Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyczno-Fizyczny

Instytut Matematyki

Aneta Łukaszuk

Geometria relacji równoległości na produkcie Segre afinicznych przestrzeni Grassmanna

Praca została napisana
pod kierunkiem
dr. Mariusza Żynela

Białystok 2006

Spis treści

Wstęp

Podstawowe własności produktów Segren należą do folkloru geometrii. Bardziej zaawansowane wyniki można znaleźć np. w pracy [2], gdzie podana jest postać mocnych podprzestrzeni.

Wybierając w zbiorze punktów produktu Segre odpowiednio regularny podzbiór można uzyskać nowe, ciekawe geometrie. W pracy zajmuję się produktem Segre $\mathcal{N}$ grassmannianów afinicznych nad ustaloną przestrzenią afiniczną $\mathfrak{A}$, obciętym do (niesymetrycznej) relacji równoległości $\subseteq\|$ w $\mathfrak{A}$.

Celem mojej pracy było zbadanie podstawowych własności tego podproduktu. Własności te wynikają ze związków i prawidłowości zachodzących w wyjściowej przestrzeni afinicznej, grassmannianie afinicznym i produkcie Segre.

Pierwszy rozdział pracy poświęciłam w całości podstawowym definicjom wykorzystywanym w następnych rozdziałach. W drugim rozdziale, zajmuje się badaniem potrzebnych później własności grassmannianu afinicznego. Dowodzę, że grassmannian afiniczny jest spójny (tw. 2.4). Wyznaczam warunek konieczny na to, aby trzy punkty tworzyły trójkąt (stw. 2.5), określam postać maksymalnych mocnych podprzestrzeni (tw. 2.12) oraz badam zależności trójkątów z mocnymi podprzestrzeniami (tw. 2.13). Pokazuję także, iż spełniony jest afiniczny warunek Veblena (tw. 2.15), warunek Shulta (tw. 2.16), oba warianty afinicznego warunku Desarguesa (tw. 2.17) oraz warunek o uzupełnieniu do równoległoboku (tw. 2.18).

Trzeci rozdział poświęcony jest produktowi Segre $\mathcal{M}$ grassmannianów afinicznych. Zaczynam od wyznaczenia postaci prostych przestrzeni $\mathcal{M}$ (tw. 3.2). Następnie dowodzę, iż przestrzeń $\mathcal{M}$ jest spójna (tw. 3.3). W rozdziale tym określam także postacie trójkątów (lem. 3.4) oraz mocnych podprzestrzeni (tw. 3.5).

Bardzo ważne dla dalszych rozważań było zauważenie, że relacja równoległości $\subseteq\|$, jako zbiór par, jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{M}$ (lem. 4.1). W ten sposób upraszcza się np. ustalenie maksymalnych mocnych podprzestrzeni w podprodukcie $\mathcal{N}$.

W ostatnim, czwartym rozdziale, zebrane są zasadnicze wyniki pracy. W twierdzeniu 4.4 przedstawione są wszystkie możliwe postacie prostych przestrzeni $\mathcal{N}$. Następnie, w 4.5 dowodzę, że przestrzeń $\mathcal{N}$ jest spójna. Dokonuję tu również klasyfikacji maksymalnych mocnych podprzestrzeni w $\mathcal{N}$ (tw. 4.11) oraz przedstawiam dowód, że przestrzeń $\mathcal{N}$ spełnia afiniczny warunek Veblena (tw. 4.13), warunek Shulta (tw. 4.14), oba Desarguesa (tw. 4.15) i warunek uzupełnienia do równoległoboku (tw. 4.16).

Rozdział 1

Podstawowe definicje

Rozważmy niepusty zbiór S, którego elementy dalej będziemy nazywać *punktami* oraz rodzinę $\mathcal{L}$ podzbiorów zbioru S, tzn. $\mathcal{L} \subseteq 2^S$, której elementy będziemy nazywać *prostymi*. Struktura $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ jest *częściową przestrzenią prostych* jeśli spełnia następujące warunki:

A1: na każdej prostej leżą co najmniej dwa punkty,

A2: przez dwa różne punkty przechodzi co najwyżej jedna prosta.

Ponadto, gdy w $\mathfrak{M}$

A3: przez każde dwa różne punkty przechodzi prosta,

to $\mathfrak{M}$ nazywamy *przestrzenią prostych*.

Jeśli punkty $a, b \in S$ są różne i współliniowe, to prostą przez nie wyznaczoną oznaczamy przez $\overline{a, b}$.

Mówimy, że podzbiór $X \subseteq S$ jest *podprzestrzenią* częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{M}$, gdy jest domknięty ze względu na prowadzenie prostych, tzn. gdy dla dowolnej prostej $l \in \mathcal{L}$ warunek $\left|l \cap X\right| \geqslant 2$ implikuje $l \subseteq X$. Mówimy, że podprzestrzeń X jest *mocna*, gdy każde dwa punkty z X są współliniowe.

Relację $\parallel \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ nazywamy *równoległością*, gdy jest ona relacją równoważności i spełnia postulat Euklidesa:

E1: (jednoznaczność) proste równoległe są rozłączne albo równe,

E2: (istnienie) dla dowolnego punktu $a \in S$ i prostej $l \in \mathcal{L}$ istnieje prosta $m \in \mathcal{L}$ przez a równoległa do l.

Jeśli relacja $\parallel$ spełnia wymienione warunki poza warunkiem E2, to nazywamy ją relacją *częściowej równoległości*. W ten sposób o $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L}, \parallel \rangle$ możemy mówić (częściowa) przestrzeń prostych z (częściową) równoległością.

Prostą przechodzącą przez punkt a i równoległą do prostej l będziemy oznaczać przez $a * l$.

Podzbiór $X \subseteq S$ jest podprzestrzenią $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L}, \parallel \rangle$, gdy X jest podprzestrzenią $\langle S, \mathcal{L} \rangle$, tzn. jest domknięty ze względu na prowadzenie prostych, oraz gdy X jest domknięty ze względu na prowadzenie prostych równoległych, czyli gdy dla prostych $l, m \in \mathcal{L}$ z warunku $l \subseteq X$, $l \parallel m$ i $m \cap X \neq \emptyset$ wynika, że $m \subseteq X$.

Przez trójkąt w częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{M}$ rozumiemy trzy parami różne i połączalne prostymi z $\mathfrak{M}$, niewspółliniowe (nie leżące na jednej prostej) punkty.

Częściowa przestrzeń prostych $\mathfrak{M}$ jest *spójna*, gdy każde dwa jej punkty można połączyć łamaną, to znaczy, jeśli $a, b \in S$, to istnieje ciąg $c_0, ..., c_n \in S$ taki, że $c_0 = a$, $c_n = b$ i c_{i-1} jest współliniowy z c_i dla $i = 1, ..., n$.

