Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyki

Martyna Rzepnicka

Podprzestrzenie Grassmanna i ich charakteryzacja

Praca została napisana
pod kierunkiem
dr. Mariusza Żynela

Białystok 2021

Składam serdeczne podziękowania
dr. Mariuszowi Żynelowi
za poświęcony mi czas i nieocenioną pomoc
podczas pisania tej pracy.

Martyna Rzepnicka

Spis treści

Wstęp

Przestrzenie Grassmanna pojawiają się w literaturze dość często, w różnych kontekstach (por. [2, 3, 4, 6]). Na ogół tam gdzie bada się strukturę podprzestrzeni zadanego wymiaru. W pracy korzystam z klasycznej definicji przestrzeni Grassmanna, gdzie jako punkty bierze się wszystkie podprzestrzenie ustalonego wymiaru w przestrzeni wektorowej, natomiast prostymi są pęki takich podprzestrzeni. Z dokładnością do izomorfizmu, pęk podprzestrzeni to pęk prostych przez punkt na płaszczyźnie. Taki model analityczny nad przestrzenią wektorową odpowiada modelowi nad przestrzenią rzutowa i stąd nazwa rzutowa przestrzeń Grassmanna.

Pojęcie podprzestrzeni Grassmanna nie jest utartym terminem. Zwykle podprzestrzeń sama w sobie dziedziczy strukturę przestrzeni, w jakiej jest rozpatrywana — tak jak podgrupie można zadać strukturę grupy. W przestrzeniach Grassmanna sprawa jest nieco bardziej skomplikowana. Generalnie w geometrii, gdzie mamy dwa zbiory i relację pomiędzy ich elementami, podprzestrzenie mogą mieć różnorodne formy. Nazwa podprzestrzeń Grassmanna bierze się z charakteryzacji. Podprzestrzeń Grassmanna to właściwie synonim podprzestrzeni odcinkowej, która z dokładnością do izomorfizmu, jest przestrzenią Grassmanna (por. fakt 2.8). Stąd nazwa. Wspomniana charakteryzacja, czyli twierdzenie 3.2 to główny wynik tej pracy. Twierdzenie to zostało udowodnione w pracy [5], ale tutaj definiujemy podprzestrzenie Grassmanna opuszczając jedno, jak się okazuje, nadmiarowe założenie. Poprawiony został zatem jeden z wyników pracy [5].

Rozdział 1

Podstawowe pojęcia

1.1 Częściowa przestrzeń prostych

Zaczynamy od zdefiniowania podstawowego dla naszych dalszych rozważań pojęcia częściowej przestrzeni prostych (por. [1]).

Niech S będzie niepustym zbiorem, którego elementy będziemy nazywać punktami oraz niech $\mathcal{L}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru S, której elementy będziemy nazywać prostymi. Niech $a, b \in S$. Powiemy, że punkty a, b są współliniowe, kiedy istnieje prosta $k \in \mathcal{L}$ taka, że $a, b \in k$. Będziemy wtedy pisać $a \sim b$. Prostą k przez dwa różne punkty a, b oznaczamy $k = \overline{ab}$. O prostych $k, l \in \mathcal{L}$ mówimy, że *przecinają się*, gdy istnieje punkt $a \in S$, taki że $a \in k, l$.

Definicja 1.1. Strukturę incydencyjną $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, \in \rangle$ będziemy nazywać *częściową przestrzenią prostych* wtedy i tylko wtedy gdy:

A1: na każdej prostej leżą co najmniej dwa punkty,

A2: przez dwa różne punkty przechodzi co najwyżej jedna prosta.

Jeżeli struktura $\mathfrak{A}$ spełnia dodatkowo warunek

A3: przez każde dwa punkty przechodzi prosta,

to mówimy, że jest to *przestrzeń prostych*.

Jeśli relacja incydencji jest relacją należenia to zwyczajowo pomijamy $\in$.

Definicja 1.2. Mówimy, że podzbiór $X \subseteq S$ jest *podprzestrzenią* w $\mathfrak{A}$, gdy spełnia następujący warunek: jeśli jakaś prosta przecina zbiór X w dwóch lub więcej punktach, to cała jest w nim zawarta.

Niech a, b będą niewspółliniowymi punktami z $\mathfrak{A}$. Wówczas zauważmy, że $\{a, b\}$ jest podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$.

Definicja 1.3. Podprzestrzeń przestrzeni $\mathfrak{A}$ jest *mocna*, gdy każde dwa jej punkty są współliniowe.

Z definicji zbiór pusty i jednopunktowy są mocnymi podprzestrzeniami.

Definicja 1.4. Mówimy, że parami różne punkty $p, q, r \in S$ tworzą *trójkąt* w $\mathfrak{A}$, gdy są parami współliniowe i nie leżą na jednej prostej. Taki trójkąt oznaczamy wówczas przez pqr. Mówimy też, że trzy parami różne proste $k, l, m \in \mathcal{L}$ tworzą trójkąt w $\mathfrak{A}$, gdy parami przecinają się i nie przechodzą przez jeden punkt. Wtedy taki trójkąt oznaczamy przez klm.

Definicja 1.5. Mówimy, że podzbiór X zbioru S jest *spójny w* $\mathfrak{A}$, jeśli dla dowolnych różnych punktów $a, b \in X$ istnieje łamana zawarta w X łącząca a z b. Przez łamaną rozumiemy ciąg punktów takich, że dwa kolejne punkty w tym ciągu są współliniowe, formalnie: istnieją punkty $c_0, \ldots, c_r \in X$ takie, że $c_0 = a$, $c_r = b$ oraz $c_{i-1} \sim c_i$ dla $i = 1, \ldots, r$.

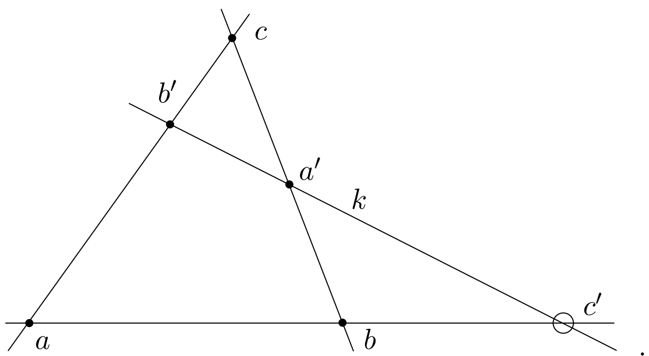
Zauważmy, że mocna podprzestrzeń jest spójna.

