeli H jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{A}$ i $S_0 \nsubseteq H$, to $H \cap S_0$ jest hiperpłaszczyzną w $\langle S_0, \mathcal{L}_0 \rangle$.*

DOWÓD. Załóżmy, że H jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{A}$. Aby udowodnić, że $H_0 = H \cap S_0$ jest hiperpłaszczyzną w $\langle S_0, \mathcal{L}_0 \rangle$ musimy udowodnić, że:

1. H_0 jest podprzestrzenią,

2. H_0 jest hiperpłaszczyzną.

Ad1.
Bierzemy prostą $k \in \mathcal{L}_0$ taką, że $|k \cap H_0| \geqslant 2$. Zastanówmy się czy $k \subseteq H_0$? Aby ta inkluzja była prawdziwa musi być tak, że $k \subseteq H$ oraz $k \subseteq S_0$. Ponieważ

mamy co najmniej dwa różne punkty $a, b \in k \cap H_0 = k \cap H \cap S_0$ więc w szczególności $a, b \in k \cap H$. Ale H jest podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$, a k jest prostą w $\mathfrak{A}$, zatem zgodnie z definicją podprzestrzeni mamy $k \subseteq H$. Z założenia, że proste w $\mathcal{L}_0$ są podzbiorami S_0 mamy $k \subseteq S_0$, co kończy tą część dowodu.
Ad2.
Mamy udowodnić, że $|k \cap H_0| \geqslant 1$. Zauważmy, że $k \cap H_0 = k \cap H \cap S_0 = k \cap S_0 \cap H = k \cap H$. Ponieważ k jest prostą w $\mathfrak{A}$, a H jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{A}$. Zatem z definicji hiperpłaszczyzny mamy

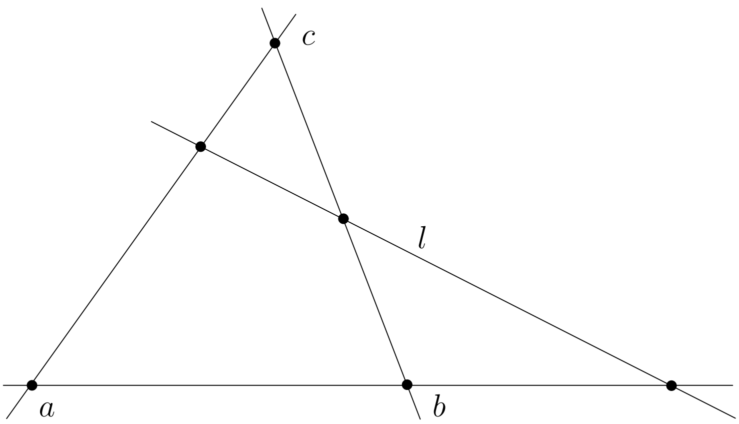
$$|k \cap H_0| = |k \cap H| \geqslant 1,$$

co kończy dowód. □

1.1.3 Rzutowy warunek Veblena

Rzutowy warunek Veblena dla częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{A}$ brzmi następująco:

PVC: Jeśli prosta l przecina dwa boki trójkąta abc w dwóch różnych punktach, to przecina trzeci bok tego trójkąta (rys. 1.1).



Rysunek 1.1: Rzutowy warunek Veblena.

1.1.4 Przestrzenie gamma

Zbiór punktów współliniowych z danym punktem a oznaczamy

$$a^{\sim} = \{x \in S : a \sim x\}. \tag{1.1}$$

Częściową przestrzenią prostych $\mathfrak{A}$ nazywamy *przestrzenią gamma*, gdy spełnia ona następujący warunek:

Γ: Jeśli a jest punktem poza prostą l w przestrzeni $\mathfrak{A}$ i a jest współliniowy z dwoma różnymi punktami na l, to a jest współliniowy z każdym punktem prostej l. Inaczej:

$$\text{jeśli } a \notin l, \text{ to } |a^{\sim} \cap l| = 0 \text{ lub } |a^{\sim} \cap l| = 1 \text{ lub } l \subseteq a^{\sim}.$$

1.2 Automorfizmy częściowych przestrzeni prostych

Definicja 1.10. Niech $\mathfrak{A}_i = \langle S_i, \mathcal{L}_i \rangle$, $i = 1, 2$, będą częściowymi przestrzeniami prostych. Odwzorowanie $f : S_1 \longrightarrow S_2$ jest *kolineacją (izomorfizmem)* $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$, gdy:

(i) f jest bijekcją,

(ii) punkty a, b, c są współliniowe w $\mathfrak{A}_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkty $f(a), f(b), f(c)$ są współliniowe w $\mathfrak{A}_2$.

Definicja 1.11. Gdy $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$, to kolineację f z 1.10 nazywamy *automorfizmem* przestrzeni $\mathfrak{A}$.

Lemat 1.12. *Przekształcenie f jest izomorfizmem $\mathfrak{A}_1$ na $\mathfrak{A}_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy:*

(i) *f jest bijekcją,*

(ii) *jeśli $l \in \mathcal{L}_1$, to $f(l) \in \mathcal{L}_2$,*

(iii) *jeśli $k \in \mathcal{L}_2$, to $f^{-1}(k) \in \mathcal{L}_1$.*

DOWÓD. $\Rightarrow$: (i) Z definicji 1.10 wynika, że odwzorowanie f jest bijekcją.

(ii) Aby udowodnić drugi podpunkt weźmy $l \in \mathcal{L}_1$ i załóżmy, że $l = \overline{a, b}$. Zauważmy z definicji 1.10, że punkty $f(a), f(b)$ są współliniowe w $\mathfrak{A}_2$. Niech $k := \overline{f(a), f(b)} \in \mathcal{L}_2$ będzie prostą łączącą punkty $f(a), f(b)$. Pokażemy, że $f(l) = k$.

Niech $c' \in f(l)$. Wtedy c' jest obrazem jakiegoś punktu $c \in l$, to znaczy, $c' = f(c)$. Punkty a, b, c leżą na prostej l więc z 1.10 również punkty $f(a), f(b), f(c)$ leżą na jednej prostej i musi to być prosta k. Zatem $c' = f(c) \in k$. Z dowolności wyboru c' mamy $f(l) \subseteq k$.

Teraz, niech $c' \in k$. Ponieważ f jest funkcją odwracalną niech więc punkt c będzie przeciwobrazem punktu c', to znaczy $c' = f(c)$. Punkty $f(a), f(b), f(c)$ są współliniowe, a więc z 1.10 punkty a, b, c też są współliniowe. Stąd punkt c musi leżeć na prostej l. To oznacza, że $c' = f(c) \in f(l)$. Tak otrzymujemy $k \subseteq f(l)$ bo punkt c' był wybrany dowolnie.

Podsumowując, $f(l) = k \in \mathcal{L}_2$.

(iii) Ponieważ f jest bijekcją, możemy przeprowadzić rozumowanie podobne do tego z pudpunktu (ii).

$\Leftarrow$: Wystarczy wykazać prawdziwość warunku (ii) w 1.10. Jeśli punkty a, b, c są współliniowe w $\mathfrak{A}_1$, to leżą na pewnej prostej $l \in \mathcal{L}_1$. Z (ii) wiemy, że $f(l) \in \mathcal{L}_2$, zatem punkty $f(a), f(b), f(c)$ leżą na prostej $f(l)$ w $\mathfrak{A}_2$. Jeśli natomiast punkty $f(a), f(b), f(c)$ są współliniowe w $\mathfrak{A}_2$, to leżą na pewnej prostej $k \in \mathcal{L}_2$. Z (iii) mamy $f^{-1}(k) \in \mathcal{L}_1$. Ponieważ $a, b, c \in f^{-1}(k)$, więc te punkty są współliniowe. $\square$

Rozdział 2

Produkt Segre

Niech $\mathfrak{M}_i = \langle S_i, \mathcal{L}_i \rangle$, $i = 1, 2$, będą częściowymi przestrzeniami prostych. Oznaczmy przez

$$S := S_1 \times S_2, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{G}_1 := \Big\{ l_1 \times \{x_2\} : l_1 \in \mathcal{L}_1, x_2 \in S_2 \Big\}, \tag{2.2}$$

$$\mathcal{G}_2 := \Big\{ \{x_1\} \times l_2 : x_1 \in S_1, l_2 \in \mathcal{L}_2 \Big\}. \tag{2.3}$$

Geometrię

$$\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2 = \langle S, \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \rangle$$

nazywamy *produktem Segre* przestrzeni $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$.

Fakt 2.1. *Produkt Segre częściowych przestrzeni prostych jest częściową przestrzenią prostych.*

Dowód. Sprawdzamy warunki z definicji częściowej przestrzeni prostych.
A1.
Niech l będzie prostą w $\mathfrak{M}$. Z definicji produktu Segre albo $l \in \mathcal{G}_1$ albo $l \in \mathcal{G}_2$. Powiedzmy, że $l = l_1 \times \{x_2\} \in \mathcal{G}_1$. Ponieważ $\mathfrak{M}_1$ jest częściową przestrzenią prostych, więc $|l_1| \geqslant 2$. Niech $a, b \in l_1$ i $a \neq b$. Zauważmy, że $(a, x_2), (b, x_2) \in l$ i $(a, x_2) \neq (b, x_2)$, co kończy dowód A1.