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad niekoniecznie przemiennym ciałem K. Przez $\mathrm{Sub}(V)$ oznaczamy rodzinę wszystkich podprzestrzeni przestrzeni V, natomiast przez $\mathrm{Sub}_k(V)$ rozumiemy zbiór wszystkich k-wymiarowych podprzestrzeni V. Jeśli $B \in \mathrm{Sub}_{k+1}(V)$ i $H \in \mathrm{Sub}_{k-1}(B)$, to zbiór:

$$\mathbf{p}(H, B) = \Big\{ U \in \mathrm{Sub}_k(V) \colon H \subseteq U \subseteq B \Big\}$$

nazywamy *k-pękiem*. Zbiór wszystkich takich pęków przy ustalonym k oznaczamy przez $\mathcal{P}_k(V)$. Geometrię, której punktami są k-wymiarowe podprzestrzenie V, a prostymi k-pęki nazywamy *grassmannianem rzutowym indeksu k nad V* i oznaczamy

$$\mathbf{P}_k(V) = \Big\langle \mathrm{Sub}_k(V), \mathcal{P}_k(V) \Big\rangle.$$

Grassmannian rzutowy jest częściową przestrzenią prostych. Dla $k = 1$ lub $k = \dim(V) - 1$ grassmannian rzutowy jest przestrzenią rzutową, natomiast w pozostałych przypadkach, gdy $1 < k < \dim(V)$, grassmannian rzutowy jest właściwą, częściową przestrzenią prostych, to znaczy istnieją w nim punkty nie połączalne prostymi. Jeśli U, W są punktami w $\mathbf{P}_k(V)$ połączalnymi prostą, to mówimy, że U, W są sąsiednie i piszemy $U \sim W$.

Zbiór wszystkich warstw nad V oznaczamy przez

$$\mathcal{H}(V) = V + \mathrm{Sub}(V) \cup \{\emptyset\} = \Big\{ a + S \colon a \in V,\ S \in \mathrm{Sub}(V) \Big\} \cup \{\emptyset\}.$$

Ponieważ dla warstwy $U = a + S$ jej *podprzestrzeń kierunkowa* S jest wyznaczona jednoznacznie, możemy mówić o wymiarze warstwy; przyjmujemy $\dim U = \dim S$. Zbiór wszystkich k-wymiarowych warstw to

$$\mathcal{H}_k(V) = V + \mathrm{Sub}_k(V) = \Big\{ a + S \colon a \in V,\ S \in \mathrm{Sub}_k(V) \Big\}.$$

Dodatkowo przyjmujemy, że $\mathcal{H}_{-1}(V) = \{\emptyset\}$.

Mówimy, że warstwa $a + S$ jest *równoległa* do warstwy $b + T$ i piszemy

$$a + S \subseteq\parallel b + T, \quad \text{wtw., gdy} \quad S \subseteq T. \tag{1.1}$$

[1.1] eq:zawrow
Określona w ten sposób relacja $\subseteq\parallel$ nie jest symetryczna. Zauważmy jednak, że na zbiorze $\mathcal{H}_k(V)$, relacja $\subseteq\parallel$ jest symetryczna, jest więc na tym zbiorze relacją równoważności. Jeśli $U, W \in \mathcal{H}_k(V)$ i $U \subseteq\parallel W$ (lub równoważnie $W \subseteq\parallel U$), to piszemy wtedy standardowo $U \parallel W$.

Stuktura
$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(V) = \left\langle V, \mathcal{H}_1(V), \subseteq\parallel \right\rangle$$
jest *przestrzenią afiniczną*. Przestrzeń afiniczna jest przestrzenią prostych z równoległością spełniającą afiniczny warunek Veblena.

W przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$, gdzie proste są co najmniej trzy punktowe jeśli podzbiór zbioru punktów $\mathfrak{A}$ jest domknięty na prowadzenie prostych, to jest również domknięty na prowadzenie równoległych. Wynika to z afinicznego warunku Veblena.

Dla podprzestrzeni U, W przestrzeni $\mathfrak{A}$, o ile $U \subseteq\parallel W$, przez $U * W$ oznaczamy podprzestrzeń zawierającą U i równoległą (symetrycznie) do W, tzn.
$$U \subseteq U * W \parallel W.$$

Dla wygody w zbiorze $\mathcal{H}(V)$ wprowadzamy operacje kresu dolnego
$$a + S \sqcap b + T := a + S \cap b + T \tag{1.2}$$
i kresu górnego:
$$a + S \sqcup b + T := a + \langle S, T, a - b \rangle. \tag{1.3}$$

Poprzednikiem niepustej podprzestrzeni U w przestrzeni $\mathfrak{A}$ nazywamy podprzestrzeń W kowymiaru 1 w U. *Następnikiem* podprzestrzeni właściwej U w przestrzeni $\mathfrak{A}$ nazywamy podprzestrzeń W taką, że U jest kowymiaru 1 w W.

[1.1] lem:WrowU

Lemat 1.1. *Jeżeli U_1, U_2, W są podprzestrzeniami $\mathfrak{A}$ takimi, że $W \subseteq\parallel U_1, U_2$ i $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, to $W \subseteq\parallel U_1 \cap U_2$.*

DOWÓD. Niech $W = w_0 + W_0$. Weźmy W_1, W_2 takie, że $W \parallel W_i \subseteq U_i$. Niech $W_1 = w_1 + W_0 \subseteq U_1$ i $W_2 = w_2 + W_0 \subseteq U_2$. Ponieważ $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, zatem istnieje u takie, że $u \in U_1 \cap U_2$. Zauważmy, że $u + W_0 = u - w_1 + w_1 + W_0 \subseteq U_1$ oraz $u + W_0 = u - w_2 + w_2 + W_0 \subseteq U_2$. Stąd dostajemy, że $u + W_0 \subseteq U_1 \cap U_2$. Ostatecznie otrzymujemy $W \parallel u + W_0 \subseteq U_1 \cap U_2$. □

[1.2] lem:UrowW

Lemat 1.2. *Jeżeli U_1, U_2, W są podprzestrzeniami $\mathfrak{A}$ takimi, że $U_1, U_2 \subseteq\parallel W$ i $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, to $U_1 \sqcup U_2 \subseteq\parallel W$.*

DOWÓD. Ponieważ $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, to weźmy $u \in U_1 \cap U_2$. Wtedy możemy określić U_1, U_2 w następujący sposób $U_1 = u + S$, $U_2 = u + T$, gdzie S i T są podprzestrzeniami V. Mamy również $W = w_0 + W_0$, gdzie $W_0 \in \mathrm{Sub}(V)$. Zatem $U_1 \sqcup U_2 = u + \langle S, T, u - u \rangle = u + \langle S, T \rangle$. Ponieważ $S, T \subseteq W_0$, więc $U_1 \sqcup U_2 \subseteq\parallel W$. □

Rozdział 2

Grassmannian afiniczny

Mówimy, że podprzestrzenie U i W przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ są *sąsiednie* i piszemy $U \sim W$, gdy $\dim U = \dim W = \dim(U \cap W) + 1$ lub gdy $U = W$.