1.2 Przestrzeń rzutowa

W geometrii naturalnym pojęciem jest płaszczyzna. Aby w tak abstrakcyjnym ujęciu nadać mu sens potrzebny jest dodatkowy warunek

A4: jeśli prosta przecina dwa boki trójkąta w dwóch różnych punktach, to przecina także jego trzeci bok.

Warunek ten nazywamy warunkiem Veblena.



Rysunek 1.1: Rzutowy warunek Veblena. Prosta k przecina boki $\overline{ac}$ i $\overline{cb}$ trojkąta abc, zatem istnieje punkt c' przecięcia k i $\overline{ab}$

Definicja 1.6. Będziemy mówić, że przestrzeń prostych $\mathfrak{P} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ jest przestrzenią rzutową, gdy spełnia następujące warunki:

P1: na każdej prostej leżą co najmniej trzy punkty,

P2: struktura $\mathfrak{P}$ spełnia rzutowy warunek Veblena.

Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią wektorową nad pierścieniem z dzieleniem F. Oznaczmy przez $\mathrm{Sub}(V)$ rodzinę wszystkich podprzestrzeni przestrzeni V. Gdy $0 \leqslant k \leqslant n$, to przez $\mathrm{Sub}_k(V)$ rozumiemy zbiór wszystkich k-wymiarowych podprzestrzeni V. Wtedy struktura incydencyjna

$$\mathbf{P}(V) = \langle \mathrm{Sub}_1(V), \mathrm{Sub}_2(V), \subseteq \rangle, \tag{1.1}$$

w której punktami są 1-wymiarowe podprzestrzenie, a prostymi są 2-wymiarowe podprzestrzenie V, to przestrzeń rzutowa.

Rozdział 2

Przestrzeń Grassmanna

2.1 Pęki i trójkąty

W fizyce, i nie tylko, funkcjonuje termin *Grassmannian* oznaczający rodzinę podprzestrzeni ustalonego wymiaru w pewnej przestrzeni, którą może być przestrzeń wektorowa, rzutowa, Hilberta albo inna. Geometrzy traktują tę rodzinę jako zbiór punktów i dokładają dodatkowo strukturę prostych, aby uzyskać częściową przestrzeń prostych. Wówczas, taki wzbogacony Grassmannian to już *przestrzeń Grassmanna*.

Definicja 2.1. Jeśli $0 < k < n$, $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$, $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$ i $H \subset B$ to zbiór:

$$\mathbf{p}(H, B) = \{U \in \mathrm{Sub}_k(V) \colon H \subset U \subset B\} \tag{2.1}$$

nazywamy k-*pękiem* o wierzchołku H i podstawie B. Zbiór wszystkich takich pęków przy ustalonym k oznaczamy przez $\mathcal{P}_k(V)$. Geometrię, której punktami są k-wymiarowe podprzestrzenie V, a prostymi k-pęki nazywamy *rzutową przestrzenią Grassmanna* indeksu k nad V (por. [2, 3, 4]) i oznaczamy

$$\mathbf{P}_k(V) = \left\langle \mathrm{Sub}_k(V), \mathcal{P}_k(V) \right\rangle. \tag{2.2}$$

Gdy $k = 1$ lub $k = n - 1$, to $\mathbf{P}_k(V)$ jest przestrzenią rzutową.
Z algebry liniowej znamy następujący fakt:

Fakt 2.2. *Niech* $U, W \in \mathrm{Sub}_k(V)$. *Wówczas* $\dim(U \cap W) = k - m$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\dim(U + W) = k + m$.

Z definicji 2.1 i faktu 2.2 wynikają następujące własności prostych przestrzeni Grassmanna:

Fakt 2.3. *Niech* U, W *będą różnymi punktami w przestrzeni Grassmanna* $\mathbf{P}_k(V)$. *Następujące warunki są równoważne:*

(1) *punkty* U, W *są współliniowe w* $\mathbf{P}_k(V)$,

(2) $\dim(U \cap W) = k - 1$,

(3) $\dim(U + W) = k + 1$.

Fakt 2.4. *Niech p będzie prostą w przestrzeni Grassmanna $\mathbf{P}_k(V)$ i niech U_1, U_2 będą różnymi punktami z prostej p. Wówczas:*

(i) *$p = \mathbf{p}(H, B)$, gdzie $H = U_1 \cap U_2$, $B = U_1 + U_2$,*

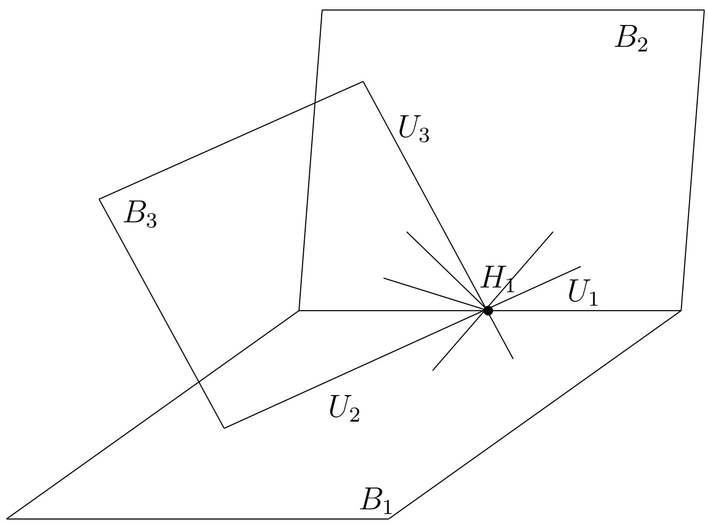
(ii) *$U_1 = H \oplus \langle u_1 \rangle$, $U_2 = H \oplus \langle u_2 \rangle$ dla pewnych wektorów $u_1, u_2 \in V$ takich, że $B = H \oplus \langle u_1, u_2 \rangle$, oraz*

(iii) *dla dowolnego $U \in p$ mamy $U = H \oplus \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \rangle$, dla pewnych skalarów $\alpha_1, \alpha_2 \in F$.*

Zanotujmy teraz bardzo ważny fakt, leżący u podstaw wielu twierdzeń o przestrzeniach Grassmanna. Jego dowód można znaleźć na przykład w [6].