W drugim wypadku, gdy $l \in G_2$ postępujemy analogicznie.
A2.
Niech k, l będą prostymi w $\mathfrak{M}$ takimi, że $|k \cap l| \geqslant 2$. Zatem mamy punkty

$$a, b \in k \cap l$$

takie, $a \neq b$. Można przyjąć, że

$$a = (a_1, a_2), \qquad b = (b_1, b_2)$$

takie, że $a_1, b_1 \in S_1$, $a_2, b_2 \in S_2$.
Mamy cztery przypadki:

(1) $k = k_1 \times \{x_2\}$, $l = l_1 \times \{y_2\}$, gdzie $k_1, l_1 \in \mathcal{L}_1, x_2, y_2 \in S_2$,

(2) $k = k_1 \times \{x_2\}$, $l = \{y_1\} \times l_2$, gdzie $k_1 \in \mathcal{L}_1, l_2 \in \mathcal{L}_2, x_2 \in S_2, y_1 \in S_1$,

(3) $k = \{x_1\} \times k_2$, $l = \{y_1\} \times l_2$, gdzie $k_2, l_2 \in \mathcal{L}_2, x_1, y_1 \in S_1$,

(4) $k = \{x_1\} \times k_2$, $l = l_1 \times \{y_2\}$, gdzie $k_2 \in \mathcal{L}_2, l_1 \in \mathcal{L}_1, x_1 \in S_1, y_2 \in S_2$.

Ad. 1.
Musi być $x_2 = a_2 = y_2$ i $x_2 = b_2 = y_2$. To oznacza, że $a_2 = b_2 = x_2 = y_2$, ale $a_1 \neq b_1$. Tak więc

$$(a_1, a_2), (b_1, a_2) \in k_1 \times \{a_2\}, l_1 \times \{a_2\},$$

gdzie $a_1, b_1 \in k_1 \cap l_1$. Wiemy, że $\mathfrak{M}_1$ jest częściową przestrzeni prostych, więc $k_1 = l_1$. Stąd $k = l$.
Ad. 2.
Tutaj musi być $x_2 = a_2$, $y_2 = a_1$, $x_2 = b_2$, $y_1 = b_1$.
Zatem $a_2 = b_2$ i $a_1 = b_1$, ale to oznacza, że $a = b$, więc nie są spełnione założenia.
Pozostałe 2 przypadki dowodzi się podobnie. □

Z faktu 2.1 wynika następujący wniosek.

Wniosek 2.2. *Punkty $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ są współliniowe w $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a_1 = b_1 \quad i \quad a_2 \sim b_2 \quad albo \quad a_1 \sim b_1 \quad i \quad a_2 = b_2.$$

Fakt 2.3. *Produkt Segre nigdy nie jest przestrzenią prostych.*

Dowód. Zgodnie z warunkiem A3 definicji przestrzeni prostych trzeba wskazać takie dwa punkty a, b aby a był niewspółliniowy z b.
Weźmy $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ tak, aby $a_1 \neq b_1$ i $a_2 \neq b_2$. Z wniosku 2.2 mamy tezę, co kończy dowód. □

Twierdzenie 2.4. *Niech $X = X_1 \times X_2 \subseteq S_1 \times S_2$ takie, że $X_1 \neq \emptyset \neq X_2$. Zbiór X jest podprzestrzenią w $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy X_1,X_2 są podprzestrzeniami odpowiednio $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$.*

Dowód. $\Rightarrow$: Niech X będzie podprzestrzenią produktu Segre. Musimy sprawdzić, czy X_1,X_2 są podprzestrzeniami odpowiednio $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$. Weźmy prostą $l_1 \in \mathcal{L}_1$. Załóżmy, że

$$|l_1 \cap X_1| \geqslant 2.$$

Wówczas istnieją a_1, $b_1 \in l_1, X_1$ takie, że $a_1 \neq b_1$. Pytanie, czy $l_1 \subseteq X_1$?
Weźmy teraz $x_2 \in X_2$ i niech

$$a = (a_1, x_2) \text{ oraz } b = (b_1, x_2).$$

Zauważmy, że $a, b \in X$. Rozpatrzmy prostą

$$k = l_1 \times \{x_2\} \in \mathcal{L}_1.$$

Ponieważ $a_1, b_1 \in l_1$, więc $a, b \in k$. Ale $a, b \in X$, stąd dostajemy, że $|k \cap X| \geqslant 2$. Mamy więc, że $k \subseteq X$, bo tak jak założyliśmy X jest podprzestrzenią w $\mathfrak{M}$. A zatem $l_1 \subseteq X_1$.

Otrzymaliśmy, że X_1 jest podprzestrzenią $\mathfrak{M}_1$. Podobnie wykazuje się, że X_2 jest podprzestrzenią $\mathfrak{M}_2$.

$\Leftarrow$: Zgodnie z 1.1 niech k będzie prostą z produktu Segre $\mathfrak{M}$ taką, że

$$|k \cap X| \geqslant 2$$

i niech X_i będą podprzestrzeniami na i-tej współrzędnej. Zatem istnieją $a, b \in k, X$ takie, że $a \neq b$. Albo $k = \{x_1\} \times l_2$ albo $k = l_1 \times \{x_2\}$, gdzie $x_i \in S_i$ oraz $l_i \in \mathcal{L}_i$. Rozpatrzmy pierwszą sytuację. Wówczas

$$a = (x_1, a_2) \text{ i } b = (x_1, b_2), \text{ gdzie } a_2, b_2 \in l_2 \text{ oraz } a_2 \neq b_2.$$

Zauważmy, że $x_1 \in X_1$ oraz $a_2, b_2 \in X_2$. Ponieważ X_2 jest podprzestrzenią w $\mathfrak{M}_2$, więc $l_2 \subseteq X_2$. Teraz weźmy dowolne $c \in k$. Wtedy $c = (x_1, c_2)$, gdzie $c_2 \in l_2$. Zatem $c_2 \in X_2$, a więc $c = (x_1, c_2) \in X$. Ostatecznie otrzymujemy, że $k \subseteq X$. W przypadku prostej drugiego rodzaju rozumowanie przebiega analogicznie. $\square$

2.1 Spójność

Twierdzenie 2.5. *Produkt Segre $\mathfrak{M}$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzenie $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ są spójne.*

Dowód. $\Rightarrow$: Zakładamy, że produkt $\mathfrak{M}$ jest spójny. Musimy pokazać, że $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ są spójne. Wystarczy wykazać, że $\mathfrak{M}_1$ jest spójne, bo dowód dla $\mathfrak{M}_2$ jest analogiczny.

W takim razie, zgodnie z definicją spójności 1.4, weźmy dwa dowolne punkty w $\mathfrak{M}_1$, które musimy połączyć łamaną.

Niech $e \in S_2$. Wówczas (a, e), (b, e) są punktami z produktu $\mathfrak{M}$. Ponieważ produkt $\mathfrak{M}$ jest spójny z naszego założenia to z definicji 1.4 w $\mathfrak{M}$ istnieje ciąg punktów

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

takich, że

$$(x_0, y_0) = (a, e), \qquad (x_n, y_n) = (b, e)$$

oraz

$$(x_{i-1}, y_{i-1}) \sim (x_i, y_i)$$

dla $i = 1, \dots, n$.
Zauważmy, że z wniosku 2.2, dla każdego $i = 1, \dots, n$ mamy

$$x_{i-1} = x_i \qquad \textit{albo} \qquad x_{i-1} \sim x_i.$$

To oznacza, że na pierwszej współrzędnej naszego ciągu mam łamaną w $\mathfrak{M}_1$ łączącą punkty a, b.
$\Leftarrow$: Niech (a_1, a_2), (b_1, b_2) będą dowolnymi punktami $\mathfrak{M}$. Rozważmy punkt pośredni (b_1, a_2). Ponieważ $\mathfrak{M}_1$ jest spójna, to istnieje ciąg $x_0, \dots, x_n \in S_1$ taki, że

$$x_0 = a_1, \qquad x_n = b_1 \qquad \text{oraz} \qquad x_{i-1} \sim x_i \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, n.$$

Weźmy punkty $(x_0, a_2), (x_1, a_2), \dots, (x_n, a_2)$. Widać, że każde dwa kolejne z nich są współliniowe w $\mathfrak{M}$ tak, że

$$(x_{i-1}, a_2) \sim (x_i, a_2) \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, n.$$

Daje to nam łamaną w $\mathfrak{M}$ łączącą punkt (a_1, a_2) z (b_1, a_2).
Podobnie w $\mathfrak{M}_2$ bierzemy ciąg $y_0, y_1, ..., y_n \in S_2$ taki, że

$$y_0 = a_2, \qquad y_n = b_2 \qquad \text{oraz} \qquad y_{i-1} \sim y_i \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, n.$$

Biorąc punkty $(b_1, y_0), (b_1, y_1), ..., (b_1, y_k)$ otrzymamy łamaną w produkcie $\mathfrak{M}$, a mianowicie

$$(b_1, y_{i-1}) \sim (b_1, y_i) \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, k.$$

Ponadto $(b_1, y_0) = (b_1, a_2)$, oraz $(b_1, y_k) = (b_1, b_2)$. Biorąc łamaną:

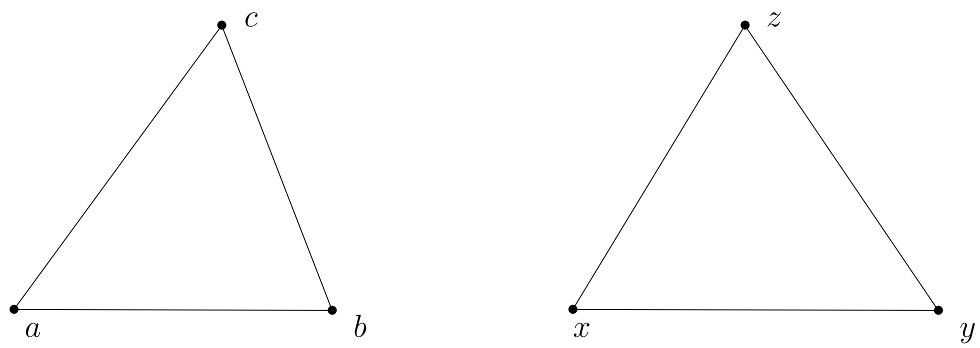
$$(a_1, a_2) = (x_0, a_2) \dots (x_n, a_2) = (b_2, a_2) = (b_1, y_0) \dots (b_1, y_k) = (b_1, b_2),$$

otrzymujemy spójność produktu $\mathfrak{M}$, co kończy dowód. □

Przykład 2.6. Weźmy dwie spójne przestrzenie prostych:

$$\mathfrak{A}_1 := \Big\langle \{a, b, c\}, \Big\{ \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\} \Big\} \Big\rangle,$$
$$\mathfrak{A}_2 := \Big\langle \{x, y, z\}, \Big\{ \{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\} \Big\} \Big\rangle,$$

czyli takie jak na rysunku 2.1

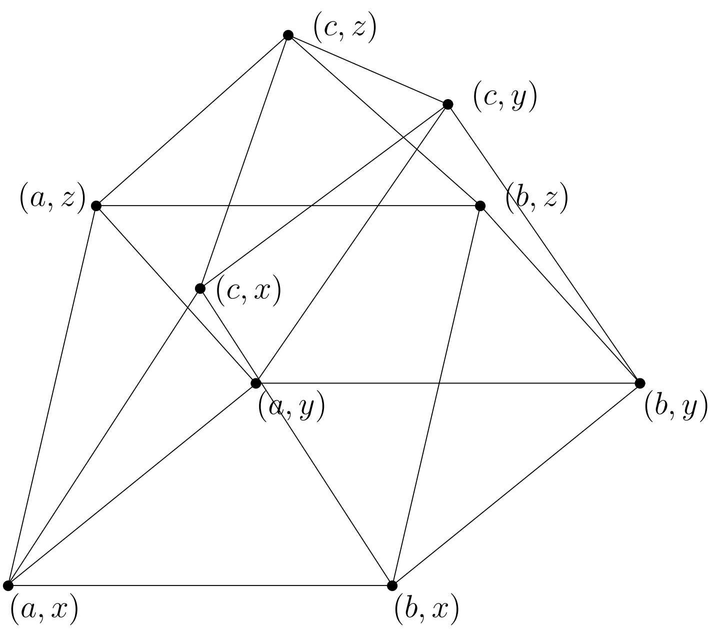


Rysunek 2.1: Spójne przestrzenie prostych $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$.

W produkcie Segre $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ uzyskamy następujące proste:

$$\begin{array}{lll}
\overline{a,b} \times \{x\}, & \overline{b,c} \times \{x\}, & \overline{c,a} \times \{x\}, \\
\overline{a,b} \times \{y\}, & \overline{b,c} \times \{y\}, & \overline{c,a} \times \{y\}, \\
\overline{a,b} \times \{z\}, & \overline{b,c} \times \{z\}, & \overline{c,a} \times \{z\}, \\
\{a\} \times \overline{x,y}, & \{a\} \times \overline{x,z}, & \{a\} \times \overline{y,z}, \\
\{b\} \times \overline{x,y}, & \{b\} \times \overline{x,z}, & \{b\} \times \overline{y,z}, \\
\{c\} \times \overline{x,y}, & \{c\} \times \overline{x,z}, & \{c\} \times \overline{y,z}.
\end{array}$$

Powstały produkt Segre $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ można przedstawić w ten przykładowy sposób jak na rysunku 2.2:



Rysunek 2.2: Produkt Segre $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$.

2.2 Trójkąty

Twierdzenie 2.7. *Punkty $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$ są wierzchołkami trójkąta w produkcie Segre $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) *albo $a_1 = b_1 = c_1$ i wtedy boki tego trójkąta to:*

$$\overline{a,b} = \{a_1\} \times \overline{a_2, b_2}, \qquad \overline{b,c} = \{a_1\} \times \overline{b_2, c_2}, \qquad \overline{a,c} = \{a_1\} \times \overline{a_2, c_2},$$

(ii) *albo $a_2 = b_2 = c_2$ i wtedy boki tego trójkąta to:*

$$\overline{a,b} = \overline{a_1, b_1} \times \{a_2\}, \qquad \overline{b,c} = \overline{b_1, c_1} \times \{a_2\}, \qquad \overline{a,c} = \overline{c_1, a_1} \times \{a_2\}.$$

Dowód. $\Rightarrow$: Niech a, b, c będą wierzchołkami trójkąta w $\mathfrak{M}$. Zatem $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$, gdzie $a_1, b_1, c_1 \in S_1$, $a_2, b_2, c_2 \in S_2$. Z definicji 1.3 wiemy, że a, b, c sa parami współliniowe. Zatem z 2.2 mamy koniunkcję następujących trzech warunków:

1. $a_1 = b_1$ lub $a_2 = b_2$,
2. $b_1 = c_1$ lub $b_2 = c_2$,
3. $c_1 = a_1$ lub $c_2 = a_2$.

Stąd $a_1 = b_1 = c_1$ lub $a_2 = b_2 = c_2$.
W pierwszym przypadku, mamy: $\neq (a_2, b_2, c_2)$. Wówczas boki trójkąta są postaci:

$$\{a_1\} \times \overline{a_2, b_2}, \{a_1\} \times \overline{b_2, c_2}, \{a_1\} \times \overline{a_2, c_2}.$$

W drugim przypadku, mamy: $\neq (a_1, b_1, c_1)$, wtedy boki trójkąta są postaci:

$$\overline{a_1, b_1} \times \{a_2\}, \overline{b_1, c_1} \times \{a_2\}, \overline{c_1, a_1} \times \{a_2\}.$$

$\Leftarrow$: Zauważmy, że punkty abc takie jak w zdaniu (i) lub (ii) tworzą trójkąt w $\mathfrak{M}$. $\square$

2.3 Mocne podprzestrzenie

Twierdzenie 2.8. *Niech $X \subseteq S$. Zbiór X jest mocną podprzestrzenią w $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:*

(i) *albo $X = \{a_1\} \times X_2$, gdzie a_1 jest punktem $\mathfrak{M}_1$ i X_2 jest mocną podprzestrzenią w $\mathfrak{M}_2$,*

(ii) *albo $X = X_1 \times \{a_2\}$, gdzie X_1 jest mocną podprzestrzenią w $\mathfrak{M}_1$ i a_2 jest punktem $\mathfrak{M}_2$.*

Dowód. $\Rightarrow$: Niech X będzie mocną podprzestrzenią. W takim razie na mocy 2.4 mamy $X = X_1 \times X_2$, gdzie X_1 jest podprzestrzenią w $\mathfrak{M}_1$ a X_2 jest podprzestrzenią w $\mathfrak{M}_2$.
Aby udowodnić twierdzenie w tą stronę trzeba dowieść, że albo $X_1 = \{a_1\}$, albo $X_2 = \{a_2\}$. Następnie udowodnić, że X_2, ewentualnie X_1, jest mocną podprzestrzenią odpowiednio w $\mathfrak{M}_2$ lub w $\mathfrak{M}_1$.
Rozważmy sytuację, gdy jednocześnie $|X_1| \geqslant 2$ i $|X_2| \geqslant 2$. Powiedzmy, że $a_1, b_1 \in X_1$ takie, że $a_1 \neq b_1$ i $a_2, b_2 \in X_2$ takie, że $a_2 \neq b_2$. Weźmy pary $a := (a_1, a_2)$ i $b := (b_1, b_2)$. Widać, że a, b są punktami w X. Ponieważ z założenia podprzestrzeń X jest mocna, więc punkty a, b muszą być współliniowe w $\mathfrak{M}$. Na mocy 2.2 musiałoby być $a_1 = b_1$, albo $a_2 = b_2$, co prowadzi do sprzeczności z założeniem o a_1, b_1 i a_2, b_2.
Morał z powyższego wynika taki, że $|X_1| = 1$, albo $|X_2| = 1$. Powiedzmy, że

$X_1 = \{a_1\}$, bo w drugim przypadku, gdy $X_2 = \{a_2\}$ dowód biegnie tak samo. Musimy pokazać, że podprzestrzeń X_2 jest mocna w $\mathfrak{M}_2$. W tym celu weźmy dwa dowolne punkty a, b z X. X jest postaci $X = \{a_1\} \times X_2$., więc mamy $a = (a_1, a_2)$, $b = (a_1, b_2)$. Podprzestrzeń X jest mocna, więc $(a_1, a_2) \sim (a_1, b_2)$ w $\mathfrak{M}$. To znaczy, że a_2, b_2 są współliniowe w $\mathfrak{M}_2$. W ten sposób pokazaliśmy, że X_2 jest mocną podprzestrzenią w $\mathfrak{M}_2$.