Dla każdej pary H, B podprzestrzeni przestrzeni $\mathfrak{A}$ takich, że $H \subset B$ i $\dim H + 1 = k = \dim B - 1$ określamy *k-pęk właściwy*:

$$\mathbf{p}(H, B) := \Big\{W \in \mathcal{H}_k(V) : H \subset W \subset B\Big\}. \tag{2.1}$$

[2.1] eq:pw

Podprzestrzeń H nazywamy *wierzchołkiem*, a B *podstawą* pęku $\mathbf{p}(H, B)$. Zbiór wszystkich *k-pęków właściwych* w $\mathfrak{A}$ oznaczamy przez $\mathcal{P}_k(\mathfrak{A})$.

Teraz, dla podprzestrzeni U i B przestrzeni $\mathfrak{A}$, takich że $\dim U = k = \dim B - 1$ oraz $U \subseteq\parallel B$ określamy *k-pęk równoległych*:

$$\mathbf{p}^*(U, B) := \Big\{W \in \mathcal{H}_k(V) : U \subseteq\parallel W \subset B\Big\}. \tag{2.2}$$

[2.2] eq:pr

Podprzestrzeń U nazywamy *kierunkiem*, a B *podstawą* pęku $\mathbf{p}^*(U, B)$. Zbiór wszystkich *k-pęków równoległych* w $\mathfrak{A}$ oznaczamy przez $\mathcal{P}^*_k(\mathfrak{A})$.

Podprzestrzenie U i W przestrzeni $\mathfrak{A}$ są *współpękowe*, gdy leżą w jednym pęku (pęku właściwym lub pęku równoległych). Zauważmy, że elementy $\mathcal{H}_k(V)$ są współpękowe, gdy są sąsiednie lub równoległe. Generalnie, równoległe elementy $\mathcal{H}(V)$ nie muszą być współpękowe, gdyż równoległość nie jest symetryczna.

Zanotujmy w tym miejscu dwa ważne fakty.

[2.1] fact:SlR

Fakt 2.1. *Niech W_1, W_2 będą różnymi elementami pęku $\mathbf{p}(H, B)$ lub $\mathbf{p}^*(U, B)$. Wówczas $B = W_1 \sqcup W_2$ i odpowiednio $H = W_1 \cap W_2$ lub $U \subseteq\parallel W_1 \parallel W_2$.*

[2.2] fact:SlW

Fakt 2.2. *Niech $U_1, U_2 \in \mathcal{H}_k(V)$. Jeśli $\dim(U_1 \cap U_2) = k - 1$, to U_1, U_2 są sąsiednie. Jeśli $\dim(U_1 \sqcup U_2) = k + 1$, to $U_1 \sim U_2$ lub $U_1 \parallel U_2$, czyli są współpękowe.*

Na zbiorze $\mathcal{P}^*_k(\mathfrak{A})$ określamy relację (częściowej) równoległości w następujący sposób:

$$\mathbf{p}^*(U_1, B_1) \parallel \mathbf{p}^*(U_2, B_2) \quad \text{wtw., gdy} \quad B_1 \parallel B_2.$$

Powyższa relacja jest relacją równoważności. Spełnia ona też część postulatu Euklidesa, to znaczy, jeśli dwa pęki $\mathbf{p}^*(U_1, B_1)$ i $\mathbf{p}^*(U_2, B_2)$ są równoległe i przecinają się niepusto, to muszą być równe.

Grassmannianem afinicznym indeksu k nad przestrzenią afiniczną $\mathfrak{A}$ nazywamy strukturę

$$\mathbf{P}_k(\mathfrak{A}) = \left\langle \mathcal{H}_k(V), \mathcal{P}_k(\mathfrak{A}) \cup \mathcal{P}_k^*(\mathfrak{A}) \right\rangle.$$

Grassmannian afiniczny jest częściową przestrzenią prostych. Zauważmy, że $\mathbf{P}_0(\mathfrak{A})$ jest przestrzenią afiniczną. Dwie proste na płaszczyźnie afinicznej albo przecinają się (są sąsiednie), albo są równoległe, innymi słowy są zawsze współpękowe. Czyli $\mathbf{P}_{n-1}(\mathfrak{A})$, gdzie $n = \dim V$ jest przestrzenią prostych.

O ile w kontekście przestrzeni afinicznych lepiej mówić o k-pękach, to w grassmannianach wygodniej obiekty te nazywać prostymi.

W dalszych rozważaniach na temat grassmannianów afinicznych zakładamy, że

$$0 < k.$$

2.1 Spójność

[2.3] lem:spgrrzut

Lemat 2.3. *Grassmannian rzutowy jest spójny.*

Dowód. Niech U, W będą punktami grassmannianu rzutowego $\mathbf{P}_k(V)$, tzn. niech $U, W \in \mathrm{Sub}_k(V)$. Weźmy $Z := U \cap W$. Możemy wówczas napisać, że

$$U = Z \oplus \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$$

oraz

$$W = Z \oplus \langle w_1, \ldots, w_r \rangle,$$

gdzie $r + \dim Z = k$. Niech $P_0 := U$ będzie naszym wyjściowym punktem. Weźmy

$$P_1 := Z \oplus \langle w_1, u_2, \ldots, u_r \rangle.$$

Zauważmy, że $\dim P_0 \cap P_1 = k - 1$, zatem P_0 i P_1 są współpękowe. Następnie wyznaczamy kolejny punkt,

$$P_2 := Z \oplus \langle w_1, w_2, u_3, \ldots, u_r \rangle$$

i jak wyżej, $\dim P_1 \cap P_2 = k - 1$, zatem P_1 i P_2 są współpękowe. Postępując analogicznie r razy dojdziemy do punktu

$$P_r = Z \oplus \langle w_1, w_2, \ldots, w_r \rangle = W$$

i otrzymamy łamaną o wierzchołkach P_i, gdzie $i = 0, \ldots, r$, co kończy dowód. □

[2.4] thm:spgraf

Twierdzenie 2.4. *Grassmannian afiniczny jest spójny.*

Dowód. Niech U, W będą punktami grassmannianu afinicznego $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, tzn. $U, W \in \mathcal{H}_k(V)$. Zatem

$$U = a + S, \quad W = b + T, \quad \text{dla pewnych} \quad a, b \in V, \quad S, T \in \mathrm{Sub}_k(V).$$