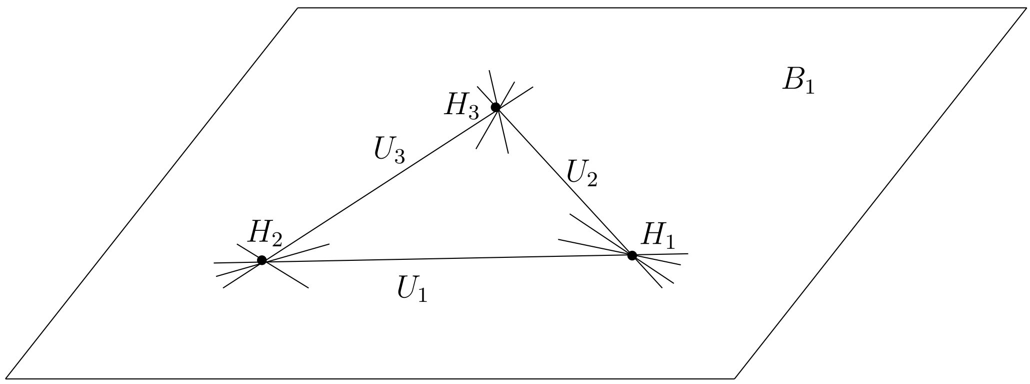
Fakt 2.5. *Niech U_1, U_2, U_3 będą wierzchołkami trójkąta w przestrzeni Grassmanna $\mathbf{P}_k(V)$. Wtedy $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = k - 1$ lub $\dim(U_1 + U_2 + U_3) = k + 1$.*

Zilustrujemy przykład trójkąta o wierzchołkach U_1, U_2, U_3 w przestrzeni Grassmanna $\mathbf{P}_k(V)$. Niech $p = \mathbf{p}(H_1, B_1) = \overline{U_2 U_3}$, $q = \mathbf{p}(H_2, B_2) = \overline{U_1 U_3}$, $r = \mathbf{p}(H_3, B_3) = \overline{U_1 U_2}$. Zgodnie z faktem 2.5 rozważmy pierwszy przypadek, gdy $H_1 = H_2 = H_3 = U_1 \cap U_2 \cap U_3$. O takim trójkącie będziemy mówić, że jest typu *gwiazda*.



Rysunek 2.1: Trójkąt typu gwiazda w przestrzeni Grassmanna.

W drugim przypadku, gdy $B_1 = B_2 = B_3 = U_1 + U_2 + U_3$ mówimy, że trójkąt jest typu *układ*.



Rysunek 2.2: Trójkąt typu układ w przestrzeni Grassmanna.

2.2 Podprzestrzenie odcinkowe

Zwykle podprzestrzeń dziedziczy strukturę przestrzeni, z której została wyjęta. W cześciowych przestrzeni prostych podprzestrzenie nie zawsze są jednorodne. Jedne mogą mieć strukturę przestrzeni rzutowej, inne afinicznej. W przestrzeni Grassmanna podprzestrzeniami, które dziedziczą strukturę, są podprzestrzenie odcinkowe.

Lemat 2.6. *Zbiór postaci* $[Z, Y]_k = \{U \in \mathrm{Sub}_k(V) \colon Z \subseteq U \subseteq Y\}$, *gdzie* $Z, Y \in \mathrm{Sub}(V)$ $Z \subseteq Y$ *jest podprzestrzenią.*

Dowód. Niech p będzie dowolnym k-pękiem oraz niech:

$$\left|p \cap [Z, Y]_k\right| \geqslant 2.$$

Z tego wynika, że mamy na pewno dwie różne podprzestrzenie U_1, U_2, które należą do $p \cap [Z, Y]_k$. Z faktu 2.4 mamy, że:

$$p = \overline{U_1 U_2} = \mathbf{p}(U_1 \cap U_2, U_1 + U_2).$$

Niech $U \in p$. Zatem

$$U_1 \cap U_2 \subset U \subset U_1 + U_2.$$

Ponieważ $U_1, U_2 \in [Z, Y]_k$ więc

$$Z \subseteq U_1 \cap U_2 \quad \text{i} \quad U_1 + U_2 \subseteq Y.$$

Zatem $Z \subset U \subset Y$, czyli $U \in [Z, Y]_k$. □

Definicja 2.7. Mówimy, że podprzestrzeń X w przestrzeni Grassmanna $\mathbf{P}_k(V)$ jest *podprzestrzenią odcinkową*, gdy istnieją $Z, Y \in \mathrm{Sub}(V)$ takie, że

$$X = [Z, Y]_k.$$

Podprzestrzenie odcinkowe i tylko takie mają strukturę przestrzeni Grassmanna.

Fakt 2.8 ([6, Tw. 2.1])**.** *Podprzestrzeń odcinkowa* $[Z, Y]_k$ *w* $\mathbf{P}_k(V)$ *jest z dokładnością do izomorfizmu przestrzenią Grassmanna* $\mathbf{P}_{k-\dim(Z)}(Y/Z)$*. Jeśli podprzestrzeń* X *w* $\mathbf{P}_k(V)$ *jest izomorficzna z przestrzenią Grassmanna, to* X *jest podprzestrzenią odcinkową.*

Z algebry liniowej mamy następujący fakt:

Fakt 2.9. *Dla dowolnych* $Z_1, Z_2, Y_1, Y_2 \in \mathrm{Sub}(V)$ *mamy równość*

$$[Z_1, Y_1]_k \cap [Z_2, Y_2]_k = [Z_1 + Z_2, Y_1 \cap Y_2]_k.$$

2.3 Gwiazdy i układy

Ważną klasą podprzestrzeni w przestrzeni Grassmanna są mocne podprzestrzenie. Tutaj mają one strukturę przestrzeni rzutowych. Klasa mocnych podprzestrzeni przestrzeni Grassmanna rozpada się na dwie rodziny, w pewnym sensie nawzajem dualne do siebie.