$\Leftarrow$: Załóżmy, że X jest postaci $X = \{a_1\} \times X_2$ jak w przypadku (i). Zauważmy, że $\{a_1\}$ jest podprzestrzenią w $\mathfrak{M}_1$, a z założenia X_2 jest podprzestrzenią w $\mathfrak{M}_2$. Tak więc z twierdzenia 2.4 wiemy, że X jest podprzestrzenią w $\mathfrak{M}$.

Aby sprawdzić, że X jest mocna, weźmy dwa dowolne punkty z X: $a = (a_1, a_2)$ i $b = (a_1, b_2)$, gdzie $a_2, b_2 \in X_2$. Ponieważ X_2 jest mocną podprzestrzenią w $\mathfrak{M}_2$, więc istnieje prosta k_2 łącząca a_2 z b_2 w $\mathfrak{M}_2$. Niech $k = \{a_1\} \times k_2$. Prosta k łączy a z b w $\mathfrak{M}$.

Rozumowanie w przypadku (ii) przebiega bardzo podobnie. □

2.4 Hiperpłaszczyzny

Przyjrzyjmy się jak mogłyby wyglądać hiperpłaszczyzny w produkcie Segre.

Przykład 2.9. Niech $H_a = \{a_1\} \times H_2$, gdzie $a_1 \in S_1$, a H_2 jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_2$. Powiedzmy jeszcze dodatkowo, że $\mathfrak{M}_1$ nie jest wiązką prosytch przez punkt a_1 czyli, że istnieje prosta k_1 w $\mathfrak{M}_1$ taka, że $a_1 \notin k_1$. Weźmy dowolny punkt $a_2 \in H_2$ i rozważmy prostą $k = k_1 \times \{a_2\}$ z produktu $\mathfrak{M}$. Zgodnie z definicją 1.7 przecięcie k i H_a powinno być niepuste tzn. $k \cap H_a \neq \emptyset$. Zobaczmy

$$k \cap H_a = (k_1 \times \{a_2\}) \cap (\{a_1\} \times H_2) = \emptyset \times \{a_2\}.$$

Zatem H_a nie jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}$.

Przykład 2.10. Niech $H_b = H_1 \times H_2$, gdzie H_i jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2$. Bierzemy dowolną prostą k_1 w $\mathfrak{M}_1$, oraz punkt a_2 w $\mathfrak{M}_2$ taki, że $a_2 \notin H_2$ (taki punkt istnieje bo hiperpłaszczyzna jest podzbiorem właściwym). Rozważmy prostą $k = k_1 \times \{a_2\}$ z produktu $\mathfrak{M}$. Zgodnie z definicją 1.7 przecięcie k i H_b powinno być niepuste tzn. $k \cap H_b \neq \emptyset$. Sprawdzamy

$$k \cap H_b = (k_1 \times \{a_2\}) \cap (H_1 \times H_2) = \{a_1\} \times \emptyset \qquad \text{lub} \qquad k \cap H_b = k_1 \times \emptyset.$$

W obu przypadkach otrzymujemy zbiór pusty. Zatem H_b nie jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}$.

Przykład 2.11. Niech $H_c = S_1 \times H_2$, gdzie H_2 jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_2$. Bierzemy prosta k_1 w $\mathfrak{M}_1$, oraz punkt a_2 w $\mathfrak{M}_2$ taki, że $a_2 \notin H_2$. Niech teraz $k = k_1 \times \{a_2\}$ będzie prostą z produktu $\mathfrak{M}$. Zgodnie z definicją 1.7 przecięcie k i H_c powinno być niepuste tzn. $k \cap H_c \neq \emptyset$. Zobaczmy

$$k \cap H_c = (k_1 \times \{a_2\}) \cap (S_1 \times H_2) = k_1 \times \emptyset,$$

ale to jest zbiór pusty. Zatem H_c nie jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}$.

Przykład 2.12. Niech $H_d = (S_1 \times H_2) \cup (H_1 \times S_2)$, gdzie H_i jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2$. Niech k będzie dowolną prostą z $\mathfrak{M}$. Mamy więc dwie możliwości:

$$k = k_1 \times \{a_2\} \qquad \text{albo} \qquad k = \{a_1\} \times k_2,$$

gdzie $k_1 \in \mathcal{L}_1$, $a_2 \in S_2$ albo $a_1 \in S_1$, $k_2 \in \mathcal{L}_2$.

Rozpatrzmy pierwszy przypadek. Zgodnie z definicją 1.7 przecięcie k i H_d powinno być niepuste, czyli $k \cap H_d \neq \emptyset$. Zweryfikujmy to

$$\begin{aligned} k \cap H_d = (k_1 \times \{a_2\}) \cap \Big((S_1 \times H_2) \cup (H_1 \times S_2)\Big) = \\ \Big((k_1 \times \{a_2\}) \cap (S_1 \times H_2)\Big) \cup \Big((k_1 \times \{a_2\}) \cap (H_1 \times S_2)\Big) = \\ \Big(k_1 \times (\{a_2\} \cap H_2)\Big) \cup \Big((k_1 \cap H_1) \times \{a_2\}\Big). \end{aligned}$$

Przekrój $\{a_2\} \cap H_2$ może być pusty, gdy $a_2 \notin H_2$, ale ponieważ H_1 jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_1$ i k_1 jest prostą w $\mathfrak{M}_1$, to $k_1 \cap H_1 \neq \emptyset$ zgodnie z definicją hiperpłaszczyzny. Dokładniej, będziemy mieli albo $k \cap H_1 = k_1$, albo $k \cap H_1 = \{a_1\}$ dla pewnego $a_1 \in S_1$. Ostatecznie $k \cap H_d \neq \emptyset$, co oznacza, że H_d jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}$. W drugim przypadku, gdy $k = \{a_1\} \times k_2$ rozumowanie jest analogiczne.

Niech H będzie hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}$. Zdefiniujmy dwie funkcje:

$$\delta_1^H : S_1 \to 2^{S_2} \qquad \delta_1^H(a_1) = \{a_2 \in S_2 : (a_1, a_2) \in H\}, \tag{2.4}$$

$$\delta_2^H : S_2 \to 2^{S_1} \qquad \delta_2^H(a_2) = \{a_1 \in S_1 : (a_1, a_2) \in H\}. \tag{2.5}$$

Lemat 2.13. *Dla $a_i \in S_i$ zbiór $\delta_i^H(a_i)$ jest podprzestrzenią w $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2$.*

DOWÓD. Niech $a_1 \in S_1$. Załóżmy, że $k_2 \in \mathcal{L}_2$ i $|k_2 \cap \delta_1^H(a_1)| \geqslant 2$. Trzeba pokazać, że $k_2 \subseteq \delta_1^H(a_1)$. Weźmy więc $a_2, b_2 \in k_2 \cap \delta_1^H(a_1)$ takie, że $a_2 \neq b_2$. Wtedy $(a_1, a_2), (a_1, b_2) \in H$ z (2.4). Mamy $(a_1, a_2), (a_1, b_2) \in (\{a_1\} \times k_2) =: k$. Tak więc $k \subseteq H$, bo H to podprzestrzeń. Niech teraz $x_2 \in k_2$, czyli $(a_1, x_2) \in k$. Więc mamy $(a_1, x_2) \in H$, bo $k \subseteq H$. Zatem $x_2 \in \delta_1^H(a_1)$ z (2.4). Z dowolności wyboru x_2 mamy $k_2 \subseteq \delta_1^H(a_1)$, co kończy dowód. □

Lemat 2.14. *Dla dowolnych $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$ mamy*

$$\{a_1\} \times \delta_1^H(a_1) \subseteq H \quad \textit{oraz} \quad \delta_2^H(a_2) \times \{a_2\} \subseteq H.$$

DOWÓD. Niech $x \in \{a_1\} \times \delta_1^H(a_1)$. Pokażemy, że $x \in H$. Mamy $x = (a_1, a_2)$. Ta para należy do H z definicji $\delta_1^H(a_1)$ w (2.4). Więc $\{a_1\} \times \delta_1^H(a_1) \subseteq H$. W przypadku $\delta_2^H(a_2) \times \{a_2\}$ jest analogicznie, co kończy dowód. □

Twierdzenie 2.15. *Niech $H \subseteq S$. Zbiór H jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) *dla każdego $a_1 \in S_1$ albo $\delta_1^H(a_1)$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_2$ albo $\delta_1^H(a_1) = S_2$, oraz*

(ii) *dla każdego* $a_2 \in S_2$ *albo* $\delta_2^H(a_2)$ *jest hiperpłaszczyzną w* $\mathfrak{M}_1$ *albo* $\delta_2^H(a_2) = S_1$*, oraz*

(iii) $H \neq S_1 \times S_2 = S$.

Dowód. $\Rightarrow$: Niech H będzie hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}$ i $a_1 \in S_1$. Oznaczamy $X_2 := \delta_1^H(a_1)$. Załóżmy, że $X_2 \neq S_2$. Trzeba pokazać, że X_2 jest hiperpłaszczyzna w $\mathfrak{M}_2$. Weźmy zatem dowolną prostą k_2 w $\mathfrak{M}_2$ i dowiedźmy, że $k_2 \cap X_2 \neq \emptyset$.

Weźmy prostą $k = \{a_1\} \times k_2$ w $\mathfrak{M}$. Skoro H jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}$, więc $k \cap H \neq \emptyset$. To znaczy, że istnieje takie $a_2 \in k_2$ że $(a_1, a_2) \in k \cap H$. Skoro $(a_1, a_2) \in H$, więc z (2.4) $a_2 \in \delta_1^H(a_1) = X_2$. Z tego wynika, że $a_2 \in k_2 \cap X_2$. Dla δ_2^H dowód przebiega jak wyżej.