Zauważmy, że $S \in \mathcal{H}_k(V)$ i $S \parallel U$. Dlatego też S i U są współpękowe w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Weźmy więc $P_0 := U$ i $P_1 := S$. Ponieważ $S, T \in \mathrm{Sub}_k(V)$, więc na mocy 2.3 można je połączyć łamaną o wierzchołkach P_i, gdzie $i = 1, \ldots, r$ dla pewnego naturalnego r. Ponieważ $\mathrm{Sub}_k(V) \subset \mathcal{H}_k(V)$ i współpękowość w $\mathbf{P}_k(V)$ implikuje współpękowość w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, otrzymujemy więc łamaną P_i w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ dla $i = 0, \ldots, r$. Weźmy jeszcze $P_{r+1} := W$. Zauważmy, że $W \parallel T$, a więc $P_r = T$ i $P_{r+1} = W$ są współpękowe w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Łamana o wierzchołkach

$$P_i, \quad \text{gdzie} \quad i = 0, \ldots, r+1$$

łączy punkty U, W, a zatem grassmannian afiniczny jest spójny. □

2.2 Trójkąty

[2.5] prop:trójkątgras

Stwierdzenie 2.5. *Jeśli punkty U_i dla $i = 1, 2, 3$ są wierzchołkami trójkąta w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, to zachodzi jedna z trzech możliwości:*

(1) $U_1 \sim U_2 \sim U_3 \sim U_1$,

(2) $U_i \parallel U_j \sim U_k \sim U_i$, *gdzie* $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, $\neq (i, j, k)$,

(3) $U_1 \parallel U_2 \parallel U_3$.

Dowód. Załóżmy, że U_i dla $i = 1, 2, 3$ są wierzchołkami trójkąta w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Z definicji trójkąta wiemy, że U_1, U_2, U_3 są parami różne oraz współpękowe w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Zatem z określenia pojęcia współpękowości U_i dla $i = 1, 2, 3$ są albo sąsiednie albo równoległe. Stąd otrzymujemy następujące możliwości:

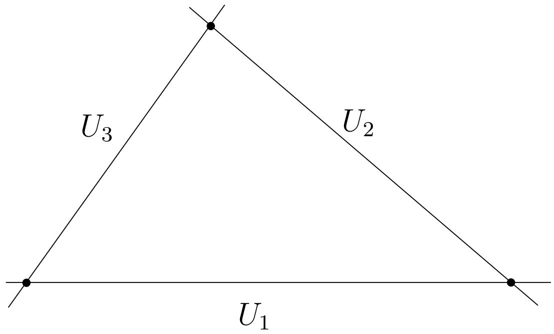
1. $U_1 \sim U_2 \sim U_3 \sim U_1$;
2. $U_i \parallel U_j \sim U_k \sim U_i$, gdzie $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, $\neq (i, j, k)$;
3. $U_i \sim U_j \parallel U_k \parallel U_i$, gdzie $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, $\neq (i, j, k)$;
4. $U_1 \parallel U_2 \parallel U_3$.

Rozważmy przypadek 3. Przyjmijmy bez ograniczenia ogólności, że

$$U_1 \sim U_2 \parallel U_3 \parallel U_1.$$

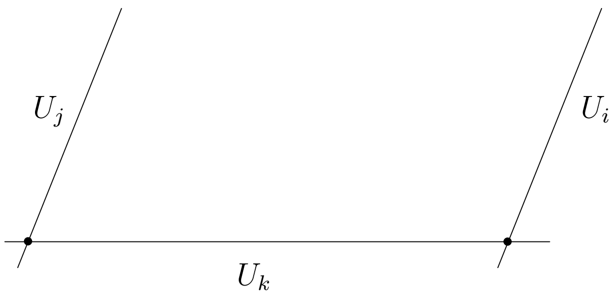
Ponieważ U_i dla $i = 1, 2, 3$ są jednakowych wymiarów, więc z przechodniości relacji równoległości mamy $U_1 \parallel U_2$. Zatem zgodnie z założeniem, że $U_1 \sim U_2$ musi być $U_1 = U_2$. Przeczy to jednak wcześniejszym założeniom, że U_1, U_2 są różne. W ten sposób pokazaliśmy, że przypadek 3 nigdy nie zachodzi. □

Dla wygody nadajmy nazwy powyższym typom trójkątów. I tak w przypadku (1) w 2.5, gdy wierzchołki są parami sąsiednie, mówimy, że trójkąt jest *typu 1*.



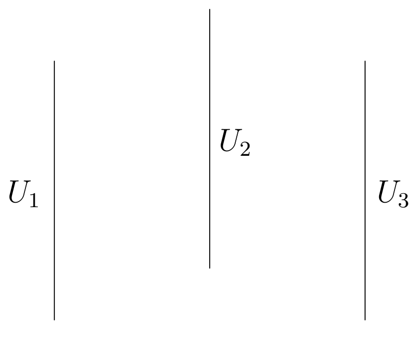
Rysunek 2.1: Trójkąt typu 1 w $\mathbf{P}_1(\mathfrak{A})$.

Trójkąt powstały w przypadku (2) w 2.5 nazywamy trójkątem *typu 2*.



Rysunek 2.2: Trójkąt typu 2 w $\mathbf{P}_1(\mathfrak{A})$.

Natomiast trójkąt z przypadku (3) w 2.5, którego wszystkie wierzchołki są do siebie parami równoległe nazwiemy trójkątem *typu 3*.



Rysunek 2.3: Trójkąt typu 3 w $\mathbf{P}_1(\mathfrak{A})$.

Na podstawie pracy [4] zanotujmy kilka istotnych faktów związanych z trójkątami w grassmannianach afinicznych.

[2.6] fact:sim

Fakt 2.6. *Niech* $U_1, U_2 \in \mathcal{H}_k(V)$*. Jeśli* $\dim(U_1 \sqcup U_2) = k+1$*, i* $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$*, to* $\dim(U_1 \cap U_2) = k-1$*, czyli* $U_1 \sim U_2$*.*

[2.7] fact:typ1

Fakt 2.7. *Wierzchołki trójkąta typu 1 mają albo wspólny poprzednik, albo wspólny następnik.*

[2.8] fact:typu2

Fakt 2.8. *Wierzchołki trójkąta typu 2 mają wspólny następnik.*

2.3 Mocne podprzestrzenie

Struktura podprzestrzeni wiele mówi o badanej geometrii. W przypadku częściowych przestrzeni prostych interesujące są mocne podprzestrzenie. Badanie mocnych podprzestrzeni w grassmannianach zaczynamy od wprowadzenia pojęcia podprzestrzeni odcinkowej.

Niech $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$. W przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$[1] wyróżniamy dwa typy odcinków:

odcinek właściwy

$$[Z,Y] := \Big\{U \in \mathcal{H}(V) : Z \subseteq U \subseteq Y\Big\},$$

odcinek równoległych

$$[Z,Y]^* := \Big\{U \in \mathcal{H}(V) : Z \subseteq\parallel U \subseteq Y\Big\}.$$

Koniec Z odcinka właściwego nazywamy *wierzchołkiem*, odcinka równoległych *kierunkiem*, natomiast koniec Y *podstawą*.