Lemat 2.10. *Jeśli* $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$ *i* $Y \in \mathrm{Sub}(V)$*, to odcinek* $[H, Y]_k$ *jest mocną podprzestrzenią w* $\mathbf{P}_k(V)$*.*

Dowód. Oznaczmy $X := [H, Y]_k$. Z lematu 2.6 odcinek X jest podprzestrzenią. Niech H będzie $(k-1)$-wymiarową podprzestrzenią V. Jeśli X jest zbiorem pustym lub jednoelementowym, to X jest mocną podprzestrzenią. Weźmy dwa dowolne różne punkty $U, W \in [H, Y]_k$. Wtedy $\dim(U \cap W) = k - 1$. Z 2.3 mamy, że punkty U, W są współliniowe w $\mathbf{P}_k(V)$. Z dowolności wyboru U, W mamy, że każde dwa punkty z $[H, Y_k]$ są współliniowe w $\mathbf{P}_k(V)$, co oznacza, że odcinek $[H, Y]_k$ jest mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(V)$. □

Lemat 2.11. *Jeśli* $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$ *i* $Z \in \mathrm{Sub}(V)$*, to odcinek* $[Z, B]_k$ *jest mocną podprzestrzenią w* $\mathbf{P}_k(V)$*.*

Dowód. Oznaczmy $X := [Z, B]_k$. Z lematu 2.6 odcinek $[Z, B]_k$ jest podprzestrzenią. Niech B będzie $(k+1)$-wymiarową podprzestrzenią V. Jeśli X jest zbiorem pustym lub jednoelementowym, to X jest mocną podprzestrzenią. Weźmy dwa dowolne różne punkty $U, W \in [Z, B]_k$. Wtedy $\dim(U + W) = k + 1$. Z 2.3 mamy, że punkty U, W są współliniowe w $\mathbf{P}_k(V)$. Z dowolności wyboru U, W mamy, że każde dwa punkty są współliniowe w $\mathbf{P}_k(V)$, co oznacza, że odcinek $[Z, B]_k$ jest mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(V)$. □

Zauważmy, że dowolne trzy parami różne i nie leżące na jednej prostej punkty z odcinka $[H, Y]_k$ tworzą trójkąt typu gwiazda. Dlatego takie odcinki będziemy nazywać *gwiazdami*. Podobnie trzy parami różne i nie leżące na jednej prostej punkty z odcinka $[Z, B]_k$ tworzą trójkąt typu układ. Dlatego takie odcinki będziemy nazywać *układami*. Lematy 2.10 i 2.11 mówią odpowiednio, że gwiazdy i układy są mocnymi podprzestrzeniami w przestrzeni Grassmanna. W dalszej części pracy będą nas interesowały maksymalne gwiazdy, czyli odcinki

$$S(H) = [H, V]_k,$$

gdzie $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$ oraz maksymalne układy, czyli odcinki

$$T(B) = [0, B]_k,$$

gdzie $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$.

Lemat 2.12. *Niech $Z, Y \in \mathrm{Sub}(V)$.*

(i) *Jeśli U_1, U_2 są różnymi punktami z gwiazdy $S = [H, Y]_k$, to wtedy mamy $H = U_1 \cap U_2$*

(ii) *Jeśli U_1, U_2 są różnymi punktami z układu $T = [Z, B]_k$, to wtedy mamy $B = U_1 + U_2$*

Dowód. (i): Zauważmy, że $H \subset U_1, U_2$, czyli $H \subseteq U_1 \cap U_2$. A więc mamy $k-1 \leqslant \dim(U_1 \cap U_2)$. Z drugiej strony, ponieważ $U_1 \neq U_2$, to $\dim(U_1 \cap U_2) < k$. Stąd $\dim(H) = \dim(U_1 \cap U_2)$, a więc $H = U_1 \cap U_2$.

(ii): Zauważmy, że $U_1, U_2 \subseteq B$, czyli $U_1 + U_2 \subseteq B$. Stąd dostajemy oszacowanie $\dim(U_1 + U_2) \leqslant k + 1$. Z drugiej strony, ponieważ $U_1 \neq U_2$, to $k < \dim(U_1 + U_2)$. Stąd $\dim(B) = \dim(U_1 + U_2)$, a więc $B = U_1 + U_2$. □

Z faktu 2.9 wynika, że

Fakt 2.13.

(i) *Gdy $H_1, H_2 \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$, $H_1 \neq H_2$ i $S(H_1) \cap S(H_2) \neq \emptyset$, to*

$$S(H_1) \cap S(H_2) = \{H_1 + H_2\}.$$

(ii) *Gdy $B_1, B_2 \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$, $B_1 \neq B_2$ i $T(B_1) \cap T(B_2) \neq \emptyset$, to*

$$T(B_1) \cap T(B_2) = \{B_1 \cap B_2\}.$$

(iii) *Gdy $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$, $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$ i $S(H) \cap T(B) \neq \emptyset$, to*

$$S(H) \cap T(B) = \mathbf{p}(H, B).$$

Fakt 2.14 ([6, Tw. 2.2]). *Zbiór X jest maksymalną mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(V)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $X = \mathrm{S}(H)$ dla pewnego $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$ lub $X = \mathrm{T}(B)$ dla pewnego $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$.*

Zatem klasa mocnych podprzestrzeni w przestrzeni Grassmana składa się tylko z gwiazd i układów. Badając częściowe przestrzenie prostych ważną rolę odgrywają mocne podprzestrzenie. W przestrzeniach Grassmanna odpowiadają one przestrzeniom rzutowym, które dobrze znamy(por. [6, Rozdział 2.1]).

Fakt 2.15. *Mocna podprzestrzeń w $\mathbf{P}_k(V)$ jest z dokładnością do izomorfizmu przestrzenią rzutową.*

Zauważmy, że na mocy lematu 2.12 dla każdej prostej $\mathbf{p}(H, B)$ w $\mathbf{P}_k(V)$ mamy jednoznacznie wyznaczone: maksymalną gwiazdę $S(H)$ oraz maksymalny układ $T(B)$. Zatem możemy pisać:

$$S(p) = S(H)$$

oraz

$$T(p) = T(B).$$

Oczywiście

$$S(p) \cap T(p) = p.$$

Z uwagi na lemat 2.12 oraz fakt 2.4 dla dowolnej prostej q z maksymalnej gwiazdy S mamy $S = S(q)$. Analogicznie, gdy prosta q leży w maksymalnym układzie T to $T = T(q)$.