Mamy, że $H \neq S$ bo H jest hiperpłaszczyzną, więc jest podprzestrzenią właściwą w $\mathfrak{M}$, co kończy dowód w tę stronę.

$\Leftarrow$: Pokażemy, że H jest podprzestrzenią.Weźmy dowolną prostą k z $\mathfrak{M}$ taką, że $|k \cap H| \geqslant 2$. To znaczy istnieją punkty $a, b \in k \cap H$ takie, że $a \neq b$. Musimy pokazać, że $k \subseteq H$. Powiedzmy, że $k = \{a_1\} \times k_2$, gdzie $a_1 \in S_1$, $k_2 \in \mathcal{L}_2$. Wówczas $a = (a_1, a_2)$, $b = (a_1, b_2)$, oraz $a_2, b_2 \in k_2$. Z założenia $\delta_1^H(a_1)$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{M}_2$ lub $\delta_1^H(a_1) = S_2$. Ponieważ $(a_1, a_2) \in H$ i $(a_1, b_2) \in H$, więc $a_2, b_2 \in \delta_1^H(a_1)$. Mamy więc $|\delta_1^H(a_1) \cap k_2| \geqslant 2$, bo $a_2 \neq b_2$. Ale z lematu (2.4) $\delta_1^H(a_1)$ jest zawsze podprzestrzenią w $\mathfrak{M}_2$. A więc $k_2 \subseteq \delta_1^H(a_1)$. Zauważmy, że $\{a_1\} \times \delta_1^H(a_1) \subseteq H$. Mamy

$$k = \{a_1\} \times k_2 \subseteq \{a_1\} \times \delta_1^H(a_1) \subseteq H,$$

co kończy tą część dowodu, bo dla $k = k_1 \times \{a_2\}$, gdzie $k_1 \in \mathcal{L}_1$ i $a_1 \in S_2$ rozumowanie jest takie samo.

Musimy pokazać, że dla dowolnej prostej k z $\mathfrak{M}$ przekrój $k \cap H$ jest niepusty. Niech $k = \{a_1\} \times k_2$, gdzie $a_1 \in S_1$, $k_2 \in \mathcal{L}_2$. Wiemy, że $\delta_1^H(a_1)$ jest hiperpłaszczyzną H_2 w $\mathfrak{M}_2$, albo $\delta_1^H(a_1) = S_2$.

Rozpatrzmy pierwszą możliwość. Wówczas $k_2 \cap H_2 \neq \emptyset$. Weźmy $a_2 \in k_2 \cap H_2$. Mamy więc $(a_1, a_2) \in k$ i $(a_1, a_2) \in H$ z definicji δ_1^H. W takim razie $k \cap H \neq \emptyset$.

Rozpatrzmy drugą możliwość. Wówczas $k_2 \cap S_2 = k_2 \neq \emptyset$. Weźmy dowolne $a_2 \in k_2$. Więc mamy, że $(a_1, a_2) \in k$ i $(a_1, a_2) \in H$ z definicji δ_1^H. W przypadku, gdy $k = k_1 \times \{a_2\}$ dowód przebiega analogicznie. Tak więc dowód jest zakończony. $\square$

2.5 Warunek Veblena

Twierdzenie 2.16. *Produkt Segre* $\mathfrak{M}$ *spełnia warunek Veblena wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzenie* $\mathfrak{M}_1$ *i* $\mathfrak{M}_2$ *spełniają warunek Veblena.*

Dowód. $\Rightarrow$: Rozważmy przestrzeń $\mathfrak{M}_1$ i weźmy tam trójkąt $a_1 b_1 c_1$ oraz prostą l_1, która przecina dwa jego boki $\overline{a_1, c_1}$ i $\overline{b_1, c_1}$ w dwóch różnych punktach odpowiednio x_1, y_1. Niech a_2 będzie punktem z $\mathfrak{M}_2$ i niech

$$a=(a_1,a_2),\quad b=(b_1,a_2),\quad c=(c_1,a_2),\quad x=(x_1,a_2),\quad y=(y_1,a_2).$$

Na mocy 2.7 punkty a,b,c tworzą trójkąt w $\mathfrak{M}$. Zauważmy też, że prosta $l=l_1\times\{a_2\}$ przecina boki $\overline{a,c}$ i $\overline{b,c}$ trójkąta abc w punktach x,y. Ponieważ $\mathfrak{M}$ jest Vablenowska, to l przecina bok $\overline{a,b}$ w pewnym punkcie z. Więc $z=(z_1,a_2)$, gdzie z_1 jest punktem z $\mathfrak{M}_1$, oraz $z_1\in\overline{a_1,b_1}$. To oznacza, że $\mathfrak{M}_1$ spełnia warunek Veblena.

$\Leftarrow$: Niech a,b,c będą wierzchołkami trójkąta w $\mathfrak{M}$. Zatem z 2.7 mamy dwa przypadki:

1. $a_1=b_1=c_1$ i boki trójkąta wyglądają następująco

$$\{a_1\}\times\overline{a_2,b_2},\qquad\{a_1\}\times\overline{b_2,c_2},\qquad\{a_1\}\times\overline{a_2,c_2},$$

2. $a_2=b_2=c_2$ i wtedy boki tego trójkąta to

$$\overline{a_1,b_1}\times\{a_2\},\qquad\overline{b_1,c_1}\times\{a_2\},\qquad\overline{c_1,a_1}\times\{a_2\}.$$

Ad. 1.
Niech l będzie prostą przecinającą dwa boki trójkąta abc w dwóch różnych punktach x,y. Bez zmniejszenia ogólności możemy przypuścić, że $x\in\overline{a,c}$ i $y\in\overline{b,c}$. To oznacza, że

$$x=(a_1,x_2),\qquad y=(a_1,y_2),$$

gdzie $x_2\in\overline{a_2,c_2}$ i $y_2\in\overline{b_2,c_2}$, oraz $x_2\neq y_2$. Wówczas $l=\{a_1\}\times\overline{x_2,y_2}$. Mamy znaleźć punkt przecięcia prostej l z bokiem $\overline{a,b}$. Zauważmy, że w $\mathfrak{M}_2$ prosta $\overline{x_2,y_2}$ przecina dwa boki trójkąta $a_2b_2c_2$ w dwóch różnych punktach, a mianowicie w x_2 i y_2. Ponieważ $\mathfrak{M}_2$ jest Veblenowska, więc w $\mathfrak{M}_2$ instnieje punkt z_2 taki, że

$$z_2\in\overline{x_2,y_2}\quad i\quad z_2\in\overline{a_2,b_2}.$$

Niech $z=(a_2,z_2)$. Z auważmy, że l przecina $\overline{a,b}$ w punkcie z, co kończy dowód w przypadku 1.
Ad. 2.
W tym przypadku dowód przebiega analogicznie. $\square$

2.6 Przestrzenie gamma

Twierdzenie 2.17. *Produkt Segre $\mathfrak{M}$ spełnia warunek Γ wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzenie $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ spełniają warunek Γ.*

DOWÓD. $\Rightarrow$: W $\mathfrak{M}_1$ weźmy punkt a_1 i prostą l_1 takie, że $a_1 \notin l_1$. Chcemy pokazać, że $\mathfrak{M}_1$ spełnia Γ, więc przypuśćmy, że są proste k_1, m_1 przechodzące przez punkt a_1 i przecinające prostą l_1. Musimy pokazać, że dla każdego punktu x_1 z prostej l_1 istnieje prosta w $\mathfrak{M}_1$ łącząca x_1 z a_1. Niech

$$a = (a_1, a_2), \quad l = l_1 \times \{a_2\}, \quad k = k_1 \times \{a_2\}, \quad m = m_1 \times \{a_2\}, \quad x = (x_1, a_2)$$

dla dowolnego $a_2 \in S_2$. Zauważmy, że

$$x \in l, \qquad a \notin l, \qquad a \in k, m \qquad i \qquad l \cap k \neq \emptyset \neq l \cap m.$$

Zatem l, k, m są bokami trójkąta w produkcie $\mathfrak{M}$. Z założenia, że $\mathfrak{M}$ spełnia warunek Γ mamy prostą łączącą punkt x z punktem a. Musi być zatem a_1 współliniowe z x_1 w $\mathfrak{M}_1$, co kończy dowód dla $\mathfrak{M}_1$.

Odpowiednio dobierając indeksy pakażemy, że również w przestrzeni $\mathfrak{M}_2$ spełniony jest warunek Γ.

$\Leftarrow$: Niech a i l będą punktem i prostą z $\mathfrak{M}$ takimi, że $a \notin l$. Ponieważ mamy dowieść warunek Γ, to założymy dodatkowo, że są dwie proste k_1 i k_2 przechodzące przez punkt a i przecinające prostą l. W takim razie mamy trójkąt o bokach k_1, k_2, l. Zatem z 2.7 mamy dwie możliwości:

1. $a = (a_1, a_2)$, oraz
$$k_1 = \{a_1\} \times \overline{a_2, b_2}, \qquad l = \{a_1\} \times \overline{b_2, c_2}, \qquad k_2 = \{a_1\} \times \overline{a_2, c_2},$$
gdzie $a_1 \in S_1$, $a_2, b_2, c_2 \in S_2$,
2. $a = (a_1, a_2)$, oraz
$$k_1 = \overline{a_1, b_1} \times \{a_2\}, \qquad l = \overline{b_1, c_1} \times \{a_2\}, \qquad k_2 = \overline{c_1, a_1} \times \{a_2\},$$
gdzie $a_1, b_1, c_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$.