Odcinki w $\mathfrak{A}$ wyznaczają podprzestrzenie w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Podprzestrzenie te nazywamy k*-odcinkami*. I tak dla $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$ k*-odcinkiem właściwym* nazywamy zbiór:

$$[Z,Y]_k := [Z,Y] \cap \mathcal{H}_k(V),$$

natomiast k*-odcinkiem równoległych* nazywamy zbiór:

$$[Z,Y]^*_k := [Z,Y]^* \cap \mathcal{H}_k(V).$$

[2.9] lem:oip

Lemat 2.9. *Odcinek* $[Z,Y]_k$ *oraz* $[Z,Y]^*_k$ *są podprzestrzeniami w* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$*.*

Dowód. Niech p będzie prostą w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ przecinającą odcinek $[Z,Y]_k$ w dwóch różnych punktach U_1, U_2. Wówczas $Z \subseteq U_1, U_2 \subseteq Y$.

Załóżmy, że p jest pękiem właściwym, a więc $p = \mathbf{p}(H,B)$ dla pewnych H, B. Zgodnie z 2.1 i (2.1), dla wszystkich $U \in p$ mamy

$$Z \subseteq U_1 \cap U_2 = H \subseteq U \subseteq B = U_1 \sqcup U_2 \subseteq Y,$$

a więc $p \subseteq [Z,Y]_k$.

[1] Dokładniej w kracie podprzestrzeni przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$.

Niech teraz p będzie pękiem równoległych, czyli $p = \mathbf{p}^*(U_0, B)$. Tak więc $U_0 \parallel U_1 \parallel U_2$. Zauważmy, że w tej sytuacji nie może być $Z \neq \Theta$, gdyż mielibyśmy wtedy $U_1 = U_2$, co przeczy naszemu założeniu. Zatem $Z = \Theta$. Tak więc, podobnie jak wyżej, dla wszystkich $U \in p$ mamy

$$Z = \Theta \subseteq U \subseteq B = U_1 \sqcup U_2 \subseteq Y,$$

i stąd $p \subseteq [Z, Y]_k$.

Teraz, niech p będzie prostą w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ przecinającą odcinek $[Z, Y]_k^*$ w dwóch różnych punktach U_1, U_2. Wówczas $Z \subseteq\parallel U_1, U_2 \subseteq Y$.

W przypadku pęku właściwego $p = \mathbf{p}(H, B)$, na mocy 1.1 i 2.1, dla $U \in p$ mamy

$$Z \subseteq\parallel U_1 \cap U_2 = H \subseteq U \subseteq B = U_1 \sqcup U_2 \subseteq Y,$$

więc $p \subseteq [Z, Y]_k^*$.

Gdy p jest pękiem równoległych, czyli gdy $p = \mathbf{p}^*(U_0, B)$, to $U_0 \parallel U_1 \parallel U_2$. Zauważmy, że dla wszystkich $U \in p$, z przechodniości $\parallel$, z (2.1) oraz z 2.1 mamy

$$Z \subseteq\parallel U_1 \parallel U_0 \parallel U \subseteq B = U_1 \sqcup U_2 \subseteq Y.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że $p \subseteq [Z, Y]_k^*$. □

[2.10] lem:odcinkimocne

Lemat 2.10. *Odcinki:*

(1) $[H, Y]_k$, *gdzie* $H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$,

(2) $[Z, B]_k$, *gdzie* $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$,

(3) $[U, Y]_k^*$, *gdzie* $U \in \mathcal{H}_k(V)$,

są mocnymi podprzestrzeniami w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.

Dowód. Na mocy 2.9 wystarczy wykazać, że we wszystkich trzech przypadkach, każde dwa elementy W_1, W_2 odcinka są współpękowe. Ponieważ zbiór pusty oraz jednoelementowy jest mocną podprzestrzenią, możemy przyjąć, że $W_1 \neq W_2$.

(1): Z definicji odcinka mamy $H \subseteq W_i \subseteq Y$ dla $i = 1, 2$. Stąd $H \subseteq W_1 \cap W_2$. Ponieważ $H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$ oraz $\dim W_1 = \dim W_2 = k$ i $W_1 \neq W_2$, otrzymujemy więc, że $H = W_1 \cap W_2$. Skoro $\dim(W_1 \cap W_2) = k - 1$, to z 2.2 $W_1 \sim W_2$.

(2): Analogicznie jak wyżej, z definicji odcinka otrzymujemy, że $Z \subseteq W_i \subseteq B$ dla $i = 1, 2$. Zatem $W_1 \sqcup W_2 \subseteq B$. Ale ponieważ $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$ oraz $\dim W_1 = \dim W_2 = k$ i $W_1 \neq W_2$, więc $W_1 \sqcup W_2 = B$. Skoro $\dim(W_1 \sqcup W_2) = k + 1$, to z 2.2 $U_1 \sim U_2$ lub $U_1 \parallel U_2$, co kończy rozumowanie w tym wypadku.

(3): Z określenia odcinka $[U, Y]_k^*$ mamy: $U \subseteq\parallel W_1$ oraz $U \subseteq\parallel W_2$. Ponieważ $\dim W_1 = \dim W_2 = k$ oraz $U \in \mathcal{H}_k(V)$ możemy więc zauważyć, że $W_1 \parallel W_2$, co na mocy 2.2 kończy dowód. □

[2.11] lem:mpAodc

Lemat 2.11. *Jeśli X jest mocną podprzestrzenią w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, to zachodzi jedna z trzech możliwości:*

(1) *istnieje* $H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$ *takie, że dla każdego* U *należącego do* X, $H \subseteq U$*;*

(2) *istnieje* $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$ *takie, że dla każdego* U *należącego do* X, $U \subseteq B$*;*

(3) *istnieje* $U_0 \in \mathcal{H}_k(V)$ *takie, że dla każdego* U *należącego do* X, $U_0 \subseteq\parallel U$.

Dowód. Niech X będzie mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.
Jeśli $X = \emptyset$, to dowolne $H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$ spełnia 1.
Jeśli $\mid X \mid = 1$, to $H \in \mathcal{H}_{k-1}(U)$, gdzie $\{U\} = X$, spełnia 1.
Jeśli $\mid X \mid \geqslant 2$, to X jest co najmniej prostą, ponieważ w tym wypadku mamy $W_1, W_2 \in X$, $W_1 \neq W_2$ i W_1 współpękowe z W_2. Ponieważ X jest podprzestrzenią, to $\overline{W_1, W_2} \subseteq X$. Gdy X jest prostą, czyli pękiem właściwym lub równoległych, w obu wypadkach mamy $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$ spełniające 2.
Załóżmy więc, że w X zawarta jest jakaś prosta i punkt nie leżący na niej. Stąd w X istnieją trzy punkty W_1, W_2, W_3 tworzące trójkąt $\Delta W_1W_2W_3$. Zgodnie z 2.5 $\Delta W_1W_2W_3$ mamy (bez zmniejszenia ogólności):

1. $W_1 \sim W_2 \sim W_3$,

2. $W_1 \sim W_2 \sim W_3 \parallel W_1$,

3. $W_1 \parallel W_2 \parallel W_3 \parallel W_1$.