Stwierdzenie 2.16. *Przestrzeń $\mathbf{P}_k(V)$ jest spójna.*

DOWÓD. Weźmy dwa dowolne punkty $A, B \in \mathrm{Sub}_k(V)$. Szukamy łamanej łączącej te punkty. Niech $C := A \cap B$. Zatem

$$A = C \oplus \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \rangle$$

oraz

$$B = C \oplus \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \rangle,$$

gdzie $k = r + \dim(C)$ dla pewnych $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \in V$. Weźmy

$$\begin{aligned}
P_0 &:= C \oplus \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \rangle = A, \\
P_1 &:= C \oplus \langle \beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \rangle, \\
P_2 &:= C \oplus \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \alpha_r \rangle, \\
&\ \vdots \\
P_{r-1} &:= C \oplus \langle \beta_1, \dots, \beta_{r-1}, \alpha_r \rangle, \\
P_r &:= C \oplus \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \rangle = B.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\dim(P_{i-1} \cap P_i) = k - 1$, zatem na mocy faktu 2.3 P_i i P_{i+1} są współliniowe dla $i = 1, \dots, r$. Tak, więc istnieje wymagana łamana $A = P_0, \dots, P_r = B$. $\square$

Rozdział 3

Podprzestrzenie Grassmanna

3.1 Charakteryzacja

Pojęcie podprzestrzeni Grassmana wprowadzono w pracy [5]. Mocno się tutaj na tej pracy opieramy, ale nieco inaczej formułujemy definicję i opuszczamy w niej jedno założenie, jak się okazuje nadmiarowe.

Definicja 3.1. Podprzestrzeń X przestrzeni Grassmanna $\mathbf{P}_k(V)$ nazywamy podprzestrzenią Grassmanna, gdy:

G1: podprzestrzeń X jest spójna,

G2: dla dowolnej prostej p z $\mathbf{P}_k(V)$ takiej, że $|S(p) \cap X| \geqslant 2$ i $|T(p) \cap X| \geqslant 2$ mamy $p \subseteq X$.

W tej wersji, mamy nadzieję, powyższa definicja jest bardziej czytelna. Opuściliśmy założenie, że $S(p) \cap T(p) \cap X \neq \emptyset$. Nie korzystamy z niego w dalszych rozumowaniach, do scharakteryzowania podprzestrzeni Grassmanna.

Z definicji zbiór pusty i zbiór jednoelementowy są podprzestrzeniami Grassmanna. Natomiast zbiór $\{U_1, U_2\}$, w którym U_1, U_2 nie są współliniowe jest podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(V)$, ale nie jest podprzestrzenią Grassmanna, ponieważ ten zbiór nie jest spójny.

W dalszej części pracy będę dowodzić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.2 ([5, Tw. 2.6])**.** *X jest podprzestrzenią Grassmanna wtedy i tylko wtedy gdy X jest podprzestrzenią odcinkową.*

3.2 Dowód głównego twierdzenia

Dowód naszego głównego twierdzenia 3.2 rozbity jest na serię lematów, które tutaj prezentujemy.

Lemat 3.3. *Podprzestrzeń odcinkowa jest spójna.*

DOWÓD. Wynika ze stwierdzenia 2.16 oraz faktu 2.8. $\square$

Lemat 3.4. *Podprzestrzeń odcinkowa jest podprzestrzenią Grassmanna.*

DOWÓD. Niech $X = [Z, Y]_k$, gdzie $Z, Y \in \mathrm{Sub}(V)$ będzie naszą podprzestrzenią odcinkową w $\mathbf{P}_k(V)$. Z lematu 3.3 mamy, że warunek G1 jest spełniony. Sprawdźmy warunek G2. Weźmy więc dowolną prostą p o tej własności, że $|S(p) \cap X| \geqslant 2$ i $|T(p) \cap X| \geqslant 2$. Pokażemy, że $p \subseteq X$. W tym celu rozważmy dowolny punkt $U \in p$. Przyjmijmy, że $p = [H, B]_k$, gdzie $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$ i $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$. Wówczas $H \subset U \subset B$ oraz $S(p) = [H, V]_k$ i $T(p) = [0, B]_k$. Z faktu 2.9 dostajemy

$$S(p) \cap X = [H + Z, Y]_k \qquad \text{oraz} \qquad T(p) \cap X = [Z, B \cap Y]_k.$$

Zauważmy, że $k - 1 = \dim(H) \leqslant \dim(H + Z)$. Ponieważ w przekroju $S(p) \cap X$ mamy co najmniej 2 różne punkty, więc $\dim(H + Z) \leqslant k - 1$. Ostatecznie $\dim(H + Z) = k - 1$, co oznacza, że $H + Z = H$, czyli $Z \subseteq H$. I podobnie dla $B \cap Y$. Widzimy, że $k + 1 = \dim(B) \geqslant \dim(B \cap Y)$. W przekroju $T(p) \cap X$ mamy co najmniej 2 różne punkty, więc $\dim(B \cap Y) \geqslant k + 1$. Otrzymujemy $\dim(B \cap Y) = k + 1$, co oznacza, że $B \cap Y = B$, czyli $B \subseteq Y$.

Otrzymaliśmy

$$Z \subseteq H \subseteq U \subseteq B \subseteq Y.$$

Stąd natychmiast mamy

$$U \in [Z, Y]_k = X$$

i dowód jest zakończony. $\square$

Lemat 3.5. *Niech X będzie podprzestrzenią Grassmanna i niech $S_i = S(H_i)$ będzie maksymalną gwiazdą w $\mathbf{P}_k(V)$ dla pewnego $H_i \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$, $i = 1, 2$. Jeśli*

$$|X \cap S_1| \geqslant 2, \qquad |X \cap S_2| \geqslant 2 \qquad \textit{oraz} \qquad X \cap S_1 \cap S_2 \neq \emptyset,$$

to istnieje $Y \in \mathrm{Sub}(V)$ takie, że $S_i \cap X = [H_i, Y]_k$, $i = 1, 2$.