Ad. 1.
Aby przestrzeń $\mathfrak{M}$ spełniała warunek Γ musimy pokazać, że dla dowolnego punktu $x \in l$ będzie taka prosta, która połączy x z a. Weźmy więc punkt x na prostej l różny od b, c. Zatem

$$x = (a_1, x_2), \text{ gdzie } x_2 \in \overline{b_2, c_2}.$$

W tej sytuacji mamy w $\mathfrak{M}_2$ trójkąt o wierzchołkach a_2, b_2, c_2 i punkt x_2 na boku $\overline{b_2, c_2}$. Z uwagi na to, że $\mathfrak{M}_2$ spełnia Γ mamy prostą łączącą a_2 z x_2. Weźmy więc

$$\{a_1\} \times \overline{a_2, x_2} =: m.$$

Widać, że m jest prostą w $\mathfrak{M}$ łączącą punkt a z x, co należało wykazać.

Ad. 2.
Analogicznie. $\square$

2.7 Automorfizmy

Zgodnie z przyjętą w 1.10 i 1.11 definicją automorfizm produktu Segre $\mathfrak{M}$ to bijekcja $f\colon S_1 \times S_2 \longrightarrow S_1 \times S_2$ zachowująca współliniowość i niewspółliniwość punktów.

Stwierdzenie 2.18. *Jeśli* $f_1 \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}_1)$ *i* $f_2 \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}_2)$ *to* $f = (f_1, f_2)$ *jest automorfizmem produktu Segre* $\mathfrak{M}$.

DOWÓD. Aby dowieść, że f jest automorfizmem przestrzeni $\mathfrak{M}$, zgodnie z definicją 1.10, musimy pokazać, że f jest bijekcją i dowolne punkty a, b, c są współliniowe w $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ich obrazy $f(a), f(b), f(c)$ są współliniowe w $\mathfrak{M}$.

Pokażemy najpierw, że f jest iniekcją. W tym celu załóżmy, że $f(a) = f(b)$ dla punktów a, b z $\mathfrak{M}$. Wtedy

$$a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in S_1 \times S_2,$$

oraz

$$\big(f_1(a_1), f_2(a_2)\big) = f(a) = f(b) = \big(f_1(b_1), f_2(b_2)\big).$$

Stąd $f_1(a_1) = f_1(b_1)$ i $f_2(a_2) = f_2(b_2)$. Ale f_1 i f_2 są bijekcjami, więc $a_1 = b_1$ i $a_2 = b_2$, co oznacza, że $a = b$.

Trzeba teraz pokazać, że f jest surjekcją. Niech $b = (b_1, b_2)$ będzie punktem z $\mathfrak{M}$. Szukamy punktu a w $\mathfrak{M}$ takiego, że $f(a) = b$. Ponieważ f_1 i f_2 to surjekcje, więc weźmy takie punkty a_1, a_2, że

$$f_1(a_1) = b_1 \qquad \text{oraz} \qquad f_2(a_2) = b_2.$$

Szukany punkt a to para (a_1, a_2), bo

$$f(a) = \big(f_1(a_1), f_2(a_2)\big) = (b_1, b_2).$$

Załóżmy teraz, że mamy w $\mathfrak{M}$ współliniowe punkty a, b, c. To znaczy, że

$$a = (a_1, a_2), \qquad b = (a_1, b_2), \qquad c = (a_1, c_2)$$

i punkty a_2, b_2, c_2 są współliniowe w $\mathfrak{M}_2$, albo

$$a = (a_1, a_2), \qquad b = (b_1, a_2), \qquad c = (c_1, a_2)$$

i punkty a_1, b_1, c_1 sa współliniowe w $\mathfrak{M}_1$. Rozważmy pierwszy przypadek. Ponieważ f_2 jest automorfizmem przestrzeni $\mathfrak{M}_2$, to punkty $f_2(a_2)$, $f_2(b_2)$, $f_2(c_2)$ są współliniowe w $\mathfrak{M}_2$. To oznacza, że punkty

$$f(a) = \big(f_1(a_1), f_2(a_2)\big), \quad f(b) = \big(f_1(a_1), f_2(b_2)\big), \quad f(c) = \big(f_1(a_1), f_2(c_2)\big)$$

są współliniowe w $\mathfrak{M}$. W drugim przypadku jest analogicznie.

Teraz załóżmy, że $f(a), f(b), f(c)$ są współliniowe w $\mathfrak{M}$ dla pewnych punktów a, b, c z $\mathfrak{M}$. Przyjmijmy, że

$$a = (a_1, a_2), \qquad b = (b_1, b_2), \qquad c = (c_1, c_2),$$

gdzie $a_1, b_1, c_1 \in S_1$, $a_2, b_2, c_2 \in S_2$. Wtedy

$$f(a) = \Big(f_1(a_1), f_2(a_2)\Big), \quad f(b) = \Big(f_1(b_1), f_2(b_2)\Big), \quad f(c) = \Big(f_1(c_1), f_2(c_2)\Big).$$

Z założenia, że $f(a), f(b), f(c)$ leżą na jednej prostej, z wniosku 2.2, mamy jeden z dwóch przypadków:

1. $f_1(a_1) = f_1(b_1) = f_1(c_1)$ oraz $f_2(a_2), f_2(b_2), f_2(c_2)$ leżą na jednej prostej w $\mathfrak{M}_2$, albo
2. $f_2(a_2) = f_2(b_2) = f_2(c_2)$ oraz $f_1(a_1), f_1(b_1), f_1(c_1)$ leżą na jednej prostej w $\mathfrak{M}_1$.

Rozważmy pierwszy z nich.

Ponieważ f_1 jest automorfizmem $\mathfrak{M}_1$, więc $a_1 = b_1 = c_1$. Ponieważ f_2 jest automorfizmem $\mathfrak{M}_2$ to a_2, b_2, c_2 leżą na jednej prostej z definicji kolineacji 1.10. Zatem a, b, c leżą na jednej prostej $\mathfrak{M}$.

W drugim przypadku postępujemy analogicznie.

□

Stwierdzenie 2.19. *Jeśli g_1 jest kolineacją $\mathfrak{M}_1$ na $\mathfrak{M}_2$ i g_2 jest kolineacją $\mathfrak{M}_2$ na $\mathfrak{M}_1$, to $f = (g_2, g_1)$ jest automorfizmem produktu Segre $\mathfrak{M}$.*

Dowód. Aby dowieść, że f jest automorfizmem przestrzeni $\mathfrak{M}$, zgodnie z definicją 1.10, musimy pokazać, że f jest bijekcją i dowolne punkty a, b, c są współliniowe w $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ich obrazy $f(a), f(b), f(c)$ są współliniowe w $\mathfrak{M}$.

W tym przypadku mamy

$$f(a_1, a_2) = (g_2(a_2), g_1(a_1))$$

dla $(a_1, a_2) \in S_1 \times S_2$.

Pokażemy najpierw, że f jest iniekcją. W tym celu załóżmy, że $f(a) = f(b)$ dla punktów a, b z $\mathfrak{M}$. Wtedy

$$a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in S_1 \times S_2,$$

oraz

$$\Big(g_2(a_2), g_1(a_1)\Big) = f(a) = f(b) = \Big(g_2(b_2), g_1(b_1)\Big).$$

Stąd $g_2(a_2) = g_2(b_2)$ i $g_1(a_1) = g_1(b_1)$. Ale g_2 i g_1 są bijekcjami, więc $a_1 = b_1$ i $a_2 = b_2$, co oznacza, że $a = b$.

Trzeba teraz pokazać, że f jest surjekcją. Niech $b = (b_1, b_2)$ będzie punktem z $\mathfrak{M}$. Szukamy punktu a w $\mathfrak{M}$ takiego, że $f(a) = b$. Ponieważ g_1 i g_2 to surjekcje, więc weźmy takie punkty $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$, że

$$g_2(a_2) = b_1 \qquad \text{oraz} \qquad g_1(a_1) = b_2.$$

Szukany punkt a to para (a_1, a_2), bo wówczas

$$f(a) = \Big(g_2(a_2), g_1(a_1)\Big) = (b_1, b_2).$$

Załóżmy teraz, że mamy w $\mathfrak{M}$ współliniowe punkty a, b, c. Stąd mamy dwa przypadki: albo

$$a = (a_1, a_2), \qquad b = (a_1, b_2), \qquad c = (a_1, c_2)$$

i punkty a_1, b_1, c_1 są współliniowe w $\mathfrak{M}_1$, albo

$$a = (a_1, a_2), \qquad b = (b_1, a_2), \qquad c = (c_1, a_2)$$

i punkty a_2, b_2, c_2 sa współliniowe w $\mathfrak{M}_2$. Rozważmy pierwszy z nich. Ponieważ g_1 jest kolineacją przestrzeni $\mathfrak{M}_1$ na $\mathfrak{M}_2$, to punkty $g_1(a_1)$, $g_1(b_1)$, $g_1(c_1)$ są współliniowe w $\mathfrak{M}_2$. To oznacza, że punkty

$$f(a) = \Big(g_2(a_2), g_1(a_1)\Big), \quad f(b) = \Big(g_2(a_2), g_1(b_1)\Big), \quad f(c) = \Big(g_2(a_2), g_1(c_1)\Big)$$

są współliniowe w $\mathfrak{M}$. W drugim przypadku jest analogicznie.

