Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyczno-Fizyczny

Instytut Matematyki

Justyna Żynel

Rzutowania w kracie podprzestrzeni przestrzeni afinicznej

Praca została napisana
pod kierunkiem
dr. Mariusza Żynela

Białystok 2005

Spis treści

Wstęp

W pracy [8] znaleźć można uogólnienia klasycznych rzutów w przestrzeni rzutowej na kratę rzutową. Celem tej pracy jest zbudowanie aparatu do rzutowania w kracie afinicznej i znalezienie związku z wynikami cytowanej pracy. Wszystkie rozważania dotyczące relacji zachodzących w przestrzeni afinicznej staram się prowadzić konsekwentnie w terminach kratowych.

W rozdziale 1 podaję podstawowe własności kraty podprzestrzeni przestrzeni afinicznej oraz definicje kluczowych dla pracy pojęć: sąsiedniości i równoległości elementów kraty.

W następnym rozdziale wprowadzam pojęcie odcinka kraty i dowodzę potrzebne dalej własności tych odcinków.

Rozdział 3 zaczynam od wprowadzenia pojęcia quasi-pęku odcinków kraty afinicznej. W 3.2 charakteryzuję minimalne pęki odcinków kraty, które dalej nazywam krótko pękami odcinków (definicja 3.3). Przyjęte przeze mnie określenie pęku odcinków obejmuje pęki zwane właściwymi oraz tak zwane wafle. Terminologia zapożyczona jest z kraty rzutowej (por. [8]). Dalej dokonuję klasyfikacji pęków odcinków i każdemu przypisuje jeden z jedenastu typów.

Drobiazgowa analiza własności pęków odcinków pozwoliła mi zdefiniować pewną klasę rzutów. Dla każdego z typów pęków odcinków rzut określa się formalnie inaczej, ze względu na specyficzne właściwości danego typu pęku. I tak dla wafli, w 4.2, zdefiniowany jest ślizg. Ślizgi wyznaczone są jednoznacznie przez samą strukturę wafla (por. 4.1). Kolejnym zdefiniowanym w 4.7 rzutem jest ślizg równoległy w pękach odcinków typu pr\pr, l\pr, pr\s i l\s. W 4.9 podana jest definicja następnego rzutu – uogólnionego rzutu środkowego dla pęków właściwych odcinków typu różnego od 0\pw. Dla pęków typu 0\pw i 0\pr w 4.17 określam uogólniony rzut równoległy.

Na koniec rozdziału o rzutach pokazuje, korzystając z własności rzutów kratowych obciętych do uniwersum przestrzeni jeżowych, że zdefniniowane wcześniej rzuty w kracie afinicznej można traktować jako obcięcia rzutów w domknięciu rzutowym przestrzeni afinicznej. W 4.20 podaję jakiej klasie rzutów w kracie rzutowej odpowiadają rozpatrywane w mojej pracy rzuty w kracie afinicznej.

Rozdział 1

Krata podprzestrzeni przestrzeni afinicznej

Zbiorem *częściowo uporządkowanym* nazywamy parę $\langle L, \leqslant \rangle$, gdzie L jest zbiorem, a $\leqslant$ relacją binarną na L (podzbiorem L^2) spełniającą warunki:

1. $x \leqslant x$ dla każdego $x \in L$,
2. jeśli $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$ to $x = y$,
3. jeśli $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$ to $x \leqslant z$.

Częściowo uporządkowany zbiór $\mathfrak{L} = \langle L, \leqslant \rangle$ jest *kratą*, jeśli każda para elementów ma najmniejsze górne ograniczenie i największe dolne ograniczenie. Dla $x, y \in L$, z jest ich *najmniejszym górnym ograniczeniem*, gdy $x \leqslant z, y \leqslant z$ i jeśli $x, y \leqslant t$, to $z \leqslant t$. Element w jest *największym dolnym ograniczeniem* x i y, gdy $w \leqslant x, w \leqslant y$ i z $u \leqslant x, y$ wynika $u \leqslant w$. Najmniejsze górne ograniczenie (*kres górny*)x i y w kracie $\mathfrak{L}$ zapisujemy $x \vee y$, a ich największe dolne ograniczenie (*kres dolny*) $x \wedge y$. Operacje kresów $\wedge$ i $\vee$ są wzajemnie definiowalne z relacją częściowego porządku $\leqslant$. Można zatem traktować kratę $\mathfrak{L}$ jak algebrę $\langle L, \wedge, \vee \rangle$. Dla elementów a, b kraty $\mathfrak{L}$ piszemy również $a < b$, gdy $a \leqslant b$ i $a \neq b$.

Krata $\mathfrak{L}$ jest ograniczona jeśli posiada element najmniejszy, który oznaczamy $\mathbf{0}$, oraz element największy oznaczany jako $\mathbf{1}$. Element a jest *poprzednikiem* b (b jest *następnikiem* a) w $\mathfrak{L}$, co zapisujemy $a \prec b$, jeśli $a < b$ i nie istnieje element c taki, że $a < c < b$. Używamy oznaczenia $a \preceq b$, gdy $a \prec b$ lub $a = b$. Piszemy czasem również $a \prec\!\!\!\prec b$, gdy $a < b$ i jeśli $a < c \leqslant d < b$, to $c = d$. Jeśli $\mathfrak{L}$ jest karatą z $\mathbf{0}$, to A nazywamy *atomem* $\mathfrak{L}$, jeśli $\mathbf{0}$ jest poprzednikiem A. Kratę nazywamy *atomową* jeśli każdy jej niezerowy element jest kresem górnym atomów poniżej niego. Krata $\mathfrak{L}$ jest zupełna, jeśli każdy podzbiór $H \subset L$ posiada kres górny i kres dolny.

Niech $\mathfrak{L}$ będzie kratą zupełną, zaś a elementem $\mathfrak{L}$. Wtedy a nazywamy *zwartym*, jeśli z faktu, że $a \leqslant \bigvee X$ dla $X \subseteq L$, wynika $a \leqslant \bigvee Y$ dla pewnego skończonego $Y \subseteq X$.

Kratę $\mathfrak{L}$ nazywamy półmodularną, gdy dla dowolnych $a, b, c \in L$

$$\text{jeśli} \quad a \prec b, \quad \text{to} \quad a \vee c \preceq b \vee c. \tag{1.1}$$

W [1] krata półmodularna zdefiniowana jest innym warunkiem, który tutaj traktujemy jako jej własność. Otóż krata jest półmodularna wtw., gdy

$$\text{jeśli} \quad a \wedge b \prec a, b, \quad \text{to} \quad a, b \prec a \vee b \tag{1.2}$$

dla dowolnych $a, b, c \in L$.

Innymi słowy w kracie półmodularnej (i tylko w takiej) jeśli dwa elementy mają wspólny poprzednik, to mają również wspólny następnik. Warunek ten ma bardzo naturalną interpretację geometryczną, mianowicie mówi się, że jeśli proste przecinają się, to leżą na płaszczyźnie(są współpłaszczyznowe, wyznaczają płaszczyznę), lub ogólniej, jeśli dwie k-wymiarowe podprzestrzenie mają przekrój (k-1)-wymiarowy, to rozpinają przestrzeń (k+1)-wymiarową.

Przykładem kraty półmodularnej jest pięciokąt. Zauważmy, że krata podprzestrzeni, zarówno przestrzeni afinicznej jak i rzutowej, jest półmodularna.

Ważną klasę krat stanowią kraty modularne, czyli takie, gdzie

$$\text{jeśli} \quad a < c, \quad \text{to} \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c. \tag{1.3}$$

dla wszystkich $a, b, c \in L$.

Pięciokąt nie jest kratą modularną. Co więcej, krata jest modularna wtw., gdy nie zawiera podkraty izomorficznej z pięciokątem.

W tej pracy interesować nas będą kraty geometryczne. Krata geometryczna jest to półmodularna, zupełna krata atomowa, gdzie atomy są zwarte. Kraty geometryczne dzielą się na modularne i niemodularne. W pierwszej z klas znajduje się krata podprzestrzeni przestrzeni rzutowej, którą dla desargeusowskich przestrzeni rzutowych można utożsamić z kratą podprzestrzeni przestrzeni wektorowej. Takie kraty nazywa się krótko *kratami rzutowymi*. W drugiej klasie znajdują się *kraty afiniczne*, tzn. kraty podprzestrzeni przestrzeni afinicznych. W obu tych klasach krat geometrycznych spełniony jest warunek (1.2). Zasadnicza różnica pomiędzy kratami geometrycznymi modularnymi i niemodularnymi polega na tym, że w kratach modularnych spełniony jest również warunek (zob. [1])

$$\text{jeśli} \quad a, b \prec a \vee b \quad \text{to} \quad a \wedge b \prec a, b. \tag{1.4}$$

W języku geometrii warunek ten mówi w szczególności, że na płaszczyźnie każde dwie proste przecinają się. Zatem spełniony jest w kratach rzutowych. Wiemy natomiast, że w przestrzeni afinicznej, na płaszczyźnie proste przecinają się albo są równoległe.

Rozważania podjęte w pracy opierać się będą na pojęciu kraty afinicznej. Określimy teraz dokładnie przedmiot naszych rozważań. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad niekoniecznie przemiennym ciałem K. Przez $\mathrm{Sub}(V)$ oznaczamy rodzinę wszystkich podprzestrzeni przestrzeni V, natomiast

$$\mathcal{H}(V) = \Big\{a + S \colon a \in V, \ S \in \mathrm{Sub}(V)\Big\}$$

to zbiór wszystkich warstw nad V. Ponieważ dla warstwy $U = a+S$ jej *podprzestrzeń kierunkowa* S jest wyznaczona jednoznacznie, możemy mówić o wymiarze warstw; przyjmujemy $\dim U = \dim S$. Zbiór wszystkich k-wymiarowych podprzestrzeni V oznaczamy jako $\mathrm{Sub}_k(V)$, natomiast zbiór wszystkich k-wymiarowych warstw to

$$\mathcal{H}_k(V) = \Big\{a + S \colon a \in V,\ S \in \mathrm{Sub}_k(V)\Big\}.$$

Przestrzenią afiniczną nazywamy stukturę

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(V) = \langle V, \mathcal{H}_1(V)\rangle.$$

Elementy V nazywamy *punktami*, a elementy $\mathcal{H}_1(V)$ *prostymi* przestrzeni $\mathfrak{A}$.

Rozważania, które prowadzimy w tej pracy oparte są na pojęciu kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ podprzestrzeni przestrzeni $\mathfrak{A}$. Formalnie krata $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ to zbiór $\hat{\mathcal{H}}(V) := \mathcal{H}(V) \cup \{\emptyset\}$ wraz z relacją częściowego porządku $\leqslant$, albo równoważnie, algebra

$$\Big\langle \hat{\mathcal{H}}(V),\ \wedge\ , \vee \Big\rangle,$$

gdzie

$$\begin{aligned} U \wedge W &= U \cap W, \\ U \vee W &= u + \langle S, T, u - w\rangle, \end{aligned}$$

jak wiadomo z wykładu Geometrii elementarnej, są kresami dolnym i górnym dla wszystkich $U, W \in \hat{\mathcal{H}}(V)$ takich, że $U = u + S, W = w + T,\ u, w \in V$, $S, T \in \mathrm{Sub}(V)$.

Atomy w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ to jednoelementowe zbiory punktów $\mathfrak{A}$. Czasem utożsamiamy atomy $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ z punktami $\mathfrak{A}$, co nie powinno prowadzić do nieporozumień.

Zanotujmy kilka podstawowych faktów dotyczących kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, na które często powołujemy się w pracy.

Fakt 1.1. [1, Roz. IV.1] Jeśli A jest atomem kraty geometrycznej, to odcinek[1] $[A, \mathbf{1}]$ niesie strukturę modularnej kraty geometrycznej.

Z powyższego faktu wynika, że odcinek $[A, \mathbf{1}]$ w kracie afinicznej, gdzie A to atom tej kraty, jest (jako krata z dokładnością do izomorfizmu) kratą rzutową. Takie odcinki będziemy nazywać krótko rzutowymi.

Fakt 1.2. *Niech U, W, B będą elementami kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Jeśli $U \wedge W \neq \mathbf{0}$ i $U \preceq B$, to $U \wedge W \preceq B \wedge W$.*

DOWÓD. Z założenia $U \wedge W \neq \mathbf{0}$, skąd $U \wedge W$ jest co najmniej punktem. Istnieje więc atom A w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ taki, że $U, W, B \in [A, \mathbf{1}]$ i na mocy 1.1 odcinek $[A, \mathbf{1}]$ niesie strukturę kraty rzutowej, w której prawdziwe jest twierdzenie [2, Tw. 4, Roz. IV.1], że jeśli $U \preceq B$, to $U \wedge W \preceq B \wedge W$. □

[1] Zbiór elementów kraty pomiędzy A i $\mathbf{1}$, wraz z A i $\mathbf{1}$. Formalna definicja znajduje się w Roz. 2.

Lemat 1.3. *Niech H, U_1, U_2, B będą elementami kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, takimi, że $U_1 \neq U_2$.*

(i) *Jeśli $H \prec U_1, U_2$, to $H = U_1 \wedge U_2$,*

(ii) *Jeśli $U_1, U_2 \prec B$, to $B = U_1 \vee U_2$.*

Dowód. (i) Wynika bezpośrednio z własności (1.2).

(ii) Ponieważ $U_1, U_2 \subseteq B$ oraz $U_1 \vee U_2 \subseteq B$, to mamy $U_1, U_2 \subseteq U_1 \vee U_2 \subseteq B$, a ponieważ $U_1, U_2 \prec B$, to musiałoby być $U_1 = U_2 = U_1 \vee U_2$, co jest sprzeczne z założeniem $U_1 \neq U_2$, lub $U_1 \vee U_2 = B$, co daje tezę. □

Fakt 1.4. *Jeśli A jest atomem kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ i $U \in \mathcal{H}(V)$ to albo $A \subseteq U$, albo $U \prec U \vee A$.*

Definicja 1.5. Elementy U, W w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ są *sąsiednie* i piszemy $U \sim W$, gdy posiadają wspólny poprzednik (posiadają wówczas również wspólny następnik, co wynika z (1.2)). Dwa różne, sąsiednie elementy wyznaczają *pęk właściwy*, to znaczy zbiór postaci

$$\mathbf{p}(H, B) = \{X \in \mathcal{H}(V) \colon H \prec X \prec B\} \tag{1.5}$$

gdzie $H = U \wedge W$ i $B = U \vee W$

Dla atomów $A_1 = \{a_1\}, A_2 = \{a_2\}$ zawsze zachodzi $A_1 \sim A_2$. Oznacza to współliniowość punktów a_1, a_2 w wyjściowej przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$.

Definicja 1.6. Elementy U, W w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ nazywamy równoleglymi, co zapisujemy $U \parallel W$, gdy posiadają wspólny następnik i $U \wedge W = \mathbf{0}$, lub gdy $U = W$. Dwa różne, równoległe elementy wyznaczają *pęk równoległych*, to znaczy zbiór postaci

$$\mathbf{p}^*(U, B) = \{X \in \mathcal{H}(V) \colon U \parallel X \prec B\} \tag{1.6}$$

Zauważmy, że wprowadzona relacja równoległości odpowiada równoległości w przestrzeni $\mathfrak{A}$.

Stwierdzenie 1.7. *Niech $U = u + S, W = w + T$, gdzie $u, w \in V$ i $S, T \in$* Sub(V). *Wówszas*

$$U \parallel W \quad \textit{wtw. gdy} \quad S = T.$$

Dowód. Możemy przyjąć, że $U \neq W$, gdyż dla $U = W$ mamy $U \parallel W$ oraz $S = T$.

$\Rightarrow$: Zauważmy, że $U \vee W = u + \langle S, T, u - w \rangle$. Na mocy 1.6 $U \vee W$ jest następnikiem U i W. Stąd $\dim U = \dim W =: k$ oraz musi zajść jeden z następujących przypadków:

1. $S = T$ i $u - w \notin S, T$.
   W tym wypadku teza jest natychmiastowa.

2. $\dim S \wedge T = k-1$ i $u - w \in S$.
   Wówczas, jeśli weźmiemy $x = w + (u-w)$, to z jednej strony $x \in w + S = W$, z drugiej natomiast $x = u \in U$. Zatem $x \in U \wedge W$, co przeczy założeniu, że $U \parallel W$ i $U \neq W$.

3. $\dim S \wedge T = k-1$ i $u - w \in T$.
   Sprzeczne, na podstawie rozumowania jak w p. 2.

$\Leftarrow$: Przy założeniu, że $S = T$ mamy wykazać, że $U \parallel W$, czyli zgodnie z 1.6, że $U \wedge W = \mathbf{0}$ i $U, W \prec U \vee W$.

Zgodnie z założeniem mamy $U = u + S, W = w + S$. Przyśćmy, że istnieje $x \in U \wedge W$. Mamy wówczas $x = u + s_1 = w + s_2$, gdzie $s_1, s_2 \in S$. Stąd $u - w = s_1 - s_2 \in S$, a co za tym idzie $U = W$. Przeczy to przyjętemu na wstępie założeniu, że $U \neq W$. Zatem $U \wedge W = \mathbf{0}$.

Teraz zauważmy, że $U \vee W = u + \langle S, u - w\rangle$. Ponieważ $u - w \notin S$, to $U \vee W$ musi być następnikiem U i W, ze względu na wymiary. □

Definicja 1.8. Mówimy, że dwa elementy U i W kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, są *współpękowe*, jeśli są sąsiednie lub równoległe. Dla współpękowych i różnych elementów U, W kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ definiujemy pęk wyznaczony przez U, W, jako zbior

$$\overline{U, W} = \begin{cases} \mathbf{p}(U \wedge W, U \vee W), & \text{gdy} \quad U \sim W, \\ \mathbf{p}^*(U, U \vee W), & \text{gdy} \quad U \parallel W. \end{cases}$$

Z definicji 1.5 i 1.6 wynika, że współpękowe elementy kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ są podprzestrzeniami $\mathfrak{A}$ o tym samym wymiarze. Zauważmy też, że zbiór punktów, traktowanych jak atomy $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, na prostej z przestrzeni $\mathfrak{A}$ jest zarówno pękiem właściwym jak i pękiem równoległych.

Lemat 1.9. *Jeśli U i W są elementami kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ posiadającymi wspólny następnik, takimi że $U \wedge W \neq \mathbf{0}$, to U i W posiadają wspólny poprzednik i w konsekwencji $U \sim W$.*

Dowód. Z faktu 1.1 wynika, że U, W są w pewnej podkracie modularnej, w której posiadają wspólny następnik. Zgodnie z (1.4) mają też wspólny poprzednik, a co za tym idzie z 1.5 są sąsiednie. □

Wniosek 1.10. *Jeśli U i W są elementami kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ posiadającymi wspólny następnik, to są równoległe lub sąsiednie, czyli zawsze są współpękowe.*

Zauważmy, że wniosek 1.10 mówi w szczególności, że na płaszczyźnie afinicznej proste są albo równoległe, albo przecinają się. Jest to znany fakt w geometrii afinicznej.

Lemat 1.11. *Jeśli U_1, U_2, U_3 są parami sąsiednimi elementami $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, to posiadają one albo wspólny poprzednik, albo następnik.*

Dowód. Jeśli $U_i = U_j$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2, 3\}$ takich, że $i \neq j$, to teza jest natychmiastowa. Załóżmy więc, że U_1, U_2, U_3 są parami różne.

Niech $H_1 = U_2 \wedge U_3$, $H_2 = U_1 \wedge U_3$, $H_3 = U_1 \wedge U_2$. Rozważmy sytuacje gdy którekolwiek dwa elementy spośród H_i są sobie równe. Jeśli $H_1 = H_2$, to $H_1 = H_1 \wedge H_2 = U_1 \wedge U_2 \wedge U_3$. Zatem $H_1 \subseteq H_3$ i ponadto $H_1, H_3 \prec U_2$ z 1.5, tak więc $H_1 = H_3$, czyli $H_1 = H_2 = H_3$. Oznacza to, że H_1 jest wspólnym poprzednikiem U_1, U_2, U_3 i dowód jest zakończony. W przypadku, gdy $H_1 = H_3$ lub $H_2 = H_3$ rozumowanie jest analogiczne.

Załóżmy, że H_1, H_2, H_3 są parami różne.

$$H_1 \wedge H_2 = U_1 \wedge U_2 \wedge U_3 = H_1 \wedge H_3 = H_2 \wedge H_3$$

Jeśli $H_i \wedge H_j \neq \mathbf{0}$, to na podstawie 1.1 U_1, U_2, U_3 leżą w podkracie modularnej i lemat jest prawdziwy. Załóżmy więc, że $H_i \wedge H_j = \mathbf{0}$ dla $i, j \in \{1, 2, 3\}$ i $i \neq j$. Ponieważ $H_i, H_j \prec U_{6-i-j}$, więc z definicji równoległości 1.6 otrzymujemy $H_i \parallel H_j$. Zatem możemy przyjąć, że $H_i = h_i + S$ dla pewnego S. Dalej mamy

$$\begin{aligned} U_1 &= H_2 \vee H_3 = h_3 + \langle S, h_2 - h_3 \rangle = \langle S, h_2 \rangle, \\ U_2 &= H_1 \vee H_3 = h_3 + \langle S, h_1 - h_3 \rangle = \langle S, h_1 \rangle, \\ U_3 &= H_1 \vee H_2 = h_1 + \langle S, h_1 - h_2 \rangle. \end{aligned}$$

Bez zmniejszania ogólności można przyjąć $h_3 = 0$ (przesuwając cały układ o translacje $\tau_{-h_3} \colon x \leadsto x - h_3$). Zauważmy, że h_1, h_2 musza być liniowo niezależne nad S.

Pokażemy, że U_1, U_2, U_3 posiadają wspólny następnik. Ponieważ $U_1, U_2 \prec U_1 \vee U_2$, więc $U_1 \vee U_2 = \langle S, h_2 \rangle \vee \langle S, h_1 \rangle = \langle S, h_1, h_2 \rangle$. Stąd

$$\begin{aligned} (U_1 \vee U_2) \vee U_3 = \langle S, h_1, h_2 \rangle \vee (h_1 + \langle S, h_1 - h_2 \rangle) = \\ = h_1 + \langle S, h_1, h_2, S, h_1 - h_2 \rangle = \langle S, h_1, h_2 \rangle. \end{aligned}$$

Znaleźliśmy takie $B := U_1 \vee U_2 \vee U_3 = \langle S, h_1, h_2 \rangle$, że $U_1, U_2, U_3 \prec B$, zatem z uwagi na fakt, że h_1, h_2 są liniowo niezależne nad S, B jest wspólnym następnikiem U_1, U_2, U_3. □

Lemat 1.12. *Jeśli U_1, U_2, U_3 są elementami, ale nie atomami, kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ takimi, że $U_1 \parallel U_3$ i $U_1 \sim U_2 \sim U_3$, to posiadają wspólny następnik.*

Dowód. Elementy U_1, U_2, U_3 nie są atomami, więc $U_1 \wedge U_2 \neq \mathbf{0} \neq U_2 \wedge U_3$. Bez zmniejszania ogólnosci można przyjąć, że $U_1, U_2 \in \mathrm{Sub}(V)$ (wystarczy przesunąć cały układ o translację τ_x, gdzie $x \in U_1 \wedge U_2$ i $x \neq \Theta$; taki x istnieje, ponieważ $U_1 \wedge U_2 \neq \mathbf{0}$). Jeśli $U_1 = U_3$ to dowód jest zakończony, bo U_1 i U_2 mają wspólny następnik z definicji sąsiedniości. Zakładamy więc, że $U_1 \neq U_3$. Z założenia $U_1 \parallel U_3$ i z 1.8 możemy przyjąć, że $U_3 = u + U_1$, ponieważ $U_2 \wedge U_3 \neq \mathbf{0}$ więc możemy wziąć $w \in U_2 \wedge U_3$, taki że $w \neq \Theta$. Nie możliwe jest aby $w \in U_1$, gdyż mielibyśmy $U_1 \parallel U_3$ i $w \in U_1 \wedge U_3$, a więc $U_1 = U_3$, co jest sprzeczne z wcześniejszym założeniem. Zauważmy, że $u, w \in U_3$. Zatem $u - w \in U_1$. Mamy $u = w + (u - w) \in U_2 + U_1$, a więc $U_1 \vee U_2 = \langle (U_1 \vee U_2), U_1, u \rangle = U_1 \vee U_2 \vee U_3$. Zatem $U_1 \vee U_2$ jest wspólnym następnikiem U_1, U_2, U_3. □

W przestrzeni afinicznej, jeśli dla podprzestrzeni U, W istnieje taka translacja τ, że $\tau(U) \subseteq W$ to piszemy $U \subseteq\parallel W$. Zauważmy, że $\tau^{-1}(W)$ jest wtedy podprzestrzenią równoległą do W zawierającą U. Uzasadnia to poniższą definicję.

Definicja 1.13. Niech U, W będą takimi elementami kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, że $U \subseteq\parallel W$. Element $U * W$ jest elementem równoległym do W zawierającym U.

W szczególnym przypadku, gdy U jest punktem a W prostą w $\mathfrak{A}$, to $U * W$ jest prostą równoległą do prostej W, przechodzącą przez U. Operacja $*$ jest dobrze określona dla dowolnego punku i prostej w przestrzeni z równoległością spełniającą postulat Euklidesa.

Operację $*$ można wyrazić w terminach kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$:

$$U' = U * W \quad \text{wtw. gdy} \quad U \subseteq U' \quad \text{i} \quad U' \parallel W. \tag{1.7}$$

Lemat 1.14. *Niech U, W będą takimi elementami $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, że $U \subseteq\parallel W$, wtedy*

$$U \subseteq U * W \subseteq U \vee W.$$

Dowód. Oznaczmy $Z := U * W$. Z definicji 1.13 mamy $U \subseteq Z$. Niech $U = u+S$ i $W = w+T$. Wtedy $U \vee W = u+\langle S, T, u-w\rangle$, natomiast $Z = u+\langle S, T\rangle$, stąd $U * W \subseteq U \vee W$. ☐

Następny lemat będzie potrzebny do wykazania poprawności defninicji nowego pojęcia: *walca*.

Lemat 1.15. *Niech U będzie elementem $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ i L prostą w $\mathfrak{A}$. Jeśli L_1, L_2 są takimi prostymi w $\mathfrak{A}$, że $L_i \parallel L$ i $L_i \cap U \neq \emptyset$ dla $i = 1, 2$, to*

$$U \vee L_1 = U \vee L_2.$$

Dowód. Nie zmniejszając ogólności możemy przyjąć, że $L \in \mathrm{Sub}_1(V)$. Niech $a \in V$, $S \in \mathrm{Sub}(V)$ takie, że $U = a + S$ oraz $a_i \in V$ takie, że $L_i = a_i + L$, gdzie $i = 1, 2$. Z założenia mamy b_i takie, że $b_i \in L_i \cap U$. Stąd

$$b_i = a + s_i,$$

dla pewnych $s_i \in S$. Zgodnie z określeniem kresu górnego w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ mamy

$$\begin{aligned} U \vee L_1 = b_1 + \langle S, L\rangle = a + s_1 + \langle S, L\rangle = a + \langle S, L\rangle = \\ a + s_2 + \langle S, L\rangle = b + \langle S, L\rangle = U \vee L_2, \end{aligned}$$

co kończy dowód. ☐

Definicja 1.16. Niech U będzie elementem $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ i L prostą w $\mathfrak{A}$. *Walec o podstawie U w kierunku L* to

$$U \varovee L := U \vee L'$$

dla pewnej prostej L' takiej, że $L' \parallel L$ i $L' \cap U \neq \emptyset$.

Fakt 1.17. *Jeśli U jest elementem $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, a L prostą w $\mathfrak{A}$, to*

$$U \preceq U \varovee L.$$

Rozdział 2

Odcinki kraty

Odcinkiem domkniętym kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ nazywamy zbiór postaci

$$[Z, Y] := \Big\{U \in \hat{\mathcal{H}}(V)\colon Z \subseteq U \subseteq Y\Big\}, \tag{2.1}$$

gdzie $Z, Y \in \hat{\mathcal{H}}(V)$. Mówimy, że elementy U, W są *porównywalne* w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ jeśli $U \subseteq W$ lub $W \subseteq U$. *Łańcuch* w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ jest to podkrata $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, w której każde dwa elementy są porównywalne. Każdemu odcinkowi $\mathcal{X} = [Z, Y]$ przyporządkowujemy jego *długość* $l(\mathcal{X})$ w następujący sposób: $l(\mathcal{X})$ jest to długość maksymalnego łańcucha zawartego w $\mathcal{X}$, o ile istnieje taki łańcuch skończonej długości, lub $l(\mathcal{X}) = \infty$ w przeciwnym razie. Poprawność definicji usprawiedliwia fakt, że w kracie półmodularnej, skończonej długości, dwa maksymalne łańcuchy mają tą samą długość.

Jeśli $U \in \mathcal{H}(V)$ to istnieje dokładnie jedna podprzestrzeń $S \in \mathrm{Sub}(V)$ taka, że $U = u + S \in \mathcal{H}(V)$ dla pewnego $u \in V$. Możemy zatem przyjąć, że $\dim U := \dim S$. *Wysokość* elementu U w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, oznaczana przez $h(U)$, to długość odcinka $[\mathbf{0}, U]$. Zauważmy, że $\dim U = h(U) - 1$. Natomiast $\operatorname{codim} U$ to długość odcinka $[U, \mathbf{1}]$.

W pracy rozważamy także *odcinki otwarte*, tzn. zbiory postaci

$$]Z, Y[:= \Big\{U \in \mathcal{H}(V)\colon Z \subsetneq U \subsetneq Y\Big\}, \tag{2.2}$$

gdzie $Z, Y \in \hat{\mathcal{H}}(V)$.

Mówimy, że odcinek jest *niezdegenerowany* jeśli zawiera co najmniej dwa różne elementy. Zauważmy, że niepusty odcinek jest niezdegenerowany. Odcinek nazywamy *nietrywialnym* jeśli zawiera co najmniej trzy różne elementy. Niezdegenerowane odcinki otwarte są nietrywialne.

Zauważmy, że pęk właściwy $\mathbf{p}(H, B)$ to odcinek otwarty $]H, B[$. Zatem odcinki otwarte są uogólnieniem pęków właściwych. Nasuwa się pytanie jak "uogólnić" pęk równoległych?

Odcinkiem afinicznym w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ nazywamy zbiór postaci

$$[Z, Y]^* := \Big\{U \in \hat{\mathcal{H}}(V)\colon Z \subseteq\parallel U \subseteq Y\Big\}, \tag{2.3}$$

gdzie $Z, Y \in \hat{\mathcal{H}}(V)$ takie, że Z jest co najmniej prostą w $\mathfrak{A}$. Dalej w pracy nie zajmujemy się takimi odcinkami, ale jak się później okaże w 4.20 są one potrzebne aby scharakteryzować obcięcia rzutów między odcinkami kraty rzutowej do uniwersum odpowiedniej kraty afnicznej.

Koniec Z odcinka nazywamy *wierzchołkiem*, natomiast koniec Y *podstawą*.

Fakt 2.1. *Niech Z, Y będą elementami kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Jeśli $\mathcal{X}$ jest niezdegenerowanym odcinkiem domkniętym lub otwartym o wierzchołku Z i podstawie Y, to*

$$\bigcap \mathcal{X} = Z \qquad i \qquad \bigcup \mathcal{X} = Y.$$

Powyższy fakt jest prawdziwy dla wszystkich krat zupełnych, a więc w szczególności dla naszej kraty. Tak więc odcinki w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ jednoznacznie wyznaczają swoje końce. Odcinki są przykładami wypukłych podkrat kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ (por. [2, Roz. I.3]). Własność tę wykorzystuje poniższe twierdzenie.

Stwierdzenie 2.2. *Niech $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$, $i = 1, 2$ będą odcinkami kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$.*

(i) $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = [Z_1 \vee Z_2, Y_1 \wedge Y_2]$,

(ii) $\langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle = [Z_1 \wedge Z_2, Y_1 \vee Y_2]$,

gdzie $\langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle$ jest najmniejszym odcinkiem domkniętym zawierającym $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$.

Dowód. (i) $\subseteq$: Wystarczy zauważyć, że dla każdego $U \in \mathcal{X}_1 \wedge \mathcal{X}_2$ spełnione są inkluzje $Z_1, Z_2 \subseteq U \subseteq Y_1, Y_2$, czyli $Z_1 \vee Z_2 \subseteq U \subseteq Y_1 \wedge Y_2$.

$\supseteq$: Niech $U \in [Z_1 \vee Z_2, Y_1 \wedge Y_2]$. Wtedy $Z_1, Z_2 \subseteq U \subseteq Y_1, Y_2$, a zatem $U \in \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$.

(ii) Niech $\mathcal{X}$ będzie dowolnym domkniętym zawierającym $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$. Wówczas $Z_1, Z_2 \in \mathcal{X}$ i $Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}$, a ponieważ $\mathcal{X}$ jest podkratą to $Z_1 \wedge Z_2 \in \mathcal{X}$ i $Y_1 \vee Y_2 \in \mathcal{X}$. Stąd $[Z_1 \wedge Z_2, Y_1 \vee Y_2] \subseteq \mathcal{X}$, gdyż $\mathcal{X}$ jest podkratą wypukłą. $\square$

Lemat 2.3. *Niech p będzie dowolnym pękiem w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, wówczas $p = \overline{U_1, U_2}$ dla dowolnych $U_1, U_2 \in p$, takich, że $U_1 \neq U_2$.*

Dowód. Niech p będzie dowolnym pękiem i $U_1, U_2 \in p, U_1 \neq U_2$. Na mocy definicji 1.8 rozważmy przypadek, gdzie p jest pękiem właściwym. Wówczas z definicji 1.5 $p = \overline{U, W}$ dla pewnych sąsiednich i różnych $U, W \in \mathcal{H}(V)$. Z określenia pęku właściwego

$$U \wedge W \prec U_1, U_2 \prec U \vee W.$$

Zatem z 1.3(i), (ii) mamy odpowiednio $U \wedge W = U_1 \wedge U_2$ i $U \vee W = U_1 \vee U_2$, a wtedy

$$\mathbf{p}(U, W) =]U \wedge W, U \vee W[=]U_1 \wedge U_2, U_1 \vee U_2[= \mathbf{p}(U_1, U_2).$$

Niech teraz p będzie pękiem równoległych, tzn. $p = \overline{U, W}$ dla pewnych $U, W \in \mathcal{H}(V)$ takich, że $U \parallel W$. Ponieważ

$$U_1, U_2 \prec U \vee W,$$

to z 1.3(ii) otrzymujemy $U \vee W = U_1 \vee U_2$. Mamy również $U \parallel W \parallel U_1 \parallel U_2$, a wtedy

$$\mathbf{p}^*(U,W) = \Big\{X \in \mathcal{H}_k(V) \colon U \parallel X \subset U \vee W\Big\} = \\ \Big\{X \in \mathcal{H}_k(V) \colon U_1 \parallel X \subset U_1 \vee U_2\Big\} = \mathbf{p}(U_1,U_2). \quad (2.4)$$

□

Lemat 2.4. *Niech p będzie dowolnym pękiem właściwym w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, wówczas jeśli $U_1, U_2 \in p \wedge [Z,Y]$ i $U_1 \neq U_2$, to $p \subseteq [Z,Y]$.*

Dowód. Z 2.3 mamy $p = \overline{U_1, U_2}$. Weźmy $U \in p$. Ponieważ odcinek $[Z,Y]$ jest wypukłą podkratą to

$$Z \subseteq U_1 \wedge U_2 \prec U \prec U_1 \vee U_2 \subseteq Y,$$

co oznacza, że $U \in [Z,Y]$. □

Lemat 2.5. *Niech p będzie pękiem oraz U_1, U_2 elementami w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ takimi, że $p = \overline{U_1, U_2}$.*

(i) *Jeśli $W \subseteq U_1, U_2$, to dla każdego $U \in p$ mamy $W \subseteq U$.*

(ii) *Jeśli $U_1, U_2 \subseteq W$, to dla każdego $U \in p$ mamy $U \subseteq W$.*

Dowód. (i) Jeśli $W \neq \mathbf{0}$ to p jest pękiem właściwym. Zgodnie z definicją pęku właściwego w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ mamy $p =]U_1 \wedge U_2, U_1 \vee U_2[$. Dla każdego $U \in p$ zachodzi więc $U_1 \wedge U_2 \subseteq U$. Z założenia natomiast wynika, że $W \subseteq U_1 \wedge U_2$, zatem z przechodniości inkluzji $W \subseteq U$.

Gdy $W = \mathbf{0}$ to zawsze $W \subseteq U$.

(ii) Zarówno dla pęku właściwego, jak i pęku równoległych mamy $U \subseteq U_1 \vee U_2$ dla dowolnego $U \in p$. Z założenia $U \subseteq U_1 \vee U_2 \subseteq W$ co kończy dowód. □

Lemat 2.6. *Niech $\mathcal{X} = [Z,Y]$ będzie odcinkiem w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ i niech U, W_1, W_2 będą elementami $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ takimi, że $W_1 \neq W_2$ i $W_1, W_2 \in \mathcal{X}$. Jeśli U jest współpękowy z W_1 i W_2, to $Z \subseteq U$ lub $U \subseteq Y$.*

Dowód. Jeśli $U = W_1$ lub $U = W_2$, to $U \in \mathcal{X}$ i dowód jest skończony. Załóżmy więc że $U \neq W_1$ i $U \neq W_2$. Możemy też założyć, że U, W_1, W_2 nie są atomami, ponieważ w przeciwnym wypadku $Z = \mathbf{0}$, a stąd $Z \subseteq U$, co kończy dowód.

Możliwe są następujące przypadki:

(a) $U \sim W_1, \quad U \sim W_2 \quad$ i $\quad W_1 \sim W_2$,

(b) $U \sim W_1, \quad U \sim W_2 \quad$ i $\quad W_1 \nsim W_2$,

(c) $U \sim W_1, \quad U \parallel W_2 \quad$ i $\quad W_1 \sim W_2$,

(d) $U \sim W_1, \quad U \parallel W_2 \quad \text{i} \quad W_1 \nsim W_2$,

(e) $U \parallel W_1, \quad U \parallel W_2 \quad \text{i} \quad W_1 \parallel W_2$.

Dalej kolejno je rozważamy.

(a): Elementy U, W_1, W_2 spełniają założenia 1.11, posiadają więc wspólny poprzednik bądź następnik. Zatem z 1.3 odpowiednio

$$\text{(i)} \quad U \wedge W_1 = U \wedge W_2 \quad \text{lub} \quad \text{(ii)} \quad U \vee W_1 = U \vee W_2.$$

W przypadku (i) mamy $U \prec U \vee W_i$ dla $i = 1, 2$, tak więc

$$U = (U \vee W_1) \wedge (U \vee W_2),$$

natomiast z założenia, że $W_1, W_2 \in \mathcal{X}$ mamy

$$Z \subseteq W_1 \wedge W_2 \subseteq (U \vee W_1) \wedge (U \vee W_2),$$

co razem daje $Z \subseteq U$.

W przypadku (ii) dualnie wykazuje się, że

$$U = (U \wedge W_1) \vee (U \wedge W_2) \subseteq W_1 \vee W_2 \subseteq Y.$$

(b): Zauważmy, że

$$U \wedge W_i \prec U, W_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2. \tag{2.5}$$

Gdyby $U \wedge W_1 = U \wedge W_2$, to z powyższego W_1, W_2 miałyby wspólny poprzednik, co przeczy założeniu, że W_1, W_2 nie są sąsiednie. Tak więc

$$U \wedge W_1 \neq U \wedge W_2.$$

Stąd oraz z (2.5) otrzymujemy

$$U = (U \wedge W_1) \vee (U \wedge W_2) \subseteq W_1 \vee W_2 \subseteq Y.$$

(c): Zgodnie z 1.12 elementy U, W_1, W_2 mają wspólny następnik. Stąd

$$U \subseteq U \vee W_1 = U \vee W_2 = W_1 \vee W_2 \subseteq Y.$$

(d): Zauważmy tutaj, że $W_1 \nparallel W_2$, gdyż w przeciwnym razie musiałoby być $U \parallel W_1$, a to możliwe jest jedynie wtedy gdy U, W_1, W_2 są atomami, co wykluczyliśmy na początku dowodu. Fakt ten, razem z założeniem $W_1 \nsim W_2$ oznacza, że W_1 i W_2 nie mogą mieć wspólnego następnika. Ponadto mamy tutaj

$$U, W_i \prec U \vee W_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2. \tag{2.6}$$

Gdyby $U \vee W_1 = U \vee W_2$, to W_1, W_2 miałyby wspólny następnik, co jest niemożliwe. Zatem

$$U \vee W_1 \neq U \vee W_2$$

i razem z (2.6) otrzymujemy

$$Z \subseteq W_1 \wedge W_2 \subseteq (U \vee W_1) \wedge (U \vee W_2) = U.$$

(e): Jeśli $Z = \mathbf{0}$, to $Z \subseteq U$. Jeśli natomiast $Z \neq \mathbf{0}$, to ponieważ $Z \subseteq W_1, W_2$ i $W_1 \parallel W_2$, więc $W_1 = W_2$, co przeczy założeniom lematu.

W każdym z przypadków (a)–(e) otrzymujemy $Z \subseteq U$ lub $U \subseteq Y$, tak więc dowód jest zakończony. □

Zgodnie z ogólna teorią, podprzestrzeń kowymiaru 1 to maksymalna, właściwa podprzestrzeń. W przypadku odcinków $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$, $i = 1, 2$ kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ mówimy, że odcinek $\mathcal{X}_1$ jest *kowymiaru* 1 w odcinku $\mathcal{X}_2$ jeśli albo $Z_1 = Z_2$ i $Y_1 \prec Y_2$, albo $Z_1 \succ Z_2$ i $Y_1 = Y_2$, czyli gdy $\mathcal{X}_2$ jest maksymalnym i właściwym pododcinkiem $\mathcal{X}_1$.

Mówimy, że odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są *komplementarne* lub *uzupełniają się* względem odcinka $\mathcal{X}$ jeśli $\mathcal{X}_1 \wedge \mathcal{X}_2 = \emptyset$ i $\langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle = \mathcal{X}$.

Lemat 2.7. *Niech $\mathcal{X} = [Z, Y]$ będzie dowolnym odcinkiem kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Jeśli $\mathcal{Y}_1$ jest odcinkiem o wierzchołku Z lub podstawie Y, takim, że $\mathcal{Y}_1 \subsetneq \mathcal{X}$, to istnieje odcinek $\mathcal{Y}_2$ komplementarny z $\mathcal{Y}_1$ względem $\mathcal{X}$.*

Dowód. Możemy założyć, że $\mathcal{Y}_1 = [Z, Y_1]$, gdyż w drugim przypadku rozumowanie jest dualne. Ponieważ w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ istnieją względne uzupełnienia (por. [2, Tw. 4, Roz IV.3]), rozważmy uzupełnienie Y_1 w odcinku $\mathcal{X}$, czyli element Z_2 taki, że $Z_2 \wedge Y_1 = Z$ i $Z_2 \vee Y_1 = Y$. Połóżmy $\mathcal{Y}_2 = [Z_2, Y]$. Zgodnie z 2.2(i)

$$\mathcal{Y}_1 \wedge \mathcal{Y}_2 = [Z \vee Z_2, Y_1 \wedge Y] = [Z_2, Y_1].$$

Gdyby $Z_2 \subseteq Y_1$, to mielibyśmy $Y = Z_2 \vee Y_1 = Y_1$, co przeczy założeniom o $\mathcal{Y}_1$. Z 2.2(ii) mamy

$$\langle \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \rangle = [Z \wedge Z_2, Y_1 \vee Y] = [Z, Y] = \mathcal{X},$$

co kończy dowód. □

Lemat 2.8. *Jeśli $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ są komplementarnymi odcinkami kowymiaru 1 w odcinku $\mathcal{X} = [Z, Y]$ kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, to $\mathcal{Y}_1 = [Z, Y_1]$, $\mathcal{Y}_2 = [Z_2, Y]$ (albo, $\mathcal{Y}_1 = [Z_2, Y]$ i $\mathcal{Y}_2 = [Z, Y_1]$) i Z_2 jest względnym uzupełnieniem Y_1 w odcinku $\mathcal{X}$.*

Dowód. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $\mathcal{Y}_1 = [Z, Y_1]$. Ponieważ $\mathcal{Y}_2$ jest kowymiaru 1 w $\mathcal{X}$, więc albo $\mathcal{Y}_2 = [Z, Y_2]$ dla pewnego Y_2 takiego, że $Y_2 \prec Y$, albo $\mathcal{Y}_2 = [Z_2, Y]$ dla pewnego Z_2 takiego, że $Z \prec Z_2$. W pierwszym przypadku jednak $Z \in \mathcal{Y}_1 \wedge \mathcal{Y}_2$ i odcinki $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ nie są komplementarne. Zatem $\mathcal{Y}_2 = [Z_2, Y]$. Zauważmy, że musi być $Z_2 \nsubseteq Y_1$, gdyż w przeciwnym razie

$$\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = [Z_2, Y_1] \neq \emptyset$$

zgodnie z 2.2(i). Pokażemy, że Z_2 jest względnym uzupełnieniem Y_1 w odcinku $\mathcal{X}$. Ponieważ $Y_1 \subseteq Z_2 \vee Y_1 \subseteq Y$, to $Z_2 \vee Y_1 \in [Y_1, Y] = \{Y_1, Y\}$. Jeśli $Z_2 \vee Y_1 = Y_1$, wówczas $Z_2 \subseteq Y_1$, a stąd $\mathcal{Y}_1 \wedge \mathcal{Y}_2 \neq \emptyset$. Tak więc $Z_2 \vee Y = Y$. Ponieważ $Z_1 \subseteq Z_2 \wedge Y_1 \subseteq Z_2$, to $Z_2 \wedge Y_1 \in [Z, Z_2] = \{Z, Z_2\}$. Jeśli $Z_2 \wedge Y_1 = Z_2$, wtedy $Z_2 \subseteq Y_1$ skąd $\mathcal{Y}_1 \wedge \mathcal{Y}_2 \neq \emptyset$. Zatem $Z_2 \wedge Y_1 = Z$, co kończy dowód. □

Rozdział 3

Pęki odcinków

W poniższym rozdziale zajmiemy się badaniem pęków odcinków w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Do określenia takiego pęku potrzebujemy pojęcia *współpękowych odcinków*. Mówimy, że odcinki $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$, $i = 1, 2$ są współpękowe jeśli współpękowe są ich wierzchołki Z_1, Z_2 oraz podstawy Y_1, Y_2. Jeśli odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są różne i współpękowe, to zbiór postaci

$$\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2} := \{[Z, Y] \colon Z \in \overline{Z_1, Z_2}, \quad Y \in \overline{Y_1, Y_2}, \quad Z \subseteq Y\} \tag{3.1}$$

nazywamy *quasi-pękiem odcinków*.

W dalszej części pracy rozważamy nietrywialne, domknięte odcinki $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]$, $i = 1, 2, \cdots$, oraz stosujemy następujące konwencje:

$$Z' = Z_1 \wedge Z_2, \quad Z'' = Z_1 \vee Z_2, \quad Y' = Y_1 \wedge Y_2, \quad Y'' = Y_1 \vee Y_2, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{X}' = \mathcal{X}_1 \wedge \mathcal{X}_2 = [Z'', Y'], \qquad \mathcal{X}'' = \langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle = [Z', Y'']. \tag{3.3}$$

O rozważanych dalej quasi-pękach zakładamy, że są co najmniej dwuelementowe.

Niech

$$\Sigma := \Big\{[Z, Y] \colon Z \subseteq Y,\ Z, Y \in \hat{\mathcal{H}}(V)\Big\} \tag{3.4}$$

będzie rodziną wszystkich domkniętych odcinków kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Przez $\mathrm{Sub}(\Sigma)$ oznaczamy rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru Σ. Określamy operację

$$\boxtimes \colon \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathrm{Sub}(\Sigma)$$

w następujący sposób: niech $\mathcal{Z}, \mathcal{Y} \in \Sigma$ wówczas

$$\mathcal{Z} \boxtimes \mathcal{Y} = \Big\{[Z, Y] \in \Sigma \colon Z \in \mathcal{Z}, Y \in \mathcal{Y}\Big\}. \tag{3.5}$$

Operację $\boxtimes$ można rozszerzyć dopuszczając odcinki otwarte w miejscu odcinków $\mathcal{Z}, \mathcal{Y}$. Jeśli p, q są pękami w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, względnie p albo q jest singletonem elementu kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, to $p \boxtimes q$ jest quasi-pękiem. Na odwrót, każdy quasi-pęk można przedstawić jako $\boxtimes$ produkt pewnych odcinków.

3.1 Pęki minimalne

Quasi-pęk G odcinków nazywamy *tranzytywnym*, gdy $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ dla dowolnych, różnych $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathsf{G}$. Ta własność przysługuje wyłącznie minimalnym, w sensie relacji bycia podzbiorem, quasi-pękom.

Twierdzenie 1.28 z pracy [8] pozostaje prawdziwe, gdyż w jego dowodzie nie wykorzystuje się własności kraty rzutowej. Przytaczamy je tutaj jako

Fakt 3.1. *Quasi-pęk jest tranzytywny wtw., gdy jest minimalny.*

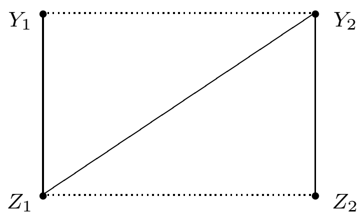
Twierdzenie 3.2. *Niech* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *będzie quasi-pękiem odcinków w* $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. *Quasi-pęk* G *jest minimalny wtw., gdy zachodzi jeden z następujących warunków:*

(i) $Z_1 = Z_2$ *lub* $Y_1 = Y_2$,

(ii) $Z_1 \nsubseteq Y_2$ *i* $Z_2 \nsubseteq Y_1$.

Dowód. Oznaczmy $p := \overline{Z_1, Z_2}$ i $q := \overline{Y_1, Y_2}$.

$\Rightarrow$: Załóżmy, że G jest minimalnym quasi-pękiem i nie zachodzi (i), tzn. $Z_1 \neq Z_2$ i $Y_1 \neq Y_2$. Przypuśćmy ponadto, że $Z_1 \subseteq Y_2$.



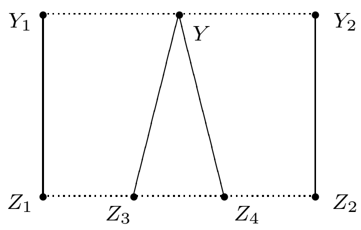
Rysunek 3.1

Zauważmy, że $\{Z_1\} \boxtimes q$, jak również $p \boxtimes \{Y_1\}$, są quasi-pękami zawartymi w G różnymi od G, co przeczy minimalności G. Analogicznie, w przypadku, gdy $Z_2 \subseteq Y_1$, uzyskamy sprzeczność. Wykazaliśmy zatem, że spełniony jest warunek (ii).

$\Leftarrow$: (i) Załóżmy, że $Z_1 = Z_2 = Z$. Wówczas $\mathsf{G} = \{Z\} \boxtimes q$. Niech $\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4 \in \mathsf{G}$ i $\mathcal{X}_3 \neq \mathcal{X}_4$. Zauważmy, że $Y_3, Y_4 \in q$ i $Y_3 \neq Y_4$, więc z 2.3 $q = \overline{Y_3, Y_4}$, a tym samym $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4}$, co oznacza, że G jest tranzytywny. Z 3.1 quasi-pęk G jest minimalny.

W sytuacji, gdy $Y_1 = Y_2$ dowód biegnie analogicznie.

(ii) Niech $\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4 \in \mathsf{G}$ i $\mathcal{X}_3 \neq \mathcal{X}_4$. Pokażemy, że $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4}$. Ponieważ $\mathsf{G} = p \boxtimes q$, wystarczy więc dowieść równości $p = \overline{Z_3, Z_4}$ i $q = \overline{Y_3, Y_4}$. Z uwagi na to, że $Z_3, Z_4 \in p$ oraz $Y_3, Y_4 \in q$ dowód sprowadza się do wykazania różności $Z_3 \neq Z_4$ i $Y_3 \neq Y_4$.



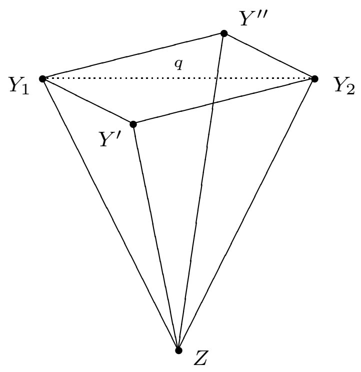
Rysunek 3.2

Przypuśćmy, że $Y_3 = Y_4 = Y$ (rys. 3.2). Wówczas $Z_3 \neq Z_4$ bo $\mathcal{X}_3 \neq \mathcal{X}_4$. Tak więc z 2.3 mamy $p = \overline{Z_3, Z_4}$. Z 2.5(ii) natomiast $Z_1, Z_2 \subseteq Y$. Jeśli $Y_1 = Y$, to $Z_2 \subseteq Y_1$ i otrzymujemy sprzeczność z założeniami. Gdy $Y_1 \neq Y$, to $q = \overline{Y_1, Y}$. Ponadto $Z_1 \subseteq Y_1, Y$ i z 2.5(i) dostaniemy $Z_1 \subseteq Y_2$, co przeczy założeniom. W stosunku do pary Y, Y_2 można zastosować analogiczne rozumowanie i otrzymać sprzeczność. Ostatecznie, nasze przypuszczenie jest fałszywe, czyli $Y_3 \neq Y_4$.

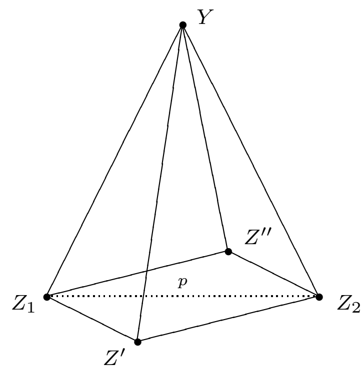
Dualnie można dowieść, że $Z_3 \neq Z_4$. □

Definicja 3.3. Niech $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ będzie co najmniej dwuelementowym quasi-pękiem odcinków w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Jeśli quasi-pęk G jest minimalny, to nazywamy go *pękiem odcinków* w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$.

Jeśli $Z_1 = Z_2$, to G nazywamy *pękiem właściwym odcinków typu gwiazda* (rys. 3.3), jeśli natomiast $Y_1 = Y_2$, to G nazywamy *pękiem właściwym odcinków typu układ* (rys. 3.4). Mówimy krótko, że G jest pękiem właściwym, gdy G jest pękiem właściwym typu gwiazda lub układ.



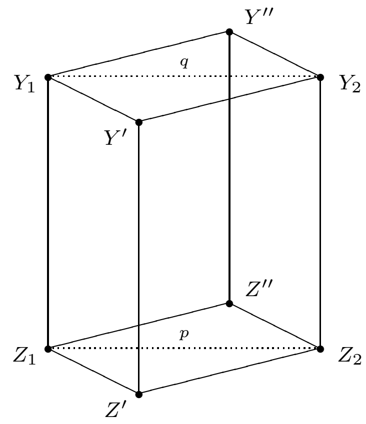
Rysunek 3.3



Rysunek 3.4

Odcinek $\mathcal{X}' = \bigcap \mathsf{G}$ nazywamy *wierzchołkiem* pęku odcinków G, natomiast odcinek $\mathcal{X}'' = \langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle$ jego *podstawą*.

Pęk odcinków G nazywamy *waflem* jeśli $Z_1 \nsubseteq Y_2$ i $Z_2 \nsubseteq Y_1$ (rys. 3.5).



Rysunek 3.5

Fakt 3.4. *W każdym pęku odcinków* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *zachodzą następujące związki*

$$Z' \subseteq Y', \qquad Z'' \subseteq Y''.$$

Gdy G *jest waflem, to ponadto*

$$\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \emptyset, \qquad Z_i \nsubseteq Y', \qquad Z'' \nsubseteq Y_i, \qquad Z'' \nsubseteq Y'.$$

3.2 Klasyfikacja pęków odcinków

Każdemu pękowi $\mathsf{G} = p \boxtimes q$ odcinków kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ przypisujemy typ $\xi\backslash\eta$, w ten sposób, że jeśli p jest pękiem właściwym, ale nie jest prostą w $\mathfrak{A}$, to w miejscu ξ piszemy pw, itd. zgodnie z tabelą 3.1. W miejscu η wpisujemy typ q określony w analogiczny sposób jak dla p.

ξ	p
pw	pęk właściwy nie będący prostą[1] w $\mathfrak{A}$
pr	pęk równoległych nie będący prostą w $\mathfrak{A}$
l	prosta w $\mathfrak{A}$
s	singleton niepustej podprzestrzeni $\mathfrak{A}$
0	$\{\mathbf{0}\}$

Tabela 3.1: Możliwe wartości występujące w nazwie typu pęku odcinków.

[1]Użycie terminu *prosta* w tabeli 3.1 jest nadużyciem, które mamy nadzieję nie prowadzi jednak do niejasności. Formalnie, zamiast prostej powinien być zbiór atomów odpowiadających punktom na prostej.

$\xi\backslash\eta$	pw	pr	s
pw	wafel	$\times$	pęk wł. typu układ
pr	wafel (afiniczny)[2]	wafel	pęk wł. typu układ
l	wafel (afiniczny)	wafel	pęk wł. typu układ
s	pęk wł. typu gwiazda	$\times$	$\times$
0	pęk wł. typu gwiazda	pęk wł. typu gwiazda	$\times$

Tabela 3.2: Klasyfikacja pęków odcinków w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$.

Twierdzenie 3.5. *Wszystkie możliwe typy pęków odcinków w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ przedstawia tabela* 3.2*.*

DOWÓD. Niech $\mathsf{G} = p \boxtimes q$ będzie dowolnym pękiem odcinków w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Pęk G nie może być typu pw\pr, gdyż zgodnie z 3.4, mamy $\mathbf{0} \neq Z' \subseteq Y' = \mathbf{0}$. Z tego samego powodu nie jest możliwe by G był typu s\pr. Pęki s\s, 0\s są jednoelementowe, a takie wykluczamy z rozważań. Przykłady pęków pozostałych typów przedstawiono na rysunkach 3.1 – 3.11. $\square$

Lemat 3.6. *Jeśli* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *jest typu* pr\pw *lub* l\pw*, to* $Z_1, Z_2 \subseteq\parallel Y'$*.*

DOWÓD. Dla G typu l\pw dowód jest zbędny. Załóżmy więc, że G jest typu pr\pw. Wówczas po pierwsze: $Z_1 \parallel Z_2$, po drugie: Z_1 jest co najmniej prostą leżącą w Y_1 i po trzecie: Y' jest hiperpłaszczyzną (podprzestrzenią kowymiaru 1) w Y_1. W takim razie $Z_1 \cap Y' \neq \emptyset$, albo $Z_1 \subseteq\parallel Y'$. W pierwszym przypadku weźmy $a \in Z_1 \cap Y'$. Punkt a nie może leżeć na Z_2, gdyż $Z_1 \parallel Z_2$ i $Z_1 \neq Z_2$. Zatem $Z'' = \langle Z_2, a\rangle$, bo $Z_2 \prec Z''$ i $a \in Z''$. Ale to oznacza, że $Z'' \subseteq Y_2$, gdyż zarówno Z_2 jak i a leżą w Y_2. Dostajemy sprzeczność z 3.4, a więc musi być $Z_1 \subseteq\parallel Y'$. W przypadku Z_2 dowód przebiega analogicznie. $\square$

Lemat 3.7. *Niech* G *będzie pękiem odcinków w kracie* $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ *i* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathsf{G}$.

(i) *Jeśli $Z_1 \neq Z_2$, to dla $Z \in \overline{Z_1, Z_2}$ istnieje dokładnie jeden taki element $Y \in \overline{Y_1, Y_2}$, że $[Z, Y] \in \mathsf{G}$. Jeśli G jest typu* pr\pr *lub* l\pr*, to $Y = Z * Y_1$, w pozostałych przypadkach $Y = Z \vee Y'$.*

(ii) *Jeśli* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *jest typu* pr\pw *lub* l\pw*, to istnieje dokładnie jeden $Y \in \overline{Y_1, Y_2}$ taki, że $Z'' \subseteq\parallel Y$.*

(iii) *Niech $Y_1 \neq Y_2$ i $Y \in \overline{Y_1, Y_2}$. Jeśli G jest typu* pr\pw *lub* l\pw*, to dodatkowo zakładamy, że $Z'' \subsetneq\parallel Y$. Element $Z = Y \wedge Z''$ jest jedynym takim elementem $\overline{Z_1, Z_2}$, że $[Z, Y] \in \mathsf{G}$.*

[2]Przymiotnik *afiniczny* oznacza, że w pęku $\mathsf{G} = p \boxtimes q$ mamy doładnie jeden element $Z \in p$ taki, że nie ma dla niego odpowiedniego $Y \in q$, aby $[Z, Y] \in \mathsf{G}$ (por. 3.7).

Dowód. (i) Jeśli G jest pękiem właściwym, to $\overline{Y_1, Y_2} = \{Y\}$, gdzie $Y = Y_1 = Y_2 = Y' = Y''$. Odcinek $[Z, Y]$ jest wyznaczony jednoznacznie. Równość $Y = Z \vee Y'$ jest prawdziwa, gdyż $Z \subseteq Y'$ i $Y = Y'$.

W sytuacji, gdy G jest waflem, mamy dwa przypadki do rozważenia. Niech najpierw $Y' \neq \mathbf{0}$. Wtedy $\overline{Y_1, Y_2}$ jest pękiem właściwym, a więc G jest typu pw\pw, pr\pw lub l\pw. Gdy G jest typu pw\pw to na mocy 1.1 możemy skorzystać z [8, Lem. 1.38].
Połóżmy $Y := Z \vee Y'$. Gdyby $Y' = Y$, czyli gdy $Z \subseteq Y'$, to mielibyśmy $Z'' \subseteq Y'$, co przeczy 3.4. Tak więc zauważmy, że

$$Y' \subsetneq Y \subseteq Y'' \qquad \text{i} \qquad Y' \not\prec Y''. \tag{3.6}$$

Załóżmy, że G jest typu pr\pw. Z 3.6 mamy $Z_1 \subseteq\parallel Y'$. Stąd $Z \subseteq\parallel Y'$, gdyż $Z \parallel Z_1$. Zgodnie z (3.6) mamy $Y' \neq Y$, tak więc $Y' \prec Y$, a zatem $Y \in \overline{Y_1, Y_2}$.

Teraz załóżmy, że G jest typu l\pw. W tym przypadku $\mathbf{0} \prec Z$ i stąd zgodnie z (1.1) i (3.6) mamy $Y' \prec Y$, co ponownie z (3.6) oznacza, że $Y \in \overline{Y_1, Y_2}$.

Pozostaje do rozważenia sytuacja, w której $Y' = \mathbf{0}$, czyli gdy G jest typu pr\pr lub l\pr. Tutaj weźmy $Y := Z * Y_1$. Zgodnie z definicją 1.13 mamy $Y \parallel Y_1$, natomiast z 1.14 mamy $Y \subseteq Z \vee Y_1 \subseteq Y''$, co w oparciu o 1.6 wystarczy by twierdzić, że $Y \in \overline{Y_1, Y_2}$.

Gdyby istniał $Y_0 \neq Y$ taki, że $[Z, Y_0] \in \mathsf{G}$, to mielibyśmy dwa różne odcinki $[Z, Y_0]$ i $[Z, Y]$ o wspólnym wierzchołku, wyznaczające G, co nie jest możliwe z definicji wafla 3.3.

(ii) Niech A_i będą takimi atomami, że $A_i \subseteq Z_i$, dla $i = 1, 2$. Ponieważ $Z_1 \parallel Z_2$ i $Z_1 \neq Z_2$ więc $A_1 \neq A_2$. Każde dwa atomy są współpękowe, niech więc L będzie prostą, na której leżą. Zauważmy, że

$$Z_1 \vee L = Z_2 \vee L = Z''. \tag{3.7}$$

Przyjmijmy $Y := Y' \circledvee L$. Z 1.17 mamy $Y' \preceq Y$. Przypuśćmy, że $Y' = Y$. Wówczas $L \subseteq\parallel Y'$. Z 3.6 mamy $Z_i \subseteq\parallel Y'$, więc z (3.7) $Z'' \subseteq\parallel Y'$, co oznacza, że $Z'' \subseteq\parallel Y_1, Y_2$. Ponieważ $Z_i \subseteq Z'' \cap Y_i$, to $Z'' \subseteq Y_i$ i dostajemy sprzeczność z 3.4. Także $Y' \prec Y$, a ponadto $Y \subseteq Y''$ więc pokazaliśmy, że $Y \in \overline{Y_1, Y_2}$.

Na mocy 3.6 mamy $Z_i \subseteq\parallel Y'$, skąd $Z_1 \circledvee L \subseteq\parallel Y' \circledvee L$. Korzystając z (3.7) dostajemy $Z'' \subseteq\parallel Y$.

Weźmy teraz $Y_0 \in \overline{Y_1, Y_2}$ taki, że $Z'' \subseteq\parallel Y_0$. Jak wcześniej pokazaliśmy $Z'' \not\subseteq\parallel Y'$, a wiemy, że $\emptyset \neq Y' \subseteq Y \cap Y_0$. Stąd $Y_0 = Y$ i dlatego Y jest jedyny taki, że $Z'' \subseteq\parallel Y$.

(iii) Jeśli G jest pękiem właściwym odcinków to $\overline{Z_1, Z_2} = \{Z\}$, gdzie $Z = Z_1 = Z_1 = Z' = Z''$. Wówczas odcinek $[Z, Y]$ wyznaczony jest jednoznacznie i dowód jest zakończony.

Załóżmy więc, że G jest waflem. Podobnie jak w (i), gdy G jest typu pw\pw to na mocy 1.1 możemy użyć [8, Lem. 1.38]. Zostają więc typy pr\pw, l\pw, pr\pr i l\pr. Zauważmy, że w takich pękach odcinków Z'' jest co najmniej prostą, a Y jest hiperpłaszczyzną kowymiaru 1 w Y''. Ponieważ $Z'' \subseteq Y''$, z 3.4, więc albo $Z'' \subseteq\parallel Y$ i $Z'' \nsubseteq Y$, albo $Y \cap Z'' \neq \emptyset$. Pokażemy, że Y i Z'' przecinają się niepusto. Dla G typu pr\pw lub l\pw mamy to z założenia. W pęku G typu pr\pr i l\pr, gdyby $Z'' \subseteq\parallel Y$ to także $Z'' \subseteq\parallel Y_i$ gdyż w tej sytuacji $Y_i \parallel Y$. Z uwagi na to, że $Z_i \subseteq Z'' \cap Y_i$ mielibyśmy $Z'' \subseteq Y_i$, co przeczy 3.4. Tak więc ostatecznie $Y \wedge Z'' \neq \mathbf{0}$. Możemy teraz skorzystać z 1.2 i dlatego, że $Y \prec Y''$, otrzymamy

$$Z = Y \wedge Z'' \preceq Y'' \wedge Z'' = Z''.$$

Nie może być $Z = Z''$, gdyż wtedy mielibyśmy $Z'' \subseteq Y$, skąd $Z_i \subseteq Y \cap Y_i$ dla $i = 1, 2$. Przy $Y = Y_1$ lub $Y = Y_2$ mam od razu sprzeczność z definicją wafla 3.3, natomiast dla $Y \neq Y_1, Y_2$ mamy $Z_i \subseteq Y'$ co przeczy 3.4. Zatem

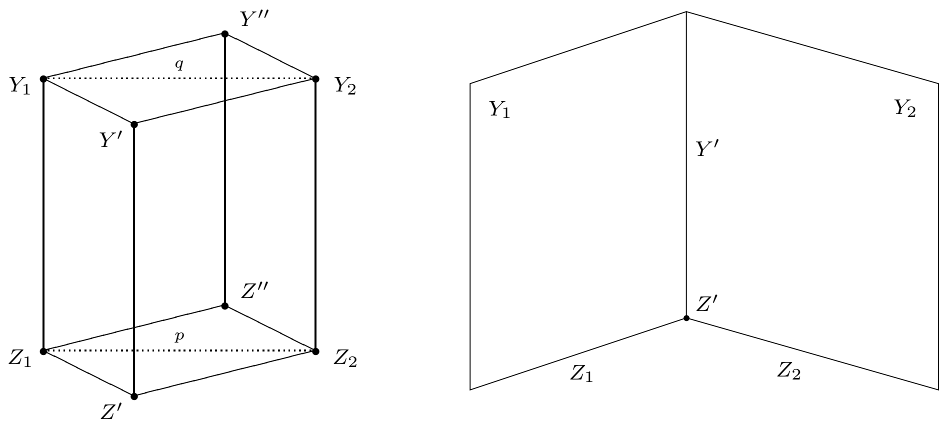
$$Z \prec Z''.$$

W przypadku, gdy G jest typu l\pw lub l\pr to wystarczy by $Z \in \overline{Z_1, Z_2}$. W G typu pr\pr mamy $Y \parallel Y_i$ oraz $Z \wedge Z_i \subseteq Y \wedge Y_i = \mathbf{0}$ dla $i = 1, 2$, co zgodnie z definicją 1.6 oznacza, że $Z \in \overline{Z_1, Z_2}$. Pozostaje G typu pr\pw. Możemy przyjąć, że $Y \neq Y_1, Y_2$, gdyż dla $Y = Y_1$ lub $Y = Y_1$, dpowiednio $Z = Z_1$ lub $Z = Z_2$ i $Z \in \overline{Z_1, Z_2}$. Gdyby $Z \wedge Z_i \neq \mathbf{0}$, to mielibyśmy

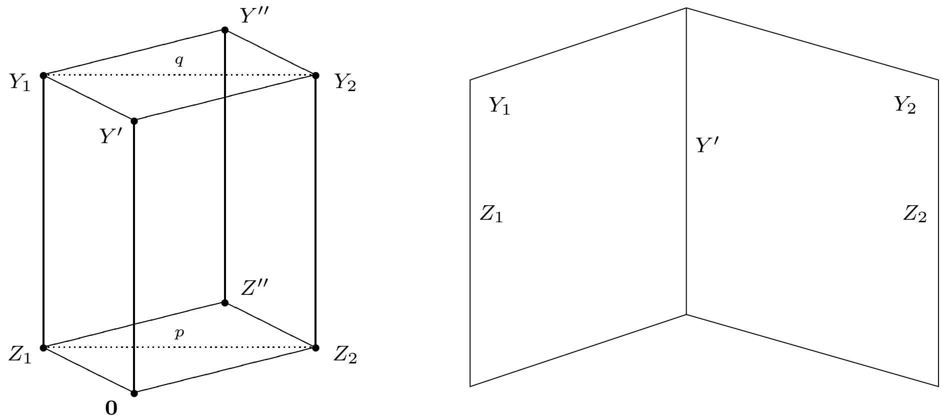
$$\mathbf{0} \neq Z \wedge Z_i \subseteq (Y \wedge Y_i) \cap Z_i = Y' \cap Z_i,$$

dla $i = 1$ lub $i = 2$. Z 3.6 mamy $Z_1, Z_2 \subseteq\parallel Y'$, co oznacza, że $Z_i \subseteq Y'$ i mamy sprzeczność z 3.4.
Pokazaliśmy, że $Z \in \overline{Z_1, Z_2}$ we wszystkich typach wafla G.

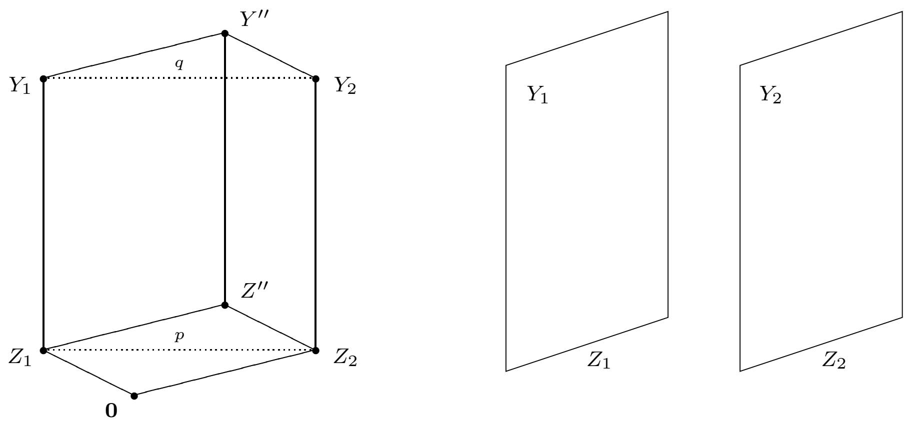
Gdyby istniał $Z_0 \neq Z$ taki, że $[Z_0, Y] \in \mathsf{G}$, to mielibyśmy dwa różne odcinki $[Z_0, Y]$ i $[Z, Y]$ o wspólnej podstawie, wyznaczające G, co nie jest możliwe z definicji wafla 3.3. □



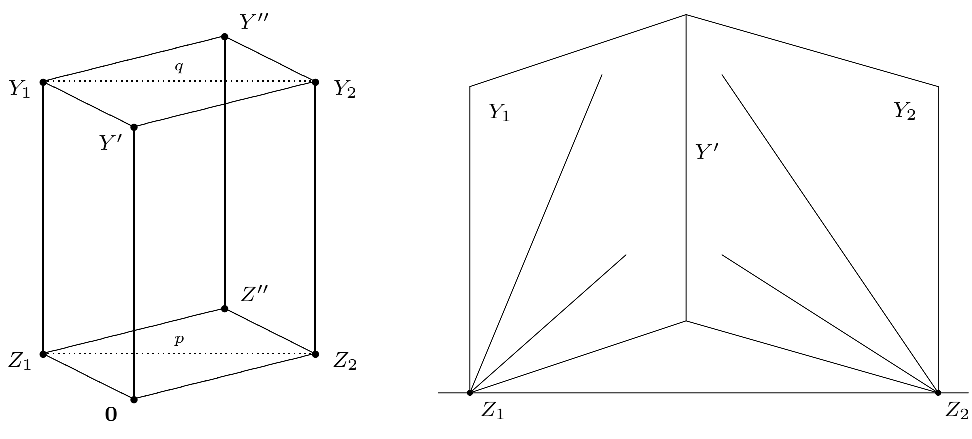
Rysunek 3.1: Pęk odcinków typu pw\pw.



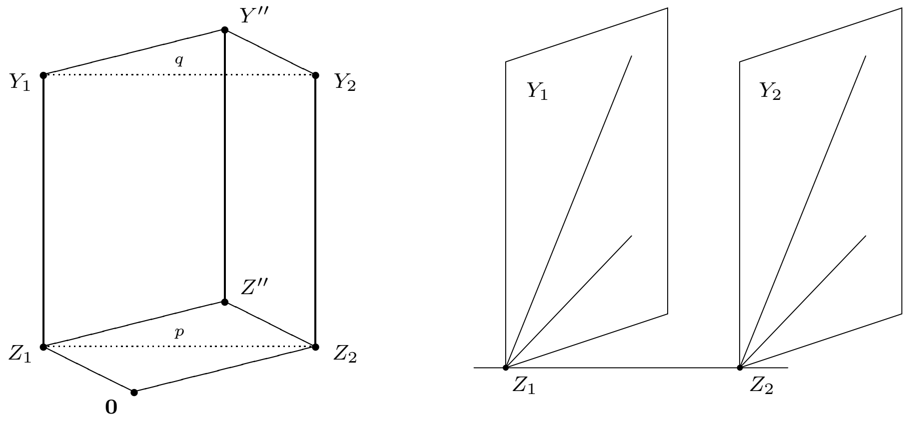
Rysunek 3.2: Pęk odcinków typu pr\pw.



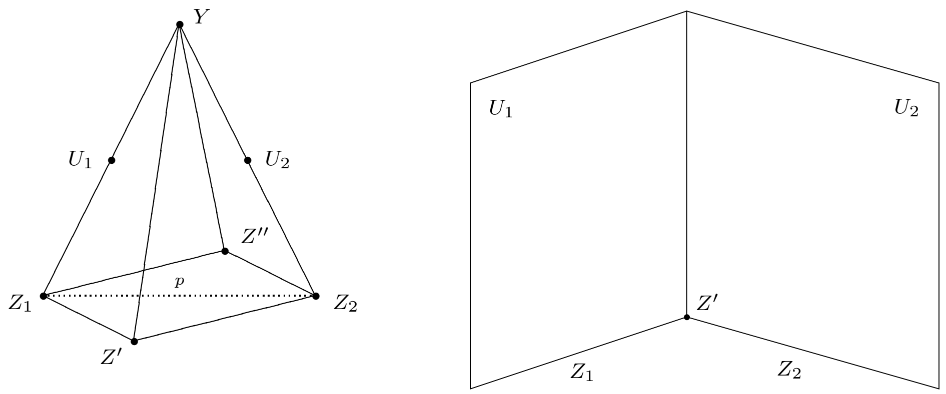
Rysunek 3.3: Pęk odcinków typu pr\pr.



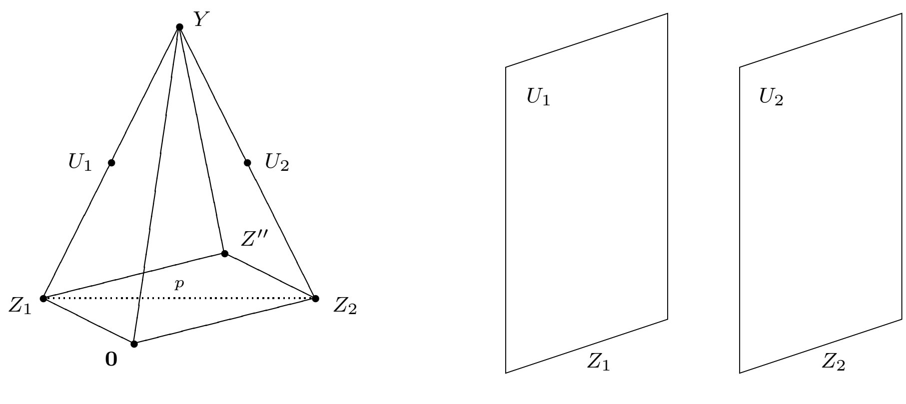
Rysunek 3.4: Pęk odcinków typu l\pw.



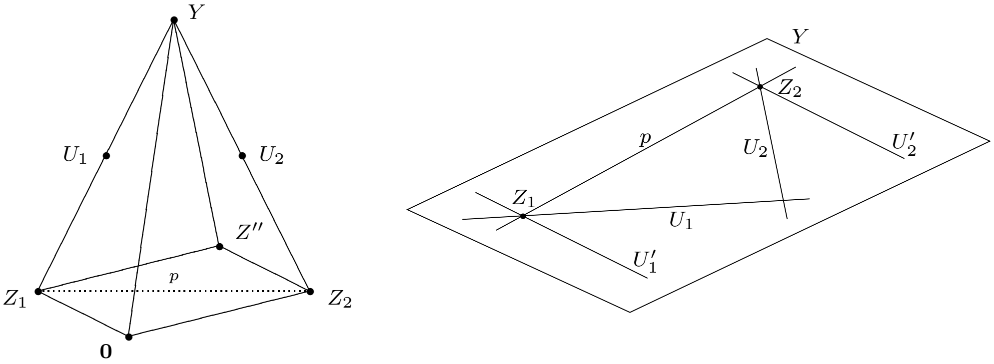
Rysunek 3.5: Pęk odcinków typu l\pr.



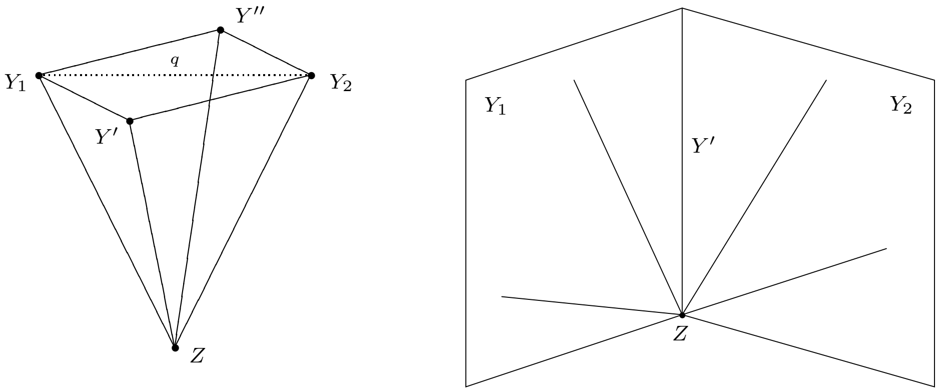
Rysunek 3.6: Pęk odcinków typu pw\s.



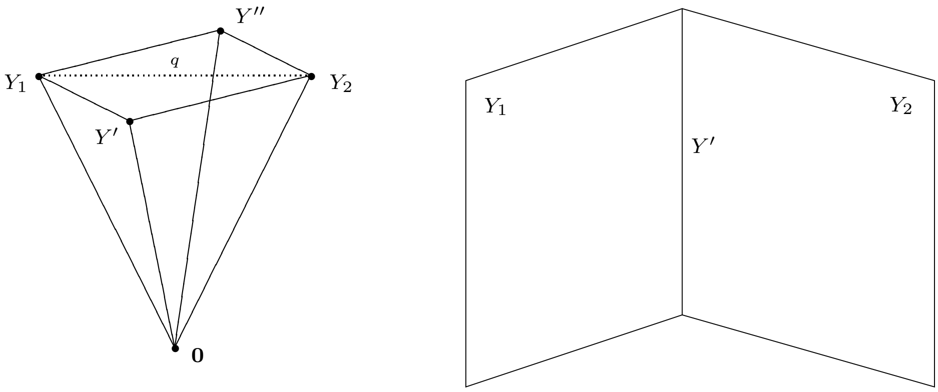
Rysunek 3.7: Pęk odcinków typu pr\s.



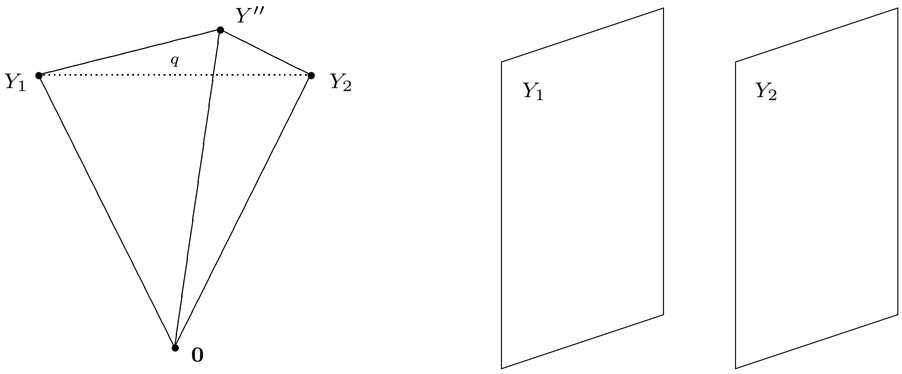
Rysunek 3.8: Pęk odcinków typu l\s.



Rysunek 3.9: Pęk odcinków typu s\pw.



Rysunek 3.10: Pęk odcinków typu 0\pw.



Rysunek 3.11: Pęk odcinków typu 0\pr.

Rozdział 4

Rzuty

W przestrzeni afninicznej, klasyczny rzut środkowy o środku w punkcie c z prostej p na prostą q to bijekcja $f\colon p \longrightarrow q$, dana następującym przepisem: punkt $a \in p$ łączymy z punktem c, prostą $\overline{a, c}$ przecinamy z prostą q, punkt przecięcia to $f(a)$. Aby taka konstrukcja była możliwa, spełnionych musi być kilka warunków: $a \notin p \cup q$, $p \parallel q$ i $a \in \langle p, q\rangle$.

Rzut równoległy f z prostej p na prostą q o kierunku k określa się jako bijekcję $f\colon p \longrightarrow q$, przy której obrazy punktów z p znajduje się w ten sposób, że przez punkt $a \in p$ prowadzi się prostą l równoległą do k i punkt przecięcia l i q to $f(a)$. Tutaj też musi być: $q \subset \langle p, a * k\rangle$ dla dowolnego $a \in p$ i $k \nparallel p, q$.

Zauważmy, że te klasyczne rzuty działają w pękach prostych. Wzorując się na przytoczonych przepisach spróbujemy określić rzuty działające w pękach odcinków w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$.

4.1 Ślizg

Zaczniemy od przedstawienia bardzo ważnej własności wafli. Analogiczny fakt prawdziwy jest w kracie rzutowej $\mathfrak{L}(V)$ (por. [8]).

Twierdzenie 4.1. *Niech* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *będzie waflem w* $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. *Wtedy jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1$, *to element*

$$U_2 = (U_1 \vee Z_2) \wedge Y_2$$

jest jedyny w $\mathcal{X}_2$ *współpękowy z* U_1,

Dowód. Zaczniemy od wykazania, że U_1, U_2 posiadają wspólny następnik, a mianowicie $U_1 \vee Z_2$.

Ponieważ $Z' \prec Z_2$, więc zgodnie z (1.1) mamy $Z' \vee U_1 \preceq Z_2 \vee U_1$, czyli $U_1 \preceq U_1 \vee Z_2$, gdyż $Z' \subseteq U_1$. Gdyby $U_1 = U_1 \vee Z_2$, to mielibyśmy $Z_2 \subseteq U_1$, a więc $Z_2 \subseteq Y_1$, co jest sprzeczne z definicją wafla 3.3. Tak więc $U_1 \prec U_2 \vee Z_2$.

Zauważmy, że $\mathbf{0} \neq Z_2 \subseteq Y_2, U_1 \vee Z_2$ oraz $Y_2 \prec Y''$. Zatem, na mocy 1.2 mamy

$$Y_2 \wedge (U_1 \vee Z_2) \preceq Y'' \wedge (U_1 \vee Z_2) = U_1 \vee Z_2.$$

Gdyby lewa strona była równa prawej, to mielibyśmy $U_1 \vee Z_2 \subseteq Y_2$, co z kolei oznacza, że $Z_1 \subseteq Y_2$, ponieważ $Z_1 \subseteq U_1$. W ten sposób otrzymamy sprzeczność z definicją wafla 3.3.

Wykazaliśmy, że $U_1, U_2 \prec U_1 \vee Z_2$, a stąd na mocy 1.10 U_1 i U_2 są współpękowe.

Teraz pokażemy, że istnieje tylko jedno takie U_2 w $\mathcal{X}_2$, że U_1 i U_2 są współpękowe. Załóżmy nie wprost, że U_1 jest współpękowy z U_2 i z pewnym U_2' takim, że $U_2' \in \mathcal{X}_2$ i $U_2' \neq U_2$. Na mocy 2.6, gdzie $U_2 = W_1$ i $U_2' = W_2$ mamy $Z \subseteq U_1$ lub $U_1 \subseteq Y$, co jest sprzeczne z definicja wafla i kończy dowód. $\square$

Definicja 4.2. Niech G będzie waflem w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ i niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ będą różnymi elementami G. Na mocy 4.1 możemy określić odwzorowanie $\updownarrow^{\mathcal{X}_1}_{\mathcal{X}_2} \colon \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_2$ warunkiem

$$\updownarrow^{\mathcal{X}_1}_{\mathcal{X}_2}(U_1) = U_2 \quad \text{wtw., gdy} \quad U_1, U_2 \text{ są współpękowe,} \tag{4.1}$$

gdzie $U_i \in \mathcal{X}_i$. Takie odwzorowanie nazywamy *ślizgiem* z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$.

Wzór analityczny ślizgu jest następujący:

$$f(U_1) = (Z_2 \vee U_1) \wedge Y_2 \quad \text{dla} \quad U_1 \in \mathcal{X}_1. \tag{4.2}$$

Przy pomocy tak określonego ślizgu możemy rzutować w pękach odcinków typu pw\pw, pr\pw, pr\pr, l\pr i l\pw.

Przykład 4.3. Rozważmy w przestrzeni afinicznej dwie płaszczyzny Y_1 i Y_2 przecinające się w prostej Y'. Na płaszczyźnie Y_1 wybieramy punkt Z_1, a na płaszczyźnie Y_2 punkt Z_2. Określimy teraz odwzorowanie f przyporządkowujące prostym z pęku przez Z_1, proste z pęku przez Z_2. Prosta przechodząca przez Z_1 leżąca na Y albo przecina prostą Y', albo jest do niej równoległa.

W pierwszym przypadku oznaczmy taką prostą przez U_1. Rozpatrzmy płaszczyzne rozpiętą przez prostą U_1 i punkt Z_2. Płaszczyzna ta przecina płaszczyznę Y_2 w prostej U_2, którą będziemy traktować jako obraz U_1 przy f.

W drugim przypadku mamy prostą U_1' równoległą do Y'. Płaszczyzna rozpięta przez U_1' i Z_2 przetnie Y_2 w prostej U_2' równoległej do U_1 (i Y') przechodzącej przez punkt Z_2. Wówczas, obrazem prostej U_1' przy f jest prosta U_2'

Zauważmy, że punkt Z_1, proste przechodzące przez przez Z_1 i płaszczyzna Y_1 tworzą odcinek $\mathcal{X}_1 = [Z_1, Y_1]$ w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. W taki sam sposób otrzymujemy odcinek $\mathcal{X}_2 = [Z_2, Y_2]$. Ponieważ $Z_1 \parallel Z_2$, a płaszczyzny Y_1, Y_2 tworza pęk właściwy, to $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ tworzą wafel G typu l\pw w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Weźmy prostą U_1 z Y_1, $(Z_2 \vee U_1)$ jest płaszczyzną rozpiętą przez U_1 i punkt Z_2. Obrazem prostej U_1 w ślizgu f jest przecięcie tej płaszczyzny z Y_2, czyli $(Z_2 \vee U) \wedge Y_2 = U_2$.

W waflu typu pr\pr i l\pr $Z_2 * U_1$ jest określone dla dowolnego $U_1 \in \mathcal{X}_1$.

Twierdzenie 4.4. *W waflu typu* pr\pr *lub* l\pr *jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1$ *to*

$$Z_2 * U_1 = (U_1 \vee Z_2) \wedge Y_2. \tag{4.3}$$

Dowód. Niech $U_2 = (U_1 \vee Z_2) \wedge Y_2$. Musimy pokazać, że $U_1 \parallel U_2$ i $Z_2 \subseteq U_2$. Ponieważ $Y_1 \parallel Y_2$, to mamy $U_1 \wedge U_2 = \mathbf{0}$,ponieważ $U_1 \wedge U_2 \subseteq Y_1 \wedge Y_2 = \mathbf{0}$. Z 4.1 natomiast wiemy, że U_1, U_2 są współpękowe, więc musi być $U_1 \parallel U_2$ z 1.6. Ponieważ $Z_2 \subseteq U_1 \vee Z_2$ oraz $Z_2 \subseteq Y_2$, więc $Z_2 \subseteq (U_1 \vee Z_2) \wedge Y_2 = U_2$. □

Twierdzenie 4.4 może być traktowane jako uzasadnienie faktu, że operacja $Z_2 * U_1$ dla $U_1 \in \mathcal{X}_1$ jest dobrze określona. Z drugiej strony, $Z_2 * U_1$ jest wyznaczone jednoznacznie, co wynika z własności relacji równoległości.

Przykład 4.5. Rozważmy dwie równoległe płaszczyzny Y_1 i Y_2. Na płaszczyźnie Y_1 wybieramy punkt Z_1, a na płaszczyźnie Y_2 punkt Z_2. Określimy teraz odwzorowanie f przyporządkowujące prostym z pęku przez Z_1, proste z pęku przez Z_2. Weźmy prostą U_1 na Y_1 przechodzącą przez punkt Z_1. Na płaszczyźnie Y_2 istnieje prosta U_2 równoległa do U_1, przechodząca przez punkt Z_2. Prostą U_2 będziemy traktować jako obraz U_1 przy f.

Zauważmy, że punkt Z_1, proste przechodzące przez przez Z_1 i płaszczyzna Y_1 tworzą odcinek $\mathcal{X}_1 = [Z_1, Y_1]$ w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. W taki sam sposób otrzymujemy odcinek $\mathcal{X}_2 = [Z_2, Y_2]$. Ponieważ $Y_1 \parallel Y_2$, to odcinki $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ tworzą wafel typu l\pr w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Przekształcenie f jest ślizgiem z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$.

Z określenia operacji $*$ oraz z 1.14 mamy

Fakt 4.6. *Niech* G *będzie pękiem odcinków typu* pr\s *lub* l\s *i niech* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathsf{G}$. *Dla* $U_1 \in \mathcal{X}_1$ *element*

$$U_2 = Z_2 * U_1$$

jest jedynym elementem $\mathcal{X}_2$*, równoległym do* U_1.

Twierdzenie 4.4 i powyższy fakt uzasadniają poprawność poniższej definicji.

Definicja 4.7. Niech G będzie pękiem odcinków typu pr\pr, l\pr, pr\s lub l\s i niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathsf{G}$. Odwzorowanie $\updownarrow\!\|^{\mathcal{X}_1}_{\mathcal{X}_2} : \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_2$ zadane warunkiem

$$\updownarrow\!\|^{\mathcal{X}_1}_{\mathcal{X}_2}(U_1) = U_2 \quad \text{wtw., gdy} \quad U_1 \parallel U_2, \tag{4.4}$$

gdzie $U_i \in \mathcal{X}_i$, nazywamy *ślizgiem równoległym.*

4.2 Uogólniony rzut środkowy

W kolejnych sekcjach tego rozdziału będziemy dowodzić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.8. *Niech* G *będzie pękiem właściwym odcinków typu różnego od* 0\pw *w* $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$*,* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3 \in \mathsf{G}$*,* $\mathcal{X}_3 \neq \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$*,* $\mathcal{X}' := \bigcap \mathsf{G}$ *oraz niech* $\mathcal{Y}$ *będzie odcinkiem kowymiaru 1 w* $\mathcal{X}_3$ *takim, że odcinki* $\mathcal{X}', \mathcal{Y}$ *są komplementarne względem* $\mathcal{X}_3$.

(i) *Dla każdego $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$ istnieje dokładnie jeden $U_3 \in \mathcal{Y}$ współpękowy z U_1.*

(ii) *Dla $U_1 \in \mathcal{X}_1$ istnieje dokładnie jeden $U_2 \in \mathcal{X}_2$ współpękowy z U_1 taki, że pęk przez U_1, U_2 przecina $\mathcal{Y}$. Jeśli $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$, to $U_2 \in \mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{X}'$, jeśli natomiast $U_1 \in \mathcal{X}'$, to $U_2 = U_1$.*

Twierdzenie 4.8 uzasadnia poprawność poniższej definicji.

Definicja 4.9. Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}$ będą odcinkami kraty $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ spełniającymi założenia 4.8. Określamy odwzorowanie $\overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\mathcal{Y}}} \colon \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_2$ warunkiem

$$\overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\mathcal{Y}}}(U_1) = U_2 \text{ wtw., gdy } U_1, U_2, U_3 \text{ leżą w jednym pęku dla pewnego } U_3 \in \mathcal{Y}, \tag{4.5}$$

gdzie $U_i \in \mathcal{X}_i$. Tak określone przekształcenie nazywamy *uogólnionym rzutem środkowym* z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ o środku $\mathcal{Y}$.

Postać środka rzutu $\mathcal{Y}$ w defninicji 4.9, oraz wzór analityczny $\overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\mathcal{Y}}}$ zależy od typu pęku G, w którym rzutujemy. W dalszej części tego rozdziału rozpatrujemy poszczególne typy i podajemy więcej szczegółów.

4.2.1 Pęki typu $\mathrm{pw}\backslash\mathrm{s}$ i $\mathrm{s}\backslash\mathrm{pw}$

W przypadku pęku odcinków G typu $\mathrm{pw}\backslash\mathrm{s}$ lub $\mathrm{s}\backslash\mathrm{pw}$ mamy $Z' \neq \mathbf{0}$. W takim razie na podstawie 1.1 pęk G leży w pewnej podkracie rzutowej. Dlatego też, twierdzenie 4.8 jest w tym wypadku przeformułowaniem [8, 1.75]. Ponadto, możemy tutaj zacytować wyniki z [8]:

Fakt 4.10. *Niech G będzie pękiem właściwym odcinków typu* $\mathrm{pw}\backslash\mathrm{s}$ *lub* $\mathrm{s}\backslash\mathrm{pw}$ *w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ oraz niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}'$ i $\mathcal{Y}$ takie jak w* 4.8.

(i) *Jeśli $Z_1 = Z_2 = Z$, to istnieje C takie, że $\mathcal{Y} = [C, Y_3]$ oraz $Z \prec C \subseteq Y_3$ i $Z = Y' \wedge C$, $Y_3 = Y' \vee C$.*

(ii) *Jeśli $Y_1 = Y_2 = Y$, to istnieje C takie, że $\mathcal{Y} = [Z_3, C]$ oraz $Z_3 \subseteq C \prec Y$ i $Y = Z'' \vee C$, $Z_3 = Z'' \wedge C$.*

(iii) *Wzór analityczny rzutu $f = \overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\mathcal{Y}}}$ jest następujący:*

$$f(U) = \begin{cases} (U \vee C) \wedge Y_2, & Z_1 = Z_2,\ U \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}' \\ (U \wedge C) \vee Z_2, & Y_1 = Y_2,\ U \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}' \\ U, & U \in \mathcal{X}'. \end{cases} \tag{4.6}$$

4.2.2 Pęk typu pr\s i l\s

Lemat 4.11. *Niech* G *będzie pękiem właściwym odcinków typu* pr\s *lub* l\s *w* $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ *oraz niech* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}'$ *i* $\mathcal{Y}$ *takie jak w* 4.8.

(i) *Istnieje* C *takie, że* $\mathcal{Y} = [Z_3, C]$ *oraz* $Z_3 \subseteq C \prec Y$ *i* $Y = Z'' \vee C$, $Z_3 = Z'' \wedge C$.

(ii) *Jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$ *to* $U_3 = (U_1 \vee Z'') \wedge C$ *jest dokładnie jednym elementem* $\mathcal{Y}$ *współpękowym z* U_1.

(iii) *Jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$ *to*

$$U_2 = \begin{cases} (U_1 \wedge C) \vee Z_2, & \text{gdy} \quad U_1 \wedge C \neq \mathbf{0}, \\ Z_2 * U_1, & \text{gdy} \quad U_1 \wedge C = \mathbf{0}, \end{cases}$$

jest dokładnie jednym takim elementem $\mathcal{X}_2$ *współpękowym z* U_1, *że pęk* $\overline{U_1, U_2}$ *przecina* $\mathcal{Y}$.

(iv) *Jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}'$, *to po pierwsze, istnieje pęk zawierający* U_1 *i przecinający* $\mathcal{Y}$, *po drugie, każdy pęk przez* U_1 *przecinający* $\mathcal{Y}$ *przecina* $\mathcal{X}_2$ *jedynie w* U_1.

Dowód. (i) Mamy $\mathcal{X}' = [Z'', Y]$, $\mathcal{X}_3 = [Z_3, Y]$. Element C o żądanych własnościach istnieje z 2.8.

(ii) Z (i) istnieje C takie, że $\mathcal{Y} = [Z_3, C]$ oraz

$$(a) \quad Z_3 \subseteq C \prec Y, \qquad (b) \quad Y = Z'' \vee C, \tag{4.7}$$

Niech $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$. Oznaczmy $B = U_1 \vee Z''$. Ponieważ $Z_1 \prec Z''$, to z (1.1) $Z_1 \vee U_1 \preceq Z'' \vee U_1$, a stąd ponieważ $Z_1 \subseteq U_1$ mamy $U_1 \preceq Z'' \vee U_1$ Gdyby $U_1 = Z'' \vee U_1$, to mielibyśmy $Z'' \subseteq U_1$, co jest sprzeczne z założeniem, że $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$. Tak więc $U_1 \prec B$. Weźmy $U_3 = C \wedge B$. Ponieważ $Z_3 \subseteq C, B$, więc $C \wedge B \neq \mathbf{0}$, ponadto $C \prec Y$ z 1.2 $C \wedge B \prec Y \wedge B$. Stąd $C \wedge B \prec B$, gdyż $B \subseteq Y$. Ostatecznie $U_3 \prec B$. Zatem U_1 i U_3 posiadają wspólny nastepnik, a stąd na podstawie 1.10 są współpękowe.

Pokażemy, że istnieje tylko jedno takie U_3 w $\mathcal{Y}$, że U_1 i U_3 są współpękowe. Odcinki $\mathcal{X}'$ i $\mathcal{Y}$ są komplementarne więc $U_3 \in \mathcal{Y} = \mathcal{Y} \setminus \mathcal{X}'$. Przypuśćmy, że poza U_3 w $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{X}'$ istnieje U_3' różny od U_3 i współpękowy z U_1. Wówczas $Z_3 \subseteq U_1$ lub $U_1 \subseteq C$ z 2.6 dla odcinka $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{X}'$. W pierwszym przypadku $U_1 \in \mathcal{X}_3$ i U_1 musiałoby być w $\mathcal{X}'$. W drugim $Z'' \subseteq C$, mielibyśmy zatem sprzeczność z (4.7.b). Pokazaliśmy zatem, że takie U_3' nie istnieje.

(iii) Na początku pokażemy, że $U_1 \vee Z_2 = U_1 \vee Z_3 = U_1 \vee Z''$. Mamy $U_1 \subset U_1 \vee Z_3 \subseteq B$, ale z (ii) wiemy, że $U_1 \prec B$, stąd $U_1 \vee Z_3 = B$. Analogicznie można pokazać, że $U_1 \vee Z_2 = B$.

Teraz pokażemy, że istnieje $U_2 \in \mathcal{X}_2$ współpękowe z U_1 takie, że pęk $\overline{U_1, U_2}$ przecina $\mathcal{Y}$. Weźmy $H = U_1 \wedge C$. W pierwszym przypadku, jeśli $H = \mathbf{0}$, to $U_1 \subseteq\parallel C$. Istnieje wówczas $U_2 = Z_2 * U_1$, które jest współpękowe z U_1 na podstawie własności relacji $*$. Ponieważ z 1.14 wiemy, że $Z_2 \subseteq Z_2 * U_1 \subseteq Z_2 \vee U_1$, to $Z_2 \subseteq U_2 \subseteq Y$, stąd $U_2 \in \mathcal{X}_2$.

W drugim przypadku, gdy $H \neq \mathbf{0}$ na podstawie 1.1 odcinek $[H, Y]$ niesie strukturę kraty rzutowej. Pokażemy, że w $\mathcal{X}_2$ istnieje $U_2 = (U_1 \wedge C) \vee Z_2$ współpękowe z U_1. Weźmy wspólny następnik U_1 i U_3, czyli $B = U_1 \vee Z''$. Rozważmy U_3 postaci $U_3 = (U_1 \wedge C) \vee Z_3 = Z_3 \vee (U_1 \wedge C)$, z (1.3) mamy $Z_3 \vee (U_1 \wedge C) = (Z_3 \vee U_1) \wedge C = B \wedge C$, czyli $U_3 = B \wedge C$. Z (ii) wiemy, że $U_3 \prec B$, a więc $U_3 \wedge U_1 \preceq B \wedge U_1 = U_1$. Gdyby $U_3 \wedge U_1 = U_1$, to mielibyśmy $U_3 \subseteq U_1$, a więc $Z_3 \subseteq U_1$, co jest sprzeczne z założeniem, że $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$, stąd $U_3 \wedge U_1 \prec U_1$.

$$U_3 \wedge U_1 = (B \wedge C) \wedge U_1 = B \wedge (C \wedge U_1) = B \wedge H = H$$

Otrzymaliśmy $H \prec U_1$.

Weźmy $U_2 = (U_1 \wedge C) \vee Z_2 = H \vee Z_2$, mamy $H \prec U_1$, więc $H \vee Z_2 \subseteq B \subseteq Y$. Ponieważ $Z_2 \subseteq U_2 \subseteq Y$, to $U_2 \subseteq \mathcal{X}_2$.

Pokażemy, że istnieje tylko jedno takie U_2 w $\mathcal{X}_2$, współpękowe z U_1 , że pęk $\overline{U_1, U_2}$ przecina $\mathcal{Y}$. Przypuśćmy, że poza U_2 w X_2 istnieje U_2' różny od U_2 i współpękowy z U_1. Pęk $p = \overline{U_1, U_2}$ przecina $\mathcal{Y}$ w dokładnie jednum elemencie U_3, współpękowym z U_1. Pęk $p = \overline{U_1, U_2'}$ również przecina $\mathcal{Y}$ w elemencie U_3, stąd

$$p = \overline{U_1, U_3} = \overline{U_1, U_2} = \overline{U_1, U_2'}$$

Jeśli $U_2 \sim U_2'$,wówczas z 2.4 mamy $p = \overline{U_1, U_2} \subseteq [Z_2, Y]$, co jest sperzeczne ponieważ $U_1 \subseteq \mathcal{X}_1$.

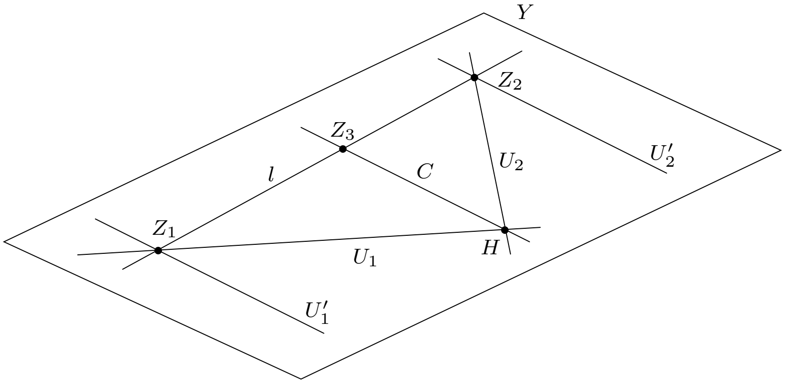
Jeśli natomiast $U_2 \parallel U_2'$, to mamy $U_2 \wedge U_2' = Z_2$, co jest sprzeczne z definicją 1.6.

(iv) Z założeń odcinki $\mathcal{X}'$ i $\mathcal{Y}$ są odcinkami komplementarnymi kowymiaru 1 w odcinku $\mathcal{X}_3 = [Z_3, Y]$, gdzie $Z_3 \neq \mathbf{0}$. Także, zgodnie z 1.1 możemy skorzystać z lematu [8, 1.21], który mówi, że: (a) dla każdego $U_1 \in \mathcal{X}'$ istnieje $U_3 \in \mathcal{Y}$ sąsiedni z U_1 oraz (b) każda prosta przez $U_1 \in \mathcal{X}'$ przecina $\mathcal{Y}$ w dokładnie jednym elemencie lub nie przecina $\mathcal{Y}$ wcale. Ponieważ $\mathcal{X}'$ i $\mathcal{Y}$ są komplementarne (stąd również rozłączne), więc $U_1 \neq U_3$. Zatem U_1, U_3 wyznaczają pęk właściwy $p = \overline{U_1, U_3}$.

Zauważmy, że pęk p przecina $\mathcal{X}_2$ w U_1. Gdyby pęk p przecinał $\mathcal{X}_2$ w U_2 różnym od U_1, to mielibyśmy $p \subseteq \mathcal{X}_2$ z 2.4, a stąd $U_3 \in \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{X}_3 = \mathcal{X}'$, co przeczy komplementarności $\mathcal{X}'$ i $\mathcal{Y}$. □

Dla pęku odcinków typu pr\s lub l\s Twierdzenie 4.8 jest bezpośrednią konsekwencją powyższego lematu.

Przykład 4.12. Rozważmy w przestrzeni afinicznej płaszczyznę Y. Wszystkie dalej rozważane obiekty leżą na Y. Bierzemy prostą l na tej płaszczyźnie i wyróżniamy na niej trzy parami różne punkty: Z_1, Z_2, Z_3. Ustalmy prostą C przechodzącą przez Z_3, różną od l. Określimy teraz odwzorowanie f przyporządkowujące prostym z pęku przez Z_1, proste z pęku przez Z_2.



Rysunek 4.1

Prosta przechodząca przez Z_1 leżąca na Y albo przecina prostą C, albo jest do niej równoległa.

W pierwszym przypadku oznaczmy taką prostą przez U_1, natomiast punkt przecięcia U_1 i C oznaczmy przez H (por. rys. 4.1). Prostą U_2 łączącą punkty Z_2 i H będziemy traktować jako obraz U_1 przy f.

W drugim przypadku mamy prostą U_1' równoległą do C. Wówczas, obrazem prostej U_1' przy f jest prosta U_2' równoległa do U_1 (i C) przechodząca przez punkt Z_2.

Zauważmy, że punkt Z_1, proste przechodzące przez przez Z_1 leżące na Y razem z płaszczyzna Y tworzą odcinek $\mathcal{X}_1 = [Z_1, Y]$ w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. W taki sam sposób otrzymujemy odcinki $\mathcal{X}_2 = [Z_2, Y]$ i $\mathcal{X}_3 = [Z_3, Y]$. Ponieważ Z_1, Z_2, Z_3 są współliniowe, to odcinki $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ i $\mathcal{X}_3$ tworzą pęk typu l\s. Odwzorowanie f jest uogólnionym rzutem środkowym z odcinka $\mathcal{X}_1$ na odcinek $\mathcal{X}_2$ o środku $\mathcal{Y} = [Z_3, C]$.

4.2.3 Pęk typu 0\pr

Lemat 4.13. *Niech G będzie pękiem właściwym odcinków typu* 0\pr *w* $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ *oraz niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}'$ i $\mathcal{Y}$ takie jak w* 4.8. *W tym wypadku $Z_1 = Z_2 = \mathbf{0}$ oraz $\mathcal{X}' = \{\mathbf{0}\}$.*

(i) *Istnieje C takie, że $\mathcal{Y} = [C, Y_3]$ oraz $\mathbf{0} \prec C \subseteq Y_3$.*

(ii) *Jeśli $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$, to $U_3 = (U_1 \vee C) \wedge Y_3$ jest dokładnie jednym elementem $\mathcal{Y}$ współpękowym z U_1.*

(iii) *Jeśli $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$ to*

$$U_2 = (U_1 \vee C) \wedge Y_2$$

jest dokładnie jednym takim elementem $\mathcal{X}_2$ współpękowym z U_1, że pęk $\overline{U_1, U_2}$ przecina $\mathcal{Y}$.

Dowód. (i) Niech C będzie dowolnym atomem zawartym w Y_3. Wówczas mamy $\mathbf{0} \prec C \subseteq Y_3$. Zauważmy, że odcinek $\mathcal{X} = [C, Y_3]$ jest kowymiaru 1 w $\mathcal{X}_3$. Ponieważ w naszym pęku $\mathcal{X}' = \{\mathbf{0}\}$, więc $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}' = \emptyset$ i $\langle \mathcal{X}, \mathcal{X}' \rangle = \mathcal{X}_3$, co oznacza, że odcinki $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ są komplementarne względem X_3. Z definicji odcinka kowymiaru 1 wynika, że $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$.

(ii) Ponieważ $U_1 \neq \mathbf{0}$, to możemy wziąć atom A taki, że $\mathbf{0} \prec A \subseteq U_1$. Z (i) wiadomo, że $\mathcal{Y} = [C, Y_3]$, gdzie C jest atomem. Dlatego $l = \overline{A, C}$ jest pękiem równoległych (l jest prostą w $\mathfrak{A}$). Z uwagi na to, że G jest pękiem odcinków typu 0\pr wiemy, że $\overline{Y_1, Y_3}$ jest także pękiem równoległych. Zauważmy, że $\overline{A, C} \boxtimes \overline{Y_1, Y_3}$ jest waflem typu pr\pr. Z twierdzenia 4.1, istnieje dokładnie jedno $U_3 \in \mathcal{Y}$ współpękowe z $U_1 \in [A, Y_1]$ takie, że

$$U_3 = (U_1 \vee C) \wedge Y_3.$$

(iii) Niech $l = \overline{A, C}$ będzie prostą jak w (ii). Zauważmy, że Y_2 jest kowymiaru 1 w Y'' i l leży w Y''. W taki razie albo l przecina Y_2, albo l jest równoległa do Y_2 (w sensie $\subseteq\parallel$). Jeśli $l \subseteq\parallel Y_2$, to ponieważ $A \subset Y_1$ i $Y_1 \parallel Y_3$, więc mielibyśmy $C \subset Y_1$, co nie jest możliwe z uwagi na to, że $C \in \mathcal{X}_3$ i $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_3 = \{\mathbf{0}\}$. Prosta l przecina więc Y_2; oznaczmy punkt przecięcia jako Z_2. Musi być $Z_2 \neq A$, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy $Z_2 = A \in \mathcal{X}' = \{\mathbf{0}\}$.

Podobnie jak w (ii) zauważmy, że $\overline{A, Z_2} \boxtimes \overline{Y_1, Y_2}$ jest waflem typu pr\pr i z 4.1 otrzymujemy, że

$$U_2 = (U_1 \vee Z_2) \wedge Y_2 \tag{4.8}$$

jest jedynym elementem $\mathcal{X}_2$ współpękowym z U_1.

Ze względu na to, że prosta l przecina podprzestrzeń U_1 (w A) i nie jest zawarta w U_1, więc

$$U_1 \vee C = \langle U_1, C \rangle = \langle U_1, l \rangle = \langle U_1, Z_2 \rangle = U_1 \vee Z_2.$$

Stąd razem z (4.8) i (ii) mamy

$$U_2 = (U_1 \vee C) \wedge Y_2.$$

□

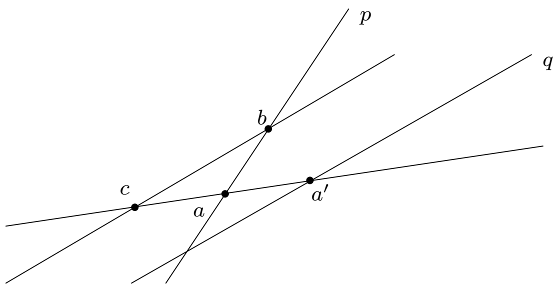
W przypadku pęku 0\pr Twierdzenie 4.8 wynika bezpośrednio z wyżej udowodnionego lematu.

Przykład 4.14. Rozważmy dwie równoległe płaszczyzny Y_1 i Y_2. Ustalamy punkt C, nie należący do żadnej z nich. Określimy teraz odwzorowanie f przyporządkowujące punktom płaszczyzny Y_1, punkty z płaszczyzny Y_2. Na płaszczyźnie Y_1 wybieramy dowolny punkt, oznaczamy ją U_1. Punkty C i U_1 wyznaczają prostą. Przecięciem tej prostej i Y_2 jest punkt U_2, który będziemy traktować jako obraz U_1 przy f. Obrazy prostych z Y_1 znajdziemy punkt po punkcie, bedą to odpowiednie proste na Y_2.

Płaszczyzny Y_1, Y_2, wraz leżącymi na nich punktami i prostymi tworzą odpowiednio odcinki $\mathcal{X}_1 = [\mathbf{0}, Y_1]$ i $\mathcal{X}_2 = [\mathbf{0}, Y_2]$. Ponieważ płaszczyzny Y_1, Y_2 są równoległe, to $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ tworzą pęk typu 0\pr. Określone odwzorowanie jest f rzutem środkowym o środku C.

4.3 Uogólniony rzut równoległy

Z elementarnej geometri wiadomo, że w przestrzeni afinicznej nie da się dobrze określić rzutu środkowego dla prostych przecinających się. Na rys. 4.2 nie znajdziemy obrazu punktu b. Odzwierciedleniem tej klasycznej sytuacji jest pęk typu 0\pw, dla którego jak do tej pory nie mamy określonego rzutu.



Rysunek 4.2

Dla elementów U_1, U_2 i prostej L w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ piszemy $U_1 /\!\!/_L U_2$, gdy dla każdego $a \in U_1 \setminus U_2$ istnieje $b \in U_2$ takie, że $\overline{a,b} \parallel L$ oraz dla każdego $b \in U_2 \setminus U_1$ istnieje $a \in U_1$ takie, że $\overline{a,b} \parallel L$.

Stwierdzenie 4.15. *Niech U_1, U_2 będą różnymi, współpękowymi elementami w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $U_1 /\!\!/_L U_2$,

(2) $U_1 \ovee L = U_2 \ovee L$,

(3) $L \subseteq\parallel U_1 \vee U_2$ *i* $L \not\subseteq\parallel U_i$.

Uwaga: *Implikacja* (1) $\Longrightarrow$ (2) *jest prawdziwa bez założenia współpękowości* U_1, U_2.

Dowód. (1) $\Longrightarrow$ (2) Pokażemy, że $U_1 \ovee L \subseteq U_2 \ovee L$. Niech $a \in U_1 \ovee L$. Albo (i) $a \in U_1$, albo (ii) $(a * L) \cap U_1 \neq \emptyset$.

W przypadku (i), gdyby $a \in U_2$, to z faktu, że $U_2 \subseteq U_2 \ovee L$ mielibyśmy $a \in U_2 \ovee L$. Załóżmy, więc teraz że $a \in U_1 \setminus U_2$. Z określenia relacji $/\!\!/_L$ mamy $b \in U_2$ takie, że $\overline{a,b} \parallel L$. Ponieważ $\overline{a,b} \cap U_2 \neq \emptyset$, więc $a \in U_2 \ovee L$.

W przypadku (ii), niech $a' \in (a * L) \cap U_1$. Jeśli $a' \in U_2$, to $a \in U_2 \ovee L$, jeśli natomiast $a' \notin U_2$, to z definicji $/\!\!/_L$ mamy $b \in U_2$ takie, że $\overline{a',b} \parallel L$. Ponieważ $a' \in (a * L)$, więc $\overline{a',b} = a * L$ i stąd $a \in U_2 \ovee L$.

Inkluzję odwrotną dowodzi się analogicznie, gdyż relacja $/\!\!/_L$ jest symetryczna.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Weźmy jakiekolwiek $a \in U_1 \setminus U_2$. Zauważmy, że z założenia $a * L \subseteq U_2 \ovee L$. Oznacza to, że $(a * L) \cap U_2 \neq \emptyset$. Niech więc $b \in (a * L) \cap U_2$. Otrzymujemy $\overline{a,b} \subseteq U_1 \vee U_2$, czyli $L \subseteq\parallel U_1 \vee U_2$.

Gdyby $L \not\subseteq\!\| \, U_i$ dla $i = 1$ lub $i = 2$, to mielibyśmy

$$U_{3-i} \subseteq U_{3-i} \varovee L = U_i \varovee L = U_i,$$

co przeczy założeniu, że U_1, U_2 są różne i współpękowe.

(3) $\implies$ (1) Niech $a \in U_1 \setminus U_2$. Rozważmy prostą $a * L$. Mamy $a * L \subseteq U_1 \vee U_2$, bo $a \in U_1 \vee U_2$ i z założeń $a * L \subseteq\!\| \, U_1 \vee U_2$. Przypuśćmy, że $(a * L) \cap U_2 = \emptyset$. Ponieważ $L \not\subseteq\!\| \, U_2$, więc

$$U_2 \prec\!\!\prec U_2 \vee (a * L) \subseteq U_1 \vee U_2,$$

ale $U_1, U_2 \prec U_1 \vee U_2$, bo U_1, U_2 są współpękowe. Zatem nasze przypuszczenie było fałszywe i prosta $a * L$ przecina U_2. Stąd $b \in U_2$ takie, że $a, b \parallel L$.

Dla $b \in U_2 \setminus U_1$ znajdziemy żądane $a \in U_1$ w analogiczny sposób. □

Lemat 4.16. *Niech* G *będzie pękiem odcinków typu* 0\pw *lub* 0\pr *w* $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathsf{G}$ *i niech* L *będzie prostą w* $\mathfrak{A}$ *taką, że* $L \not\subseteq\!\| \, Y_i$, *oraz* $Y_i \subset Y_{3-i} \varovee L$ *dla* $i = 1, 2$. *Jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1$, *to* $U_2 = (U_1 \varovee L) \wedge Y_2$ *jest jedynym takim elementem* $\mathcal{X}_2$ *współpękowym z* U_1, *że* $U_1 /\!\!/_L U_2$.

Dowód. Niech $U_2 = (U_1 \varovee L) \wedge Y_2$, wówczas $\mathbf{0} \subseteq U_2 \subseteq Y_2$, a więc $U_2 \in \mathcal{X}_2$.

Zaczniemy od pokazania, że $U_1 /\!\!/_L U_2$. Weźmy $a \subseteq U_1 \setminus U_2$, wówczas $a \varovee L \subseteq U_1 \varovee L$. Niech $b = (a \varovee L) \wedge Y_2$. Ponieważ $a \varovee L$ jest prostą, taką że $L \not\subseteq\!\| \, Y_i$, to przecina ona Y_2 w punkcie, stąd b jest punktem. Ponadto skoro $a \varovee L \subseteq U_2$, to $b \subseteq U_2$. Pokazaliśmy zatem, że istnieje b o żądanych własnościach. Weźmy $b \in U_2 \setminus U_1$, wtedy $b \in (U_1 \varovee L)$ i $b \in Y_2$. Ponieważ z założenia $b \notin U_1$, więc b leży na prostej L' takiej, że $L' \parallel L$ i $L' \cap U_1 \neq \emptyset$. Wystarczy wziąć $a \in L' \cap U_1$, które spełnia żądaną tezę.

Z powyższego i 4.15 mamy

$$U_1 \varovee L = U_2 \varovee L.$$

Wykażemy, że U_1 i U_2 są współpękowe. Z 1.16 dla pewnej prostej $L' \parallel L$ takiego, że $L' \cap U_1 \neq \emptyset$, mamy $U_1 \varovee L = U_1 \varovee L'$. Gdyby $L' \subseteq U_1$, to $L \subseteq\!\| \, U_1$, czyli $L \subseteq\!\| \, Y_1$, co jest sprzeczne z założeniem, że $L \not\subseteq\!\| \, Y_i$. Ze względu na to, że prosta L' przecina podprzestrzeń U_1 i nie jest zawarta w U_1, więc

$$U_1 \vee L' = \langle U_1, L' \rangle,$$

a stąd ponieważ $\langle U_1, L' \rangle$ jest najmniejszą podprzestrzenią zawierającą U_1 i L', to $U_1 \prec U_1 \vee L$. W wyniku analogicznego rozumowania otrzymamy $U_2 \prec U_2 \varovee L$, ponadto jak pokazaliśmy $U_1 \varovee L = U_2 \varovee L$, a więc $U_2 \prec U_1 \vee L'$. $U_1 \vee L'$ jest wspólnym następnikiem U_1 i U_2, więc z 1.10 są one współpękowe. □

Definicja 4.17. Niech G będzie pękiem odcinków w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ odcinkami w G i L prostą w $\mathfrak{A}$ spełniającymi założenia 4.16. Odwzorowanie $\overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\downarrow}}\|_L$ określone warunkiem

$$\overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\downarrow}}\|_L(U_1) = U_2 \text{ wtw., gdy } U_1 /\!\!/_L U_2. \tag{4.9}$$

nazywamy *uogólnionym rzutem równoległym o kierunku* L.

Przykład 4.18. Rozważmy w przestrzeni afinicznej dwie płaszczyzny Y_1 i Y_2 przecinające się w prostej Y' oraz prostą L nierównoległą do żadnej z nich. Określimy teraz odwzorowanie f przyporządkowujące podprzestrzeniom Y_1 podprzestrzenie Y_2. Weźmy na płaszczyźnie Y_1 punkt a i poprowadzimy przez niego prostą równoległą do L. Ta prosta przetnie Y_2 w pewnym punkcie b, bo nie jest do Y_2 równoległa, a Y_2 i L leżą w jednej przestrzeni Y'' wymiaru 3. Pubkt b traktujemy jako obraz a przy f. Obraz prostej U_1 z Y_1 znajdziemy punkt po punkcie.

Zauważmy, że płaszczyzna Y_1 oraz wszystkie punkty i proste na niej tworzą odcinek $\mathcal{X}_1 = [\mathbf{0}, Y_1]$ w kracie $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. W taki sam sposób otrzymujemy odcinek $\mathcal{X}_2 = [\mathbf{0}, Y_2]$. Płaszczyzny Y_1, Y_2 tworza pęk właściwy, natomiast $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ tworzą wafel G typu 0\pw. Odwzorowanie f jest uogólnionym rzutem równoległym z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$.

Rozważmy czy możemy rzutować równolegle w przypadku pęków typu pr\pr i l\pr.

Stwierdzenie 4.19. *Niech* G *będzie waflem typu* pr\pr *lub* l\pr *w* $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ *odcinkami w* G *i* L *prostą w* $\mathfrak{A}$ *spełniającymi założenia* 4.16. *Jeśli* $L \subseteq\parallel Z''$, *to dla* $U_1 \subseteq \mathcal{X}_1$ *mamy*

$$(U_1 \oslash L) \wedge Y_2 = Z_2 * U_1.$$

Dowód. Niech $U_2 = (U_1 \oslash L) \wedge Y_2$. Musimy pokazać, że $U_1 \parallel U_2$ i $Z_2 \subseteq U_2$. Ponieważ $Y_1 \parallel Y_2$, to mamy $U_1 \wedge U_2 \subseteq Y_1 \wedge Y_2 = \mathbf{0}$. Z 4.16 natomiast wiemy, że U_1, U_2 są współpękowe, więc musi być $U_1 \parallel U_2$ z 1.6.

Z określenia pęku odcinków Z_2 jest współpękowy z Z_1, więc z 4.1 Z_2 jest jedynym elementem $\mathcal{X}_2$ współpękowym z Z_1. Stąd na mocy 4.16 $Z_2 = (Z_1 \oslash L) \wedge Y_2$, zatem $Z_2 \subseteq U_2$, co kończy dowód. □

4.4 Związki z kratą rzutową

W tym podrozdziale chcemy pokazać jakiej klasie rzutów w kracie rzutowej odpowiadają przedstawione do tej pory rzuty w kracie afinicznej. W tym celu zanurzamy naszą przestrzeń afiniczną $\mathfrak{A}$ w przestrzeń rzutową

$$\mathfrak{P} = \Big\langle \mathrm{Sub}_1(V'), \mathrm{Sub}_2(V'), \subseteq \Big\rangle,$$

gdzie $V' = K \oplus V$, za pomocą przekształcenia

$$\mu \colon V \longrightarrow \mathrm{Sub}_1(V'); \quad \mu(v) = \langle (1, v) \rangle. \tag{4.10}$$

To przekształcenie można rozszerzyć na zbiór podprzestrzeni $\mathfrak{A}$

$$\Phi \colon \mathcal{H}(V) \longrightarrow \mathrm{Sub}(V'); \quad \Phi(U) = \langle \mu(U) \rangle. \tag{4.11}$$

Dodatkowo przyjmijmy, że $\Phi(\mathbf{0}) = \Theta$. Na $\mathrm{Sub}(V')$ możemy określić kratę $\mathfrak{L}(V')$ jako algebrę

$$\mathfrak{L}(V') = \Big\langle \mathrm{Sub}(V'), \cap, + \Big\rangle.$$

Krata $\mathfrak{L}(V')$ jest rzutowa, tzn. jest to modularna krata geometryczna.

Niech $W = \{0\} \times V$. Zauważmy, że W jest podprzestrzenią kowymiaru 1 w V'. Z przestrzeni rzutowej $\mathfrak{P}$ możemy odzyskać przestrzeń afiniczną $\mathfrak{A}$ poprzez usunięcie W.

Dla dowolnego $S \in \mathrm{Sub}(V')$ mamy dwie możliwości:

(1) $S \cap W \prec S$ – wówczas istnieje $U \in \mathcal{H}(V)$ takie, że $\Phi(U) = S$; przekrój $S \cap W$ jest horyzontem S i piszemy $S^\infty := S \cap W$,

(2) $S \subseteq W$ – wówczas S nie jest obrazem żadnej podprzestrzeni $\mathfrak{A}$ przy zanurzeniu Φ, S jest horyzontem tzn. $S = T^\infty$ dla wszystkich takich $T \in \mathrm{Sub}(V')$, że $S \prec T \nsubseteq W$.

Zauważmy, że $\mathrm{Im}\,\Phi = \Big\{S \in \mathrm{Sub}(V') \colon S \cap W \prec S\Big\}$. Możemy określić odwzorowanie γ dane warunkiem:

$$\gamma\colon\ \mathrm{Im}\,\Phi \longrightarrow \mathcal{H}(V); \quad \gamma(S) = \Phi^{-1}(S). \tag{4.12}$$

Przestrzeń jeżowa $\mathfrak{M} = \mathbf{A}_{1,0}(V', W)$, zdefiniowana w [8], jest z dokładnością do odwzorowania μ przestrzenią afiniczną $\mathfrak{A}$. Zatem, twierdzenia dowiedzione dla $\mathfrak{M}$ w [8] pozostają prawdziwe dla $\mathfrak{A}$.

Niech F będzie rzutem z odcinka $\mathcal{X}_1$ na odcinek $\mathcal{X}_2$ w kracie $\mathfrak{L}(V')$. Zgodnie z [8, 3.63] mamy

$$F(\mathcal{X}_1 \cap \mathrm{Im}\,\Phi) = \mathcal{X}_2 \cap \mathrm{Im}\,\Phi \quad \text{oraz} \quad F^{-1}(\mathcal{X}_2 \cap \mathrm{Im}\,\Phi) = \mathcal{X}_1 \cap \mathrm{Im}\,\Phi, \tag{4.13}$$

gdy

$$F\Big(Z_1 + (W \cap Y_1)\Big) = Z_2 + (W \cap Y_2). \tag{4.14}$$

Pytanie jakie tutaj stawiamy to jakie dodatkowe warunki musi spełniać F, aby $\gamma \circ F\Big|\mathrm{Im}\,\Phi \circ \Phi$ był jednym z wcześniej określonych rzutów na odcinkach $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Odpowiedź na to pytanie daje następne twierdzenie.

Twierdzenie 4.20. *Niech* $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ *będzie pękiem odcinków w kracie* $\mathfrak{L}(V')$. *Jeśli* $F\Big(Z_1 + (W \cap Y_1)\Big) = Z_2 + (W \cap Y_2)$ *oraz* $\overline{Z_1, Z_2} \subset \mathrm{Im}\,\Phi$, *to istnieje taki rzut* f *między pewnymi odcinkami* $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ *kraty* $\mathfrak{L}(A)$, *że poniższy diagram jest przemienny.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_1 \cap \mathrm{Im}\,\Phi \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{X}_2 \cap \mathrm{Im}\,\Phi \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathcal{Z}_1 \arrow[r, "f"'] & \mathcal{Z}_2
\end{tikzcd}$$

Dowód. Oznaczmy $p := \overline{Z_1, Z_2}$, $q := \overline{Y_1, Y_2}$ oraz $\mathcal{Z}_i = \gamma(\mathcal{X}_i \cap \mathrm{Im}\,\Phi)$, $i = 1, 2$. Założenie $p \subset \mathrm{Im}\,\Phi$ mówi, że przy przejściu z $\mathfrak{P}$ do $\mathfrak{A}$ nie „wyrzucamy” żadnego z elementów na pęku p. Oznacza to, że $\gamma(\mathcal{X}_i \cap \mathrm{Im}\,\Phi)$ jest odcinkiem w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ dla $i = 1, 2$ i podobnie dla pozostałych odcinków leżących w G.

Zacznijmy od rozpatrzenia przypadku, gdy G jest waflem. W tej sytuacji zarówno $\gamma(Z_1)$, $\gamma(Z_2)$, jak i $\gamma(Y_1)$, $\gamma(Y_2)$, wyznaczają pęki w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Obrazem

G przy γ będzie więc wafel w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Z 4.2 mamy w tym waflu ślizg $f := \mathop{\downarrow}^{\mathcal{Z}_1}_{\mathcal{Z}_2}$. Niech $U \in \mathcal{X}_1 \cap \operatorname{Im}\Phi$. Wówczas z (4.13) mamy $F(U) \in \operatorname{Im}\Phi$. Elementy $F(U)$ i U są współpękowe, więc $\gamma(F(U))$ i $\gamma(U)$ są również współpękowe. Zatem zgodnie z 4.2

$$\gamma(F(U)) = f(\gamma(U)),$$

co w tm wypadku kończy dowód.

Teraz niech G będzie pękiem właściwym odcinków typu gwiazda, czyli $Z_1 = Z_2 =: Z$. Ponieważ F jest tutaj uogólnionym rzutem środkowym, to mamy też środek rzutu $\mathcal{Y} = [C, Y_3]$ dla pewnego C takiego, że $Z \prec C \subseteq Y_3$, $C \cap Y' = Z$, $C + Y' = Y_3$ i $Y_3 \in q$, $Y_3 \neq Y_1, Y_2$. Zgodnie z [8] wzór na F wygląda następująco:

$$F(U) = \Big((U + C) \cap Y_2\Big) \quad \text{dla} \quad U \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'. \tag{4.15}$$

Jeśli $Z \neq \Theta$, to $[Z, Y''] \subset \operatorname{Im}\Phi$ gdyż $Z \in \operatorname{Im}\Phi$. W takim razie $F\Big|\operatorname{Im}\Phi = F$, a stąd zgodnie z 4.8 $f = \gamma \circ F \circ \Phi$ jest uogólnionym rzutem środkowym w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Rozważmy sytuację gdy $Z = \Theta$. Dodatkowo załóżmy, że $Y' \nsubseteq W$, czyli $\gamma(Y_1), \gamma(Y_2)$ rozpinają pęk właściwy w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, a więc G przy γ przejdzie na pęk typu 0\pw. Wówczas $Y_1 \cap W = Y_1^\infty \neq Y_2^\infty = Y_2 \cap W$ i z [8, 3.66(b)] mamy $W \cap Y_3 \in \mathcal{Y}$, to znaczy $C \subseteq W \cap Y_3 \subseteq W$. Weźmy atom $A \subseteq Y' \setminus W$ i oznaczmy $L := A + C$. Zauważmy, że L jest prostą i $L^\infty = C$. Ponadto $L^\infty \nsubseteq Y_i^\infty$ dla $i = 1, 2$, gdyż w przeciwnym razie byłoby $C \subseteq Y_i \cap W \subseteq Y_i$ i w konsekwencji $C \subseteq Y_3 \cap Y_i = Y'$. To oznacza, że

$$\gamma(L) \subsetneq\!\!\!/\!\| \; \gamma(Y_i). \tag{4.16}$$

Spełniony jest również warunek, że

$$\gamma(Y_i) \subseteq \gamma(Y_{3-i}) \ovee \gamma(L), \tag{4.17}$$

bo $Y_i \subseteq Y_{3-i} + L^\infty$. Zgodnie zatem z 4.17 możemy rozważać rzut równoległy f z $\mathcal{Z}_1$ na $\mathcal{Z}_2$ o kierunku $\gamma(L)$. Niech $U \in (\mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}') \cap \operatorname{Im}\Phi$. Zgodnie z (4.15)

$$\gamma(F(U)) = \gamma\Big((U + C) \cap Y_2\Big) = \gamma(U + C) \wedge \gamma(Y_2) =$$
$$\gamma(U + L^\infty) \wedge \gamma(Y_2) = \Big(\gamma(U) \ovee \gamma(L)\Big) \wedge \gamma(Y_2) = f(\gamma(U)).$$

Gdy $U \in \mathcal{X}' \cap \operatorname{Im}\Phi$, to $\gamma(F(U)) = \gamma(U) = f(\gamma(U))$. Pokazaliśmy, że diagram jest przemienny.

Dalej $Z = \Theta$, ale teraz $Y' \subseteq W$, czyli $\gamma(Y_1), \gamma(Y_2)$ rozpinają pęk równoległych w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Są dwie możliwości: albo $C \subseteq W$, albo $C \nsubseteq W$. W pierwszym przypadku znajdziemy rzut równoległy. Niech $L = C + A$, gdzie A to atom taki, że $A \nsubseteq W$. Spełnione są (4.16) i (4.17) bo teraz $C \subseteq W$ tak jak poprzednio. Podobnie jak wyżej pokażemy, że $\gamma(F(U)) = f(\gamma(U))$ dla f rzutu równoległego o kierunku $\gamma(L)$.

Pozostaje do przeanalizowania przypadek, gdy $Z = \mathbf{0}$, $Y' \subseteq W$ i $C \nsubseteq W$.

Tutaj $\mathcal{Y} \subset \operatorname{Im}\Phi$, a więc spełnione są założenia 4.13, skąd $\gamma(F(U)) = f(\gamma(U))$ dla uogólnionego rzutu środkowego f w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, o środku w $\gamma(\mathcal{Y})$.

Ostatni przypadek G to pęk właściwy odcinków typu układ, czyli $Y_1 = Y_2 =: Y$. Środkiem rzutu F jest tutaj $\mathcal{Y} = [Z_3, C]$ dla pewnego C takiego, że $Z_3 \subseteq C \prec Y$, $C \cap Z'' = Z_3$, $C + Z'' = Y$ i $Z_3 \in p$, $Z_3 \neq Z_1, Z_2$.
Jeśli $Z' \nsubseteq W$, to $\mathcal{Y} \subset \operatorname{Im}\Phi$ i możemy wziąć uogólniony rzut środkowy f z $\mathcal{Z}_1$ na $\mathcal{Z}_2$ o środku w $\gamma(\mathcal{Y})$. Z 4.8 $\gamma(F(U)) = f(\gamma(U))$. Zgodnie z [8] wzór na F jest następujący:

$$F(U) = \Big((U \cap C) + Z_2\Big) \quad \text{dla} \quad U \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'. \tag{4.18}$$

Rozważmy teraz przypadek gdy $Z' \subseteq W$. Oznacza to, że $\gamma(Z_1), \gamma(Z_2)$ wyznaczają pęk równoległych lub prostą w $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ i otrzymujemy odpowiednio pęk odcinków typu pr\s lub l\s.
Załóżmy, że $C \nsubseteq W$. Ponieważ $Z_3 \in p \subset \operatorname{Im}\Phi$, więc możemy wziąć uogólniony rzut środkowy f z $\mathcal{Z}_1$ na $\mathcal{Z}_2$ o środku $\gamma(\mathcal{Y})$ i tak jak przed chwilą $\gamma(F(U)) = f(\gamma(U))$ z 4.8.
Teraz załóżmy, że $C \subseteq W$. Ponieważ $C \prec Y$, więc $U \cap C \preceq U \cap Y = U$. Nie może być $U \cap C = U$, gdyż byłoby wtedy $Z_1 \subseteq U \subseteq C$ i stąd $C \cap Z'' = Z'' \neq Z_3$. To oznacza, że $U \cap C \prec U$. Ale $U \cap W \prec U$ i $U \cap C \subseteq U \cap W$, więc $U \cap C = U \cap W$. Niech f będzie ślizgiem równoległym z $\mathcal{Z}_1$ na $\mathcal{Z}_2$ określonym w 4.7. Zgodnie z (4.18) dla $U \in (\mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}') \cap \operatorname{Im}\Phi$ mamy

$$\gamma(F(U)) = \gamma\Big(Z_2 + (U \cap C)\Big) = \gamma\Big(Z_2 + (U \cap W)\Big) = \\ \gamma(Z_2 + U^{\infty}) = \gamma(Z_2) * \gamma(U) = f(\gamma(U)),$$

zgodnie z 4.6. Jeśli $U \in \mathcal{X}' \cap \operatorname{Im}\Phi$, to $\gamma(F(U)) = \gamma(U) = f(\gamma(U))$. Zatem w tej sytuacji diagram jest przemienny. $\square$

Bez założenia, że $\overline{Z_1, Z_2} \subset \operatorname{Im}\Phi$ w powyższym twierdzeniu, po usunięciu W z $\mathfrak{L}(V')$ w miejscu $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ mogą pojawić się odcinki afiniczne, którymi nie zajmowaliśmy się w tej pracy. Także, jest to istotne założenie, które opisuje jakie rzuty w kracie rzutowej można obciąć tak, by uzyskać studiowane w tej pracy rzuty w kracie afinicznej.

Bibliografia

[1] Birkhoff G., *Lattice theory*, American Mathematical Society 1967.

[2] Gräetzer, G., *General lattice theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, 1978.

[3] Bennet M. K., *Affine and projective geometry*, Wiley-Interscience 1995.

[4] Kordos M., *Podstawy geometrii rzutowej i rzutowo-metrycznej*, PWN 1984.

[5] Oryszczyszyn H. and Prażmowski K., *On projections in projective spaces*, Demonstratio Math. XXXI, 1 (1998), 193-202.

[6] Prażmowski K. and Radziszewski K., *Projections and projective collineations in semiaffine line spaces*, Rend.Sem.Mat.Messina VI(1999), 33-52.

[7] Prażmowski K. and Żynel M., *General projections in spaces of pencils*, Mimeographed.

[8] Żynel M., *Rzutowania w kracie podprzestrzeni przestrzeni wektorowej*, Rozprawa doktorska.