DOWÓD. Oznaczmy $S'_i := S_i \cap X$, $i = 1, 2$. Ponieważ X jest podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(V)$, więc S'_1, S'_2 są gwiazdami, choć niekoniecznie maksymalnymi. Zatem musi być $S'_i = [H_i, Y_i]_k$ dla pewnego $Y_i \in \mathrm{Sub}(V)$, $i = 1, 2$. Mamy pokazać, że $Y_1 = Y_2$. Na mocy założeń w lemacie weźmy

$$W \in X \cap S_1 \cap S_2 = S'_1 \cap S'_2. \tag{3.1}$$

Widzimy, że

$$H_1, H_2 \subseteq W \subseteq Y_1, Y_2.$$

Gwiazdy S_1, S_2 są maksymalne, a gwiazdy S'_1, S'_2 mają po co najmniej dwa elementy, więc

$$H_1, H_2 \subset W \subset Y_1, Y_2. \tag{3.2}$$

Zaczniemy od wykazania inkluzji $Y_1 \subseteq Y_2$. W tym celu weźmy dowolne $y \in Y_1$. Jeśli $y \in W$, to z (3.2) od razu mamy $y \in Y_2$. Rozważmy zatem przypadek, gdy $y \in Y_1 \setminus W$. Możemy wtedy wziąć prostą

$$p := \mathbf{p}(H_1, W \oplus \langle y \rangle)$$

przechodzącą przez punkt W, leżący w S_1. Widzimy, że

$$H_1 \subset W \oplus \langle y \rangle \subseteq Y_1.$$

Z tego mamy, że $p \subseteq S_1' \subseteq X$. Rozważmy maksymalny układ $T := T(p)$. Zauważmy, że punkt W leży na prostej p i jednocześnie w S_2' z (3.1). Z kolei $S_2' \subseteq S_2$, więc układ T i gwiazda S_2 mają wspólny punkt W. Na mocy podpunktu (iii) z faktu 2.13 układ T i gwiazda S_2 mają wspólną prostą. Oznaczmy ją przez q. Zatem możemy napisać, że

$$T = T(q) \qquad \text{oraz} \qquad S_2 = S(q).$$

Wiemy, że prosta p zawarta jest w układzie T i w podprzestrzeni X, tak więc mamy $|T(q) \cap X| \geqslant 2$. Z założenia do lematu mamy $|S(q) \cap X| \geqslant 2$. Ponieważ X jest podprzestrzenią Grassmanna, więc z warunku G2 otrzymujemy $q \subseteq X$. Zauważmy, że

$$q = X \cap q = X \cap T \cap S_2 = T \cap S_2' \subseteq S_2' = [H_2, Y_2]_k. \tag{3.3}$$

Z drugiej strony na mocy faktu 2.9 mamy

$$q = T \cap S_2 = [0, W \oplus \langle y \rangle]_k \cap [H_2, V]_k = [H_2, W \oplus \langle y \rangle]_k = \mathbf{p}(H_2, W \oplus \langle y \rangle). \tag{3.4}$$

Porównując (3.3) i (3.4) dostajemy $W \oplus \langle y \rangle \subseteq Y_2$, co oznacza, że $y \in Y_2$. Tak więc $Y_1 \subseteq Y_2$ z dowolności wyboru y.

Zamieniając ze sobą indeksy 1 i 2 w powyższym rozumowaniu dostaniemy dowód inkluzji $Y_2 \subseteq Y_1$. Ostatecznie $Y_1 = Y_2$, co mieliśmy pokazać. □

Lemat 3.6. *Niech X będzie podprzestrzenią Grassmanna i niech $T_i = T(B_i)$ będzie maksymalnym układem w $\mathbf{P}_k(V)$ dla pewnego $B_i \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$, $i = 1, 2$. Jeśli*

$$|X \cap T_1| \geqslant 2, \qquad |X \cap T_2| \geqslant 2, \qquad \textit{oraz} \qquad X \cap T_1 \cap T_2 \neq \emptyset,$$

to istnieje $Z \in \mathrm{Sub}(V)$ takie, że $T_i \cap X = [B_i, Z]_k$, $i = 1, 2$.

Dowód. Oznaczmy $T_i' := T_i \cap X$, $i = 1, 2$. Ponieważ X jest podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(V)$, więc T_1', T_2' są układami, choć niekoniecznie maksymalnymi. Zatem $T_i' = [Z_i, B_i]_k$ dla pewnego $Z_i \in \mathrm{Sub}(V), i = 1, 2$. Mamy pokazać, że $Z_1 = Z_2$. Na mocy założeń w lemacie weźmy

$$W \in X \cap T_1 \cap T_2 = T_1' \cap T_2'. \tag{3.5}$$

Widzimy, że

$$Z_1, Z_2 \subseteq W \subseteq B_1, B_2.$$

Układy T_1, T_2 są maksymalne, a układy T_1', T_2' mają po co najmniej dwa elementy, więc

$$Z_1, Z_2 \subset W \subset B_1, B_2. \tag{3.6}$$

Możemy przyjąć, że

$$W = Z_2 \oplus \langle w_1, \dots, w_r \rangle,$$

dla pewnych liniowo niezależnych nad Z_2 wektorów $w_1, \dots, w_r$ z W, gdzie $r = k - \dim(Z_2)$. Niech teraz $1 \leqslant i \leqslant r$. Rozważmy

$$H_i := Z_2 \oplus \langle w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_r \rangle.$$

Zauważmy, że $\dim(H_i) = k - 1$ i $H_i \subset W$. Z (3.6) mamy $W \subset B_2$, zatem $H_i \subset B_2$. Możemy zatem wziąć prostą

$$p_i = \mathbf{p}(H_i, B_2)$$

przechodzącą przez punkt W. Ponadto, z samego określenia, $Z_2 \subset H_i$, więc

$$p_i \subseteq T_2' \subseteq X.$$

Rozważmy rozszerzenie prostej p_i do maksymalnej gwiazdy

$$S_i = S(p_i) = [H_i, V]_k.$$

Punkt W leży w gwieździe S_i, a na mocy (3.5) punkt W leży również w układzie T_1. Korzystając z podpunktu (iii) faktu 2.13, gwiazda S_i oraz układ T_1 mają wspólną prostą. Oznaczmy ją q_i. Zauważmy na mocy faktu 2.9, że

$$q_i := S_i \cap T_1 = [H_i, V]_k \cap [0, B_1]_k = [H_i, B_1]_k = \mathbf{p}(H_i, B_1) \tag{3.7}$$