Teraz załóżmy, że $f(a), f(b), f(c)$ są współliniowe w $\mathfrak{M}$ dla pewnych punktów a, b, c z $\mathfrak{M}$. Przyjmijmy, że

$$a = (a_1, a_2), \qquad b = (b_1, b_2), \qquad c = (c_1, c_2),$$

gdzie $a_1, b_1, c_1 \in S_1$ oraz $a_2, b_2, c_2 \in S_2$. Wtedy

$$f(a) = \Big(g_2(a_2), g_1(a_1)\Big), \quad f(b) = \Big(g_2(b_2), g_1(b_1)\Big), \quad f(c) = \Big(g_2(c_2), g_1(c_1)\Big).$$

Z założenia, że $f(a), f(b), f(c)$ leżą na jednej prostej i z wniosku 2.2 mamy jeden z dwóch przypadków:

1. $g_2(a_2) = g_2(b_2) = g_2(c_2)$ oraz $g_1(a_1), g_1(b_1), g_1(c_1)$ leżą na jednej prostej w $\mathfrak{M}_2$, albo

2. $g_1(a_1) = g_1(b_1) = g_1(c_1)$ oraz $g_2(a_2), g_2(b_2), g_2(c_2)$ leżą na jednej prostej w $\mathfrak{M}_1$.

Rozważmy pierwszy.

Ponieważ g_2 jest kolineacją $\mathfrak{M}_2$ na $\mathfrak{M}_1$, więc $a_2 = b_2 = c_2$. Ponieważ g_1 jest kolineacją $\mathfrak{M}_1$ na $\mathfrak{M}_2$ to punkty a_1, b_1, c_1 też leżą na jednej prostej z definicji kolineacji 1.10. Zatem punkty a, b, c leżą na jednej prostej $\mathfrak{M}$. W drugim przypadku postępujemy analogicznie.

$\square$

Nie ma innych automorfizmów produktu Segre $\mathfrak{M}$ poza tymi wymienionymi w 2.18 i 2.19. Dowód tego twierdzenia jest jednak trudny i wymaga dodatkowych założeń o produkcie. Pełny dowód postaci automorfizmów produktu Segre znajduje się w pracy [2]. Tutaj przytaczamy tylko wynik.

Twierdzenie 2.20 (Naumowicz, Prażmowski [2])**.** *Jeśli* $\mathfrak{M}_1$ *i* $\mathfrak{M}_2$ *są mocno spójnymi częściowymi przestrzeniami prostych i* f *jest automorfizmem produktu Segre* $\mathfrak{M}$*, to*

(i) *albo istnieją takie automorfizmy* $f_1 \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}_1)$, $f_2 \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}_2)$, *że* $f = (f_1, f_2)$,

(ii) *albo istnieją takie kolineacje* g_1 *z* $\mathfrak{M}_1$ *na* $\mathfrak{M}_2$ *oraz* g_2 *z* $\mathfrak{M}_2$ *na* $\mathfrak{M}_1$, *że* $f = (g_2, g_1)$.

Rozdział 3

Przykłady

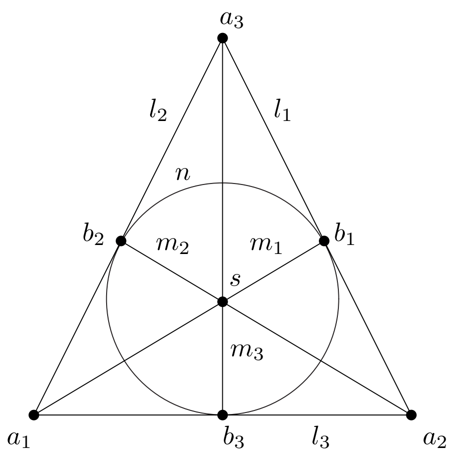
3.1 Produkt Segre przestrzeni rzutowych

Definicja 3.1. Przestrzeń prostych $\mathfrak{P} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ nazywamy *przestrzenią rzutową*, gdy:

(i) na każdej prostej z $\mathfrak{P}$ leżą przynajmniej trzy punkty oraz

(ii) $\mathfrak{P}$ spełnia rzutowy warunek Veblena.

Przykład najmniejszej nietrywialnej płaszczyzny rzutowej to płaszczyzna Fano na rysunku 3.1.



Rysunek 3.1: Rzutowa płaszczyzna Fano.

Powyższą płaszczyznę Fano można przedstawić jako rzutową płaszczyznę analityczną nad ciałem Z_2. Konstrukcja jest następująca. Bierzemy dowolną przestrzeń wektorową V nad ciałem F, byle $\dim(V) \geqslant 3$. Przez $\mathrm{Sub}_k(V)$ oznaczamy zbiór wszystkich k-wymiarowych podprzestrzeni w V. Wtedy struktura incydencyjna

$$\mathbf{P}(V) = \langle \mathrm{Sub}_1(V), \mathrm{Sub}_2(V) \rangle,$$

w której punktami są 1-wymiarowe podprzestrzenie, a prostymi są 2-wymiarowe podprzestrzenie V, to analityczna przestrzenią rzutowa. Gdy $\dim(V) = 3$ i $F = \mathbb{Z}_2$, to $\mathbf{P}(V)$ jest płaszczyzną Fano.

Stwierdzenie 3.2. *Produkt Segre przestrzeni rzutowych jest spójną weblenowską przestrzenią gamma.*

DOWÓD. Wynika to z 3.1, 2.5, 2.16 i z 2.17. □

3.2 Produkt Segre przestrzeni afinicznych

Niech $\langle S, \mathcal{L}\rangle$ będzie częściową przestrzenią prostych. Rozważmy binarną relację $\parallel \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ na zbiorze prostych. Nazywamy ją relacją *rónwoległości*, gdy jest ona relacją równoważności, to znaczy:

R1: dla każdej prostej $k \in \mathcal{L}$ zachodzi $k \parallel k$,

R2: dla prostych $k, l \in \mathcal{L}$ jeśli $k \parallel l$, to $l \parallel k$,

R3: dla prostych $k, l, m \in \mathcal{L}$ jeśli $k \parallel l$ oraz $l \parallel m$, to $k \parallel m$,

oraz gdy spełnione są następujące dwa warunki Euklidesa:

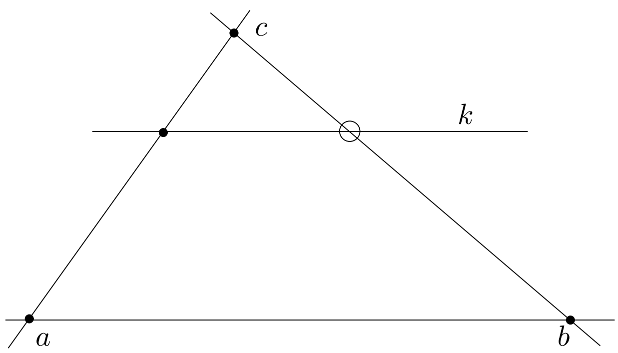
E1: dla prostych $k, l \in \mathcal{L}$ jeśli $k \parallel l$ oraz $k \cap l \neq \emptyset$, to $k = l$,

E2: dla każdej prostej $k \in \mathcal{L}$ i każdego punktu $a \in S$ istnieje taka prosta $l \in \mathcal{L}$, że $a \in l \parallel k$.

Strukturę $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, \parallel\rangle$ nazywamy *częściową przestrzenią prostych z równoległością*, gdy $\langle S, \mathcal{L}\rangle$ jest częściową przestrzenią prostych, a relacja $\parallel$ jest relacją równoległości na $\mathcal{L}$.

Afiniczny warunek Veblena dla częściowej przestrzeni prostych z równoległością $\mathfrak{A}$ brzmi następująco:

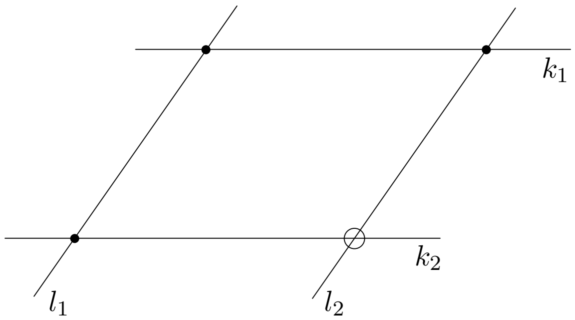
AVC: Niech punkty a, b, c tworzą trójkąt w $\mathfrak{A}$. Jeśli prosta $k \in \mathcal{L}$ przecina bok $\overline{a, c}$ i $k \parallel \overline{a, b}$, to k przecina bok $\overline{b, c}$ (rys. 3.2).



Rysunek 3.2: Afiniczny warunek Veblena.

Warunek uzupełniania do równoległoboku dla częściowej przestrzeni prostych z równoległością $\mathfrak{A}$ brzmi następująco:

PCC: Niech $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathcal{L}$. Jeśli prosta k_1 przecina proste l_1 i l_2, prosta l_1 przecina proste k_1 i k_2 oraz $k_1 \parallel k_2$ i $l_1 \parallel l_2$, to k_2 przecina l_2 (rys. 3.4).



Rysunek 3.3: Warunek uzupełniania do równoległoboku.