Rozważmy sytuację 1. Z 2.7 W_1, W_2, W_3 mają wspólny poprzednik H lub wspólny następnik B.
Przyjmijmy, że istnieje poprzednik H. Niech $U \in X$. Pokażemy, że $H \subseteq U$. Gdyby $U \in \overline{W_1, W_2}$ lub $U \in \overline{W_2, W_3}$ lub $U \in \overline{W_3, W_1}$, to $H \in U$, bo $\overline{W_1, W_2} = \mathbf{p}(H, W_1 \sqcup W_2)$ itd. Załóżmy więc, że tak nie jest. Wówczas mamy trzy następujące trójkąty: ΔUW_1W_2, ΔUW_2W_3, ΔUW_3W_1. Wszystkie te trójkąty są typu 1 lub 2. Przypuśćmy, że żaden z nich nie ma wspólnego poprzednika. Zatem z 2.7 i 2.8 U, W_1, W_2 mają wspólny następnik, U, W_2, W_3 mają wspólny następnik, U, W_3, W_1 mają wspólny następnik. Niech $B = W_1 \sqcup W_2$. Zauważmy, że B jest następnikiem U. Rozważmy ΔUW_2W_3. B musi być następnikiem W_3. Pokazaliśmy, że $H \prec W_1, W_2, W_3 \prec B$, a więc W_1, W_2, W_3 leżą w jednym pęku, co przeczy założeniu, że W_1, W_2, W_3 tworzą trójkąt. Stąd wierzchołki jednego z trójkątów ΔUW_1W_2, ΔUW_2W_3, ΔUW_3W_1 mają wspólny poprzednik H. W każdym z trzech przypadków $H \subseteq U$.
Teraz zakładamy, że W_1, W_2, W_3 mają wspólny następnik B. Rozumując jak poprzednio pokażemy, że $U \subseteq B$ dla wszystkich $U \in X$. □

Z 2.10 oraz 2.11 otrzymujemy postać maksymalnych mocnych podprzestrzeni w grassmannianie afinicznym:

[2.12] thm:postacmocnych **Twierdzenie 2.12.** *X jest maksymalną mocną podprzestrzenią $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ wtw., gdy zachodzi jedna z trzech możliwości:*

(1) $X = [H, V]_k$, *gdzie* $H \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$,

(2) $X = [\emptyset, B]_k$, *gdzie* $B \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$,

(3) $X = [U, V]^*_k$, *gdzie* $U \in \mathcal{H}_k(V)$.

Podprzestrzenie postaci (1), (2), (3) w 2.12 będziemy dalej nazywać odpowiednio *gwiazdami*, *układami* oraz *gwiazdami równoległych*.

Zbadajmy teraz jak mogą przecinać się maksymalne mocne podprzestrzenie w grassmannianie afinicznym. Niech $H, H_1, H_2 \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$, $U, U_1, U_2 \in \mathcal{H}_k(V)$ oraz $B, B_1, B_2 \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$. Wówczas:

$$[H, V]_k \cap [\emptyset, B]_k = \begin{cases} [H, B]_k, & H \subseteq B, \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

$$[H, V]_k \cap [U, V]^*_k = \begin{cases} \{H * U\}, & H \subseteq\parallel U, \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

$$[\emptyset, B]_k \cap [U, V]^*_k = \begin{cases} [U, B]^*_k, & U \subseteq\parallel B, \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Dla $H_1 \neq H_2$:

$$[H_1, V]_k \cap [H_2, V]_k = \begin{cases} \{H_1 \sqcup H_2\}, & \dim H_1 \sqcup H_2 = k, \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Dla $B_1 \neq B_2$:

$$[\emptyset, B_1]_k \cap [\emptyset, B_2]_k = \begin{cases} \{B_1 \cap B_2\}, & \dim B_1 \cap B_2 = k, \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Dla $U_1 \nparallel U_2$:

$$[U_1, V]^*_k \cap [U_2, V]^*_k = \emptyset.$$

Spróbujmy teraz odpowiedzieć na następujące pytanie: na ile sposobów można rozszerzyć prostą grassmannianu afinicznego do maksymalnej mocnej podprzestrzeni?

Zauważmy, że

$$\mathbf{p}(H, B) = [H, B]_k = [\emptyset, B]_k \cap [H, V]_k.$$

Zatem pęk właściwy rozszerza się jednoznacznie do gwiazdy i układu. Dla pęku równoległych mamy natomiast:

$$\mathbf{p}^*(U, B) = [U, B]^*_k = [\emptyset, B]_k \cap [U, V]^*_k.$$

Tak więc pęk równoległych rozszerza się jednoznacznie do układu i gwiazdy równoległych.

Jeśli U, W są różnymi i współpękowymi punktami $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, to dalej przez $S(UW)$, $T(UW)$ oraz $S^*(UW)$ oznaczamy odpowiednio gwiazdę, układ oraz gwiazdę równoległych wyznaczoną przez pęk $\overline{U, W}$, o ile ma to sens.

[2.13]
thm:troAmp

Twierdzenie 2.13. *W grassmannianie afinicznym* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ *trójkąt typu 1 wyznacza gwiazdę bądź układ, trójkąt typu 2 wyznacza układ, natomiast trójkąt typu 3 wyznacza gwiazdę równoległych.*

Dowód. Niech U_1, U_2, U_3 będą wierzchołkami trójkąta.

Jeśli jest to trójkąt typu 1, to albo $H = U_1 \cap U_2 \cap U_3 \in \mathcal{H}_{k-1}(V)$ albo $B = U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3 \in \mathcal{H}_{k+1}(V)$ z 2.7. W pierwszym przypadku otrzymamy gwiazdę $[H, V]_k$, zaś w drugim układ $[\emptyset, B]_k$.

Jeśli nasz trójkąt jest typu 2, to z 2.8 leży on w układzie $[\emptyset, B]_k$, gdzie $B = U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3$.