Możemy pisać, że

$$S_i = S(q_i) \qquad \text{oraz} \qquad T_1 = T(q_i).$$

Z założenia do lematu mamy $|T(q_i) \cap X| \geqslant 2$. Ponadto wiemy, że prosta p_i zawarta jest w S_i oraz w X, a więc $|S(q_i) \cap X| \geqslant 2$. Podprzestrzeń X jest podprzestrzenią Grassmanna, więc z warunku G2 musi być $q_i \subseteq X$. Zatem, z faktu 2.9 mamy

$$q_i = X \cap q_i = X \cap S_i \cap T_1 = S_i \cap T_1' = [H_i, V]_k \cap [Z_1, B_1]_k = [H_i + Z_1, B_1]_k.$$

Razem z (3.7) daje to

$$H_i + Z_1 = H_i,$$

czyli $Z_1 \subseteq H_i$. W ten sposób wykazaliśmy, że

$$Z_1 \subseteq H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_r = Z_2.$$

Zamieniając ze sobą indeksy 1 z 2 w powyższym rozumowaniu otrzymujemy dowód inkluzji $Z_2 \subseteq Z_1$. W ten sposób ostatecznie pokażemy, że $Z_1 = Z_2$. □

Korzystając ze spójności podprzestrzeni Grassmanna można znacząco wzmocnić lemat 3.5 usuwając założenie o przecinaniu się gwiazd.

Lemat 3.7. *Niech X będzie podprzestrzenią Grassmanna i niech $S_i = S(H_i)$ będzie maksymalną gwiazdą w $\mathbf{P}_k(V)$ dla pewnego $H_i \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$, $i = 1, 2$. Jeśli*

$$|X \cap S_1| \geqslant 2 \qquad \textit{oraz} \qquad |X \cap S_2| \geqslant 2,$$

to istnieje $Y \in \mathrm{Sub}(V)$ takie, że $S_i \cap X = [H_i, Y]_k$, $i = 1, 2$.

Dowód. Oznaczmy $S'_i := S_i \cap X$, $i = 1, 2$. Ponieważ X jest podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(V)$, więc S'_i są gwiazdami, choć niekoniecznie maksymalnymi. Zatem $S'_i = [H_i, Y_i]_k$ dla pewnego $Y_i \in \mathrm{Sub}(V)$, $i = 1, 2$. Mamy pokazać, że $Y_1 = Y_2$.

Rozważmy dowolny punkt $U_i \in S'_i$, $i = 1, 2$. Korzystając z warunku G1, mówiącego o spójności podprzestrzeni Grassmanna, w X istnieje ciąg punktów $D_0, D_1, \ldots, D_r$ łączący punkty U_1, U_2, to znaczy $U_1 = D_0$, $U_2 = D_r$ oraz $D_{i-1} \sim D_i$ dla $i = 1, \ldots, r$. Dla prostej $p_i := \overline{D_{i-1}D_i}$ możemy wziąć maksymalną gwiazdę $S(p_i)$, gdzie $i = 1, \ldots, r$. Oczywiście każda z tych gwiazd ma z X co najmniej wspólną prostą p_i. Zauważmy też, że $S(p_i) \cap S(p_{i+1}) = \{D_i\}$. Ponieważ $D_i \in X$, więc dla sąsiednich gwiazd $S(p_1)$ oraz $S(p_{i+1})$ możemy zastosować lemat 3.5, z którego wynika, że te gwiazdy mają wspólną podstawę. Jest tak dla każdej pary sąsiednich gwiazd w ciągu $S(p_i)$, $i = 1, ..., r$. Dlatego wnioskujemy ostatecznie, że $Y_1 = Y_2$. □

Podobnie możemy wzmocnić lemat 3.6.

Lemat 3.8. *Niech X będzie podprzestrzenią Grassmanna i niech $T_i = T(B_i)$ będzie maksymalnym układem w $\mathbf{P}_k(V)$ dla pewnego $B_i \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$, $i = 1, 2$. Jeśli*

$$|X \cap T_1| \geqslant 2, \qquad \textit{oraz} \qquad |X \cap T_2| \geqslant 2,$$

to istnieje $Z \in \mathrm{Sub}(V)$ takie, że $T_i \cap X = [B_i, Z]_k$, $i = 1, 2$.

Dowód. Dowód przebiega w oparciu o lemat 3.6 analogicznie jak dowód lematu 3.7 wykorzystując spójność X. □

Lemat 3.9. *Niech X będzie podprzestrzenią Grassmanna w $\mathbf{P}_k(V)$. Wówczas istnieją $Z, Y \in \mathrm{Sub}(V)$ takie, że*

(i) $X \subseteq [Z, Y]_k$,

(ii) *dla każdej maksymalnej gwiazdy $S = S(H)$, gdzie $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$, jeśli $|X \cap S| \geqslant 2$, to $X \cap S = [H, Y]_k$,*

(iii) *dla każdego maksymalnego układu $T = T(B)$, gdzie $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$, jeśli $|X \cap T| \geqslant 2$, to $X \cap T = [Z, B]_k$.*