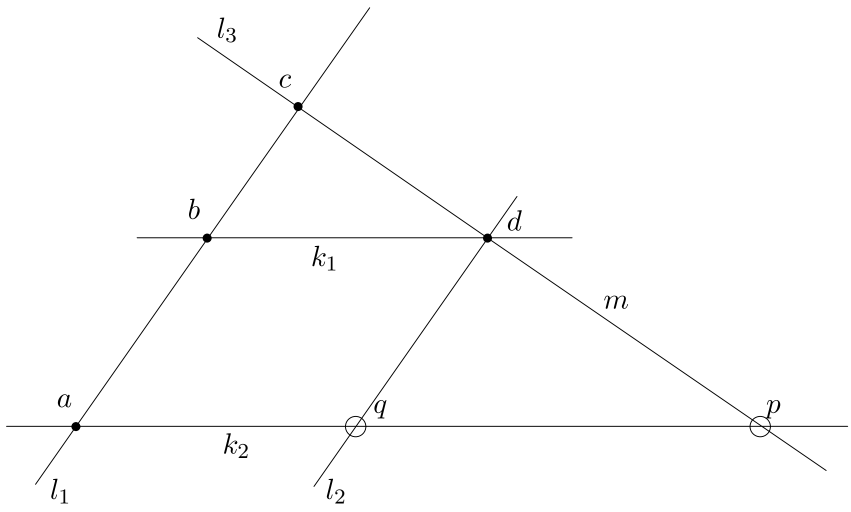
Definicja 3.3. Przestrzeń prostych z równoległością $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, \parallel \rangle$ nazywamy *przestrzenią afiniczną*, gdy

(i) $\mathfrak{A}$ spełnia afiniczny warunek Veblena,

(ii) $\mathfrak{A}$ spełnia warunek uzupełniania do równoległoboku.

Lemat 3.4. *W przestrzeni prostych z równoległością $\langle S, \mathcal{L}, \parallel \rangle$, w której na każdej prostej są co najmniej 3 punkty, z afinicznego warunku Veblena wynika warunek uzupełnienia do równoległoboku.*

DOWÓD. Załóżmy, że spełnione są założenia warunku uzupełnienia do równoległoboku, czyli że prosta k_1 przecina proste l_1 i l_2, prosta l_1 przecina proste k_1 i k_2 oraz $l_1 \parallel l_2$, tak jak na rysunku 3.4. Na prostej l_1 weźmy trzeci punkt c, różny od punktów a, b. Prosta k_2 jest równoległa do boku k_1 i przecina bok l_1 w trójkącie b, c, d, zatem z afinicznego warunku Veblena przecina ona bok m tego trójkąta w pewnym punkcie p. Mamy nowy trójkąt a, p, c. Prosta l_2 przecina bok m tego trójkąta i jest równoległa do jego boku l_1, więc z afinicznego warunku Veblena przecina bok k_2. W ten sposób zakończyliśmy dowód.



Rysunek 3.4: PCC z AVC przy prostych rzędu co najmniej trzy.

□

Tak jak wcześniej, niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem F. Zbiór wszystkich warstw w przestrzeni wektorowej V oznaczamy przez

$$\mathcal{W}(V) = \{u + S \colon u \in V, S \in \mathrm{Sub}(V)\} \cup \{\emptyset\}.$$

Ponieważ dla warstwy $U = u + S$ jej *przestrzeń kierunkowa* S jest wyznaczona jednoznacznie, możemy mówić o wymiarze warstwy; przyjmujemy

$$\dim(U) := \dim(S).$$

Zbiór wszystkich k-wymiarowych warstw to

$$\mathcal{W}_k(V) = \{u + S \colon u \in V, S \in \mathrm{Sub}_k(V)\}.$$

Dodatkowo przyjmujemy, że $\mathcal{W}_{-1}(V) = \{\emptyset\}$.

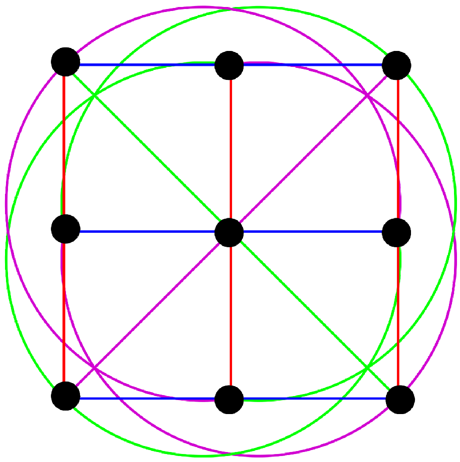
Definicja 3.5. Mówimy, że warstwa $a + S$ jest *równoległa* do warstwy $b + T$ i piszemy

$$a + S \parallel b + T, \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad S = T.$$

Struktura

$$\mathbf{A}(V) := \langle V, \mathcal{W}_1(V), \parallel\rangle$$

jest przestrzenią afiniczną w sensie definicji 3.3. Nazywamy ją *analityczną przestrzenią afiniczną*. Na rysunku 3.5 jest płaszczyzna afiniczna $\mathbf{A}(V)$, gdzie $\dim(V) = 2$ i $F = \mathbb{Z}_3$.



Rysunek 3.5: Płaszczyzna afiniczna nad $\mathbb{Z}_3$.

Stwierdzenie 3.6. *Produkt Segre przestrzeni afinicznych jest spójną weblenowską przestrzenią gamma.*

Dowód. Wynika to z 3.3, 2.5, 2.16 i z 2.17. □

3.3 Relacja równoległości w produkcie Segre

Niech $\mathfrak{A}_i = \langle S_i, \mathcal{L}_i, \|_i \rangle$ to częściowe przestrzenie prostych z równoległością dla $i = 1, 2$. W produkcie Segre $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ dla prostej k będziemy pisać k_i mając na myśli zbiór na i-tej współrzędnej. Zgodnie z definicją produktu Segre k_i może być zbiorem jednoelementowym (punktem) lub prostą z i-tej przestrzeni.

Tak jak w pracy [4]. Relację równoległości w $\mathfrak{A}$ można określić jako równoległość na jednej ze współrzędnych:

$$k \parallel l \quad :\iff \quad (\exists\ i = 1, 2)[\, k_i \parallel_i l_i \,]. \tag{3.1}$$

Można też dodatkowo zażądać, aby na jednej współrzędnej obie proste miały proste równoległe z jednej z przestrzeni $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$, a na drugiej ten sam punkt z drugiej z tych przestrzeni.

$$k \parallel^{\sim} l \quad :\iff \quad (\forall\ i = 1, 2)[\, k_i = l_i \vee k_i \parallel_i l_i \,]. \tag{3.2}$$

Relację równoległości można też zdefiniować wykorzystując konfigurację Veblena. Przyjmujemy tutaj oznaczenie $k \sim l$ mówiące, że proste k, l przecinają się.

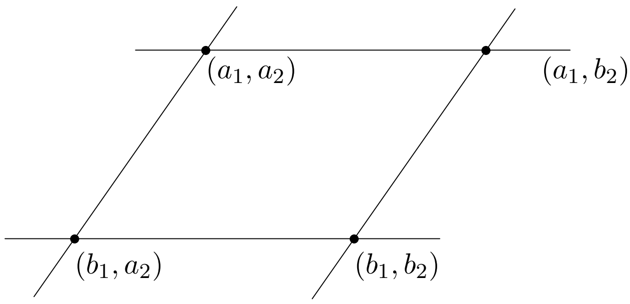
$$k \parallel^{\circ} l \quad :\iff \quad k = l \vee \text{ istnieją takie proste } m, n \text{ przez punkt } a, \text{ że } \\ a \notin k, l \quad \wedge \quad k, l \sim m, n \quad \wedge \quad k \not\sim l. \tag{3.3}$$

Innymi słowy proste k i l, są równoległe w sensie $\|^{\circ}$ gdy są współpłaszczyzną i nie przecinają się.

W produkcie Segre $\mathfrak{A}$ mogą istnieć czworokąty, które nie mają przekątnych. Na przykład: gdy $a_1 \neq b_1$ i $a_1 \sim b_1$ w $\mathfrak{A}_1$ oraz $a_2 \neq b_2$ i $a_2 \sim b_2$ w $\mathfrak{A}_2$, to wtedy punkty

$$(a_1, a_2), (b_1, a_2), (a_1, b_2), (b_1, b_2)$$

tworzą czworokąt w $\mathfrak{A}$, ale nie ma prostej łączącej punkty (a_1, a_2) z (b_1, b_2), ani prostej łączącej punkty (b_2, a_2) i (a_1, b_2).



Rysunek 3.6: Czworokąt, który nie ma przekątnych.

W takim układzie możemy określić równoległość typową dla produktu Segre:

$$k \parallel^{*} l \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{istnieje taki czworokąt } a, b, c, d \text{ bez przekątnych, że} \quad k = \overline{a, b} \quad \wedge \quad l = \overline{c, d}. \tag{3.4}$$

Bibliografia

[1] ed. F. Buekenhout, *Handbook of incidence geometry*, Elsevier 1995.

[2] A. Naumowicz, K. Prażmowski, *On Segre's product of partial linear spaces and spaces of pencils*, J.Geom **71** (2001), no. 1-2, 128–143.

[3] K. Prażmowski, M. Żynel, *Segre subproduct, its geometry, automorphisms, and examples*, J. Geom. **92** (2009), no. 1-2, 117–142.

[4] K. Petelczyc and M. Żynel, *Affinizations of Segre products of partial linear spaces*, wysłane do recenzji.