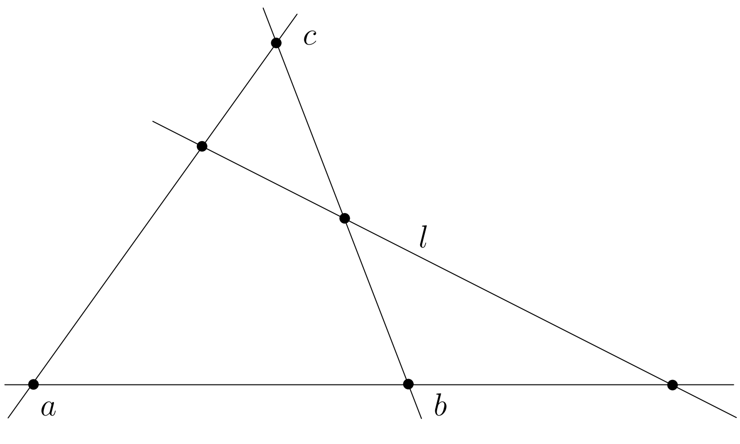
W przypadku trójkąta typu 3 zauważmy, że leży on w odcinku $[U_1, V]^*_k$. □

Analogicznie jak dla prostych grassmannianu, w przypadku trójkąta o wierzchołkach U_1, U_2, U_3 piszemy $S(U_1U_2U_3)$, $T(U_1U_2U_3)$ oraz $S^*(U_1U_2U_3)$ dla odpowiednio gwiazdy, układu oraz gwiazdy równoległych wyznaczonych przez $\Delta U_1U_2U_3$, tam gdzie ma to sens.

2.4 Warunek Veblena

Rzutowy warunek Veblena dla częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{M}$ brzmi następująco (por. rys. 2.4):

PV: jeśli prosta l przecina dwa boki trójkąta abc w dwóch różnych punktach, to przecina trzeci bok tego trójkąta.



Rysunek 2.4: Rzutowy warunek Veblena.

[2.14]
thm:grafAveb

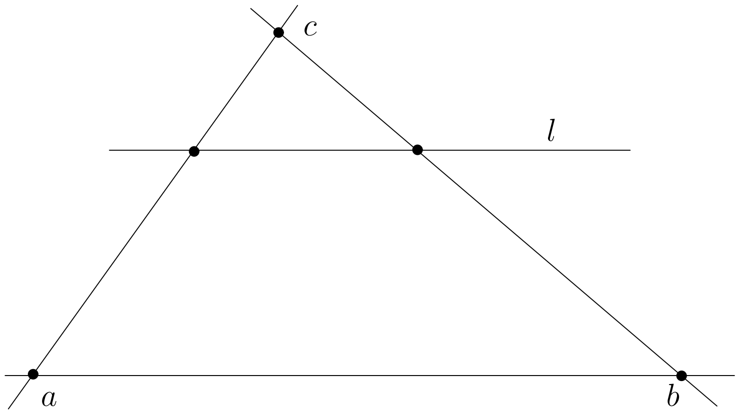
Twierdzenie 2.14. *W grassmannianie afinicznym nie zachodzi rzutowy warunek Veblena.*

Dowód. Niech U_1, U_2, U_3 tworzą trójkąt typu 2 w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Załóżmy, że $U_1 \parallel U_2$. W pęku $\overline{U_1, U_3}$ weźmy U_4 różne od U_1 i U_3. Zauważmy, że U_4 przecina U_1 i U_3, zatem nie może być $U_1 \parallel U_4$.

Teraz w pęku $\overline{U_2, U_3}$ bierzemy U_5 takie, że $U_4 \parallel U_5$. Nie znajdziemy elementu wspólnego prostych $\overline{U_1, U_2}$ i $\overline{U_4, U_5}$, ponieważ są one pękami równoległych o różnych kierunkach, co kończy dowód. □

Afiniczny warunek Veblena dla częściowej przestrzeni prostych z równoległością brzmi następująco (por. rys. 2.5):

AV: jeśli prosta l równoległa do podstawy trójkąta abc przecina jeden jego bok, to przecina też drugi bok.



Rysunek 2.5: Afiniczny warunek Veblena.

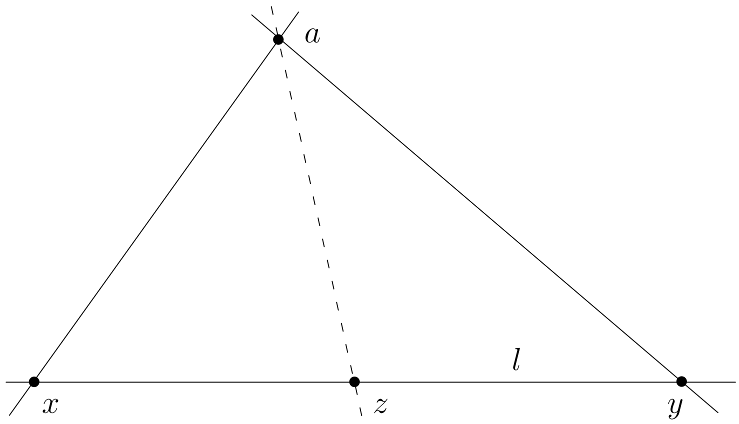
[2.15] thm:grasafAveb **Twierdzenie 2.15.** *Grassmannian afiniczny spełnia afiniczny warunek Veblena.*

Dowód. Niech U_1, U_2, U_3 tworzą trójkąt w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Z założenia do afinicznego warunku Veblena w trójkącie tym mamy przynajmniej jeden bok będący pękiem równoległych. Zatem $\Delta U_1 U_2 U_3$ musi być typu 2 lub 3. Zgodnie z 2.13 trójkąt $\Delta U_1 U_2 U_3$ rozszerza się odpowiednio do układu lub gwiazdy równoległych. Po domknięciu rzutowym przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ zarówno układ jak i gwiazda równoległych będą (z dokładnością do izomorfizmu) przestrzeniami rzutowymi, natomiast założenia afinicznego warunku Veblena staną się założeniami do rzutowego warunku Veblena. Proste równoległe przetną się w punkcie niewłaściwym. Ponieważ na prostej może być najwyżej jeden punkt niewłaściwy, więc szukany punkt przecięcia musi być punktem z $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. W ten sposób dowód jest zakończony. □

2.5 Warunek Shulta

Warunek Shulta dla częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{M}$ brzmi następująco (por. rys. 2.6):

Shult: jeśli punkt a jest połączalny z dwoma różnymi punktami prostej l, to a jest połączalny z każdym punktem prostej l.



Rysunek 2.6: Warunek Shulta.

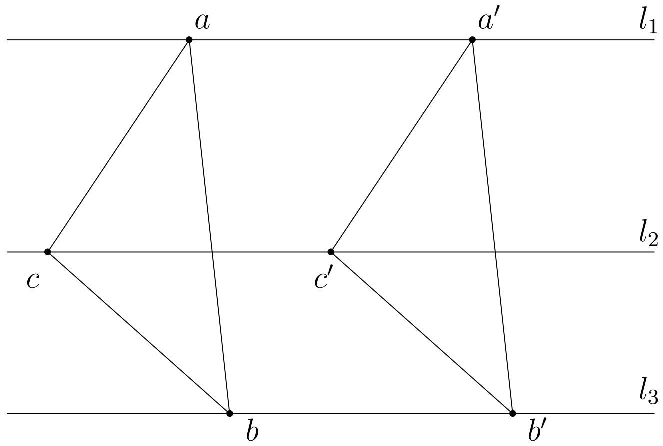
[2.16] thm:shult **Twierdzenie 2.16.** *Grassmannian afiniczny spełnia warunek Shulta.*

Dowód. Niech U_1 będzie punktem połączalnym z dwoma różnymi punktami U_2, U_3 prostej grassmannianu afinicznego. Zauważmy, że punkty U_1, U_2, U_3 tworzą trójkąt. Zatem z 2.13 U_1, U_2, U_3 leżą w mocnej podprzestrzeni $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, a więc U_1 jest połączalny z każdym punktem prostej $\overline{U_2, U_3}$. □

2.6 Warunek Desarguesa

Dla częściowej przestrzeni prostych z równoległością wyróżnia się dwa warianty afinicznego warunku Desarguesa: mały i duży. Mały afiniczny Desargues brzmi następująco:

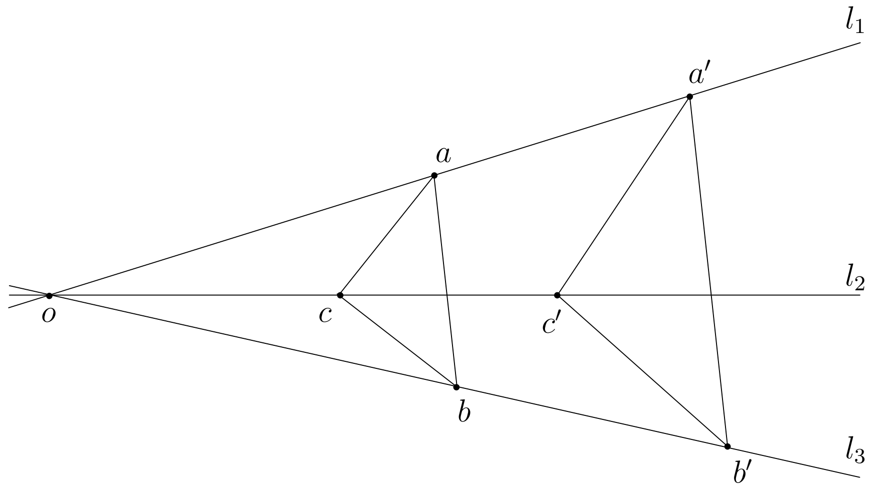
des: jeśli proste l_1, l_2, l_3 są parami równoległe i na każdej prostej leżą po dwa różne punkty $a, a' \in l_1$, $b, b' \in l_2$, $c, c' \in l_3$ takie, że $\overline{a, b} \parallel \overline{a', b'}$, $\overline{b, c} \parallel \overline{b', c'}$, to $\overline{a, c} \parallel \overline{a', c'}$.



Rysunek 2.7: Afiniczny mały Desargues.

Duży afiniczny aksjomat Desarguesa sformułowany jest następująco:

Des: jeśli proste (parami różne) l_1, l_2, l_3 zbiegają się w punkcie q i na każdej prostej leżą po dwa różne punkty $a, a' \in l_1$, $b, b' \in l_2$, $c, c' \in l_3$ takie, że $q \neq a, b, c, a', b', c'$ oraz $\overline{a, b} \parallel \overline{a', b'}$, $\overline{b, c} \parallel \overline{b', c'}$, to $\overline{a, c} \parallel \overline{a', c'}$.



Rysunek 2.8: Afiniczny duży Desargues.

[2.17] thm:DesIdes

Twierdzenie 2.17. *Grassmannian afiniczny spełnia oba warianty afinicznego warunku Desarguesa.*

Dowód. des: Z założeń małego Desarguesa wiemy, że $\overline{a, b} \parallel \overline{a', b'}, \overline{b, c} \parallel \overline{b', c'}$. Zatem trójkąt abc oraz trójkąt $a'b'c'$ jest typu 3. Możemy stąd oraz z 2.13 wywnioskować, że Δabc leży w gwieździe równoległych $S^*(abc)$. Z założeń wiemy także, że $\overline{a, a'}$ jest pękiem równoległych, więc gwiazda $S^*(aa') = S^*(abc)$. Stąd $\overline{a, a'} \subseteq S^*(abc)$. Rozumując analogicznie dla $\overline{b, b'}$, $\overline{c, c'}$ dostaniemy $\overline{b, b'} \subseteq S^*(abc)$ oraz $\overline{c, c'} \subseteq S^*(abc)$. Po domknięciu rzutowym $\mathfrak{A}$, gwiazda $S^*(abc)$ staje się (z dokładnością do izomorfizmu) przestrzenią rzutową, w której spełnione będą założenia twierdzenia Desarguesa. Oznacza to, że w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ mały Desargues jest spełniony.

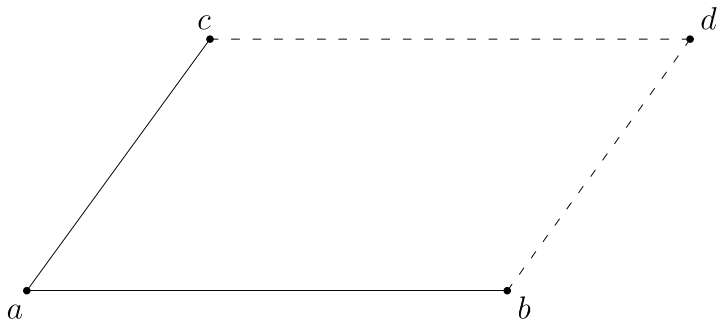
Des: Z założeń dużego Desarguesa wiemy, że $\overline{a, b} \parallel \overline{a', b'}, \overline{b, c} \parallel \overline{b', c'}$. Zatem $\overline{a, b}, \overline{a', b'}, \overline{b, c}, \overline{b', c'} \in \mathcal{P}_k^*$. Wynika stąd, że trójkąty abc i $a'b'c'$ są typu 3. Tak więc $\overline{a, c}, \overline{a', c'} \in \mathcal{P}_k^*$. Ponadto z 2.13 Δabc leży w gwieździe równoległych. Zauważmy, że Δoab wyznacza albo układ albo gwiazdę równoległych, ponieważ jest trójkątem typu 2 lub 3.

Przypuśćmy, że Δoab jest trójkątem typu 2. Rozpatrzmy teraz Δobc. Jest on także trójkątem typu 2 lub 3. Jeśli jest typu 3, to na mocy 2.13 leży w gwieździe równoległych. Ponieważ przecina się ona z gwiazdą równoległych $S^*(abc)$ w prostej $\overline{b, c}$, to $S^*(abc) = S^*(obc)$. Ale wówczas $o, a, b \in S^*(abc)$ i otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że Δoab jest typu 2. Zatem Δobc jest typu 2. Stąd $T(obc) = T(oab)$, gdyż oba układy mogą mieć najwyżej jeden punkt wspólny. Otrzymujemy więc, że $a, b, c \in T(oab)$, ale $S^*(abc) \cap T(oab)$ może być najwyżej prostą. Zatem nasze przypuszczenie