Dowód. (i): Weźmy dowolny punkt $U \in X$. Jeśli U jest jedynym punktem w X, to nie ma gwiazdy ani układu, które przecinałyby X w co najmniej dwóch punktach. Założenia G2 spełnione są więc pusto i możemy przyjąć $Z = Y = U$. Jeśli w X mamy jeszcze jakieś punkty, to z warunku G1 w X musi być zawarta prosta p przechodzącą przez U. Weźmy $S := S(p)$. Zauważmy, że $U \in S$. Z lematu 3.7 mamy

$$X \cap S = [H, Y]_k \ni U,$$

zatem $U \subseteq Y$. Weźmy teraz maksymalny układ $T := T(p)$ rozszerzający prostą p. Zauważmy, że $U \in T$. Z lematu 3.8 mamy

$$X \cap T = [Z, B]_k \ni U.$$

Zatem $Z \subseteq U$. Punkt U był wybrany dowolnie, więc ostatecznie otrzymujemy

$$X \subseteq [Z, Y]_k.$$

(ii): Na mocy lematu 3.7 istnieje $Y \in \mathrm{Sub}(V)$ takie, że dla każdej maksymalnej gwiazdy $S = S(H)$, gdzie $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(V)$, jeśli tylko $|X \cap S| \geqslant 2$, to $X \cap S = [H, Y]_k$.
(iii): Podobnie, na mocy lematu 3.8 istnieje $Z \in \mathrm{Sub}(V)$ takie, że dla każdego maksymalnego układu $T = T(B)$, gdzie $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$, jeśli tylko $|X \cap T| \geqslant 2$, to $X \cap T = [Z, B]_k$.

□

Lemat 3.10. *Niech X będzie taką co najmniej dwuelementową podprzestrzenią Grassmanna w $\mathbf{P}_k(V)$, że $X \subseteq [Z, Y]_k$ dla Z, Y jak w lemacie 3.9. Jeśli U jest punktem z odcinka $[Z, Y]_k$, W jest punktem z X i $U \sim W$, to $U \in X$.*

Dowód. W przypadku, gdy $U = W$ mamy, że $U = W \in X$, co kończy nasz dowód. Rozważmy przypadek, gdy $U \neq W$. Weźmy prostą

$$p := \mathbf{p}(H_1, B_1)$$

w X przechodzącą przez W oraz prostą

$$q := \overline{WU} = \mathbf{p}(H_2, B_2)$$

dla odpowiednich H_i, B_i, $i = 1, 2$. Korzystając z lematów 3.7 i 3.8 mamy

$$S' := S(p) \cap X = [H_1, Y]_k \qquad \text{oraz} \qquad T' := T(p) \cap X = [Z, B_1]_k.$$

Z tego, że $W \in X \subseteq [Z, Y]_k$ mamy $W \in T'$, zatem $Z \subseteq W$. Wiemy także z założeń, że U jest punktem z odcinka $[Z, Y]_k$, więc $Z \subseteq U$. Stąd otrzymujemy $Z \subseteq W \cap U = H_2$. To oznacza, że $Z + H_2 = H_2$. Tak więc w oparciu o fakt 2.9 dostajemy

$$T' \cap S(q) = [Z + H_2, B_1 \cap V] = [H_2, B_1]_k.$$

Ponieważ $W \in p, q$, więc $H_2 \subseteq W \subseteq B_1$. Wówczas $m := T' \cap S(q)$ jest prostą oraz $m \subseteq X \cap S(q)$. Analogicznie dowodzimy, że $l := S' \cap T(q)$ jest prostą oraz $l \subseteq X \cap T(q)$. Pokazaliśmy, że $|S(q) \cap X| \geqslant 2$ oraz $|T(q) \cap X| \geqslant 2$. Z uwagi na to, że X jest podprzestrzenią Grassmanna, z warunku G2 zastosowanego do X, $S(q)$ i $T(q)$ dostajemy $q \subseteq X$. Ponieważ $U \in q$, więc otrzymujemy stąd, że $U \in X$, co kończy nasz dowód. $\square$

Lemat 3.11. *Niech X będzie taką co najmniej dwuelementową podprzestrzenią Grassmanna w $\mathbf{P}_k(V)$, że $X \subseteq [Z, Y]_k$ dla Z, Y jak w lemacie 3.9. Wówczas $[Z, Y]_k \subseteq X$.*

Dowód. Niech X będzie taką podprzestrzenią Grassmanna jak w założeniach. Weźmy dowolne $U \in [Z, Y]_k$. Rozważmy punkt $W \in X$. Z założeń do naszego lematu widzimy, że $W \in [Z, Y]_k$. Z lematu 3.3 możemy zauważyć, że podprzestrzeń odcinkowa $[Z, Y]_k$ jest spójna. Zatem istnieje ciąg $D_0, D_1, ..., D_r$, który łączy U i W, to znaczy $D_0 = W$, $D_r = U$ oraz $D_{i-1} \sim D_i$ dla $i = 1, \ldots, r$. Na mocy lematu 3.10 dostajemy, że $D_1 \in X$. Stosując go r razy otrzymujemy, że $D_2, \ldots, D_r \in X$. Zatem, $U = D_r \in X$, więc z dowolności wyboru U mamy, że

$$[Z, Y]_k \subseteq X.$$

W ten sposób dowód jest zakończony. $\square$

Zbiór pusty oraz jednoelementowy jest podprzestrzenią odcinkową bo możemy odpowiednio dobrać końce odcinka $[Z, Y]_k$. Na przykład $\emptyset = [Z, Y]_k$, gdzie $Z \nsubseteq Y$, natomiast $\{U\} = [U, U]_k$ dla $U \in \mathrm{Sub}_k(V)$. Dlatego, podsumowując, z lematów 3.9 oraz 3.11 wynika, że podprzestrzeń Grassmanna jest podprzestrzenią odcinkową. W ten sposób, uwzględniając lemat 3.4, nasze główne twierdzenie 3.2 zostało udowodnione.

Bibliografia

[1] A. M. Cohen, *Point-line spaces related to buildings*, Handbook of incidence geometry, F. Buekenhout, Ed., North-Holland, Amsterdam, 1995, 647-737.

[2] E. F. Dentice, *A characterization of Grassmann spaces of index h of a projective space*, Europ. J. Combinatorics 23 (2002), 891-898.

[3] M. Pankov, *Geometry of semilinear embeddings: Relations to graphs and codes*, World Scientific, New Jersey, 2015.

[4] M. Pankov, *Grassmannians of classical buildings*, Algebra and Discrete Mathematics Vol. 2, World Scientific, New Jersey, 2010.

[5] M. Żynel, *Correlations of spaces of pencils*, J. Appl. Logic **10** (2012), no. 2, 187-198.

[6] M. Żynel, *Rzutowania w kracie podprzestrzeni przestrzeni wektorowej*, rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Warszawa, 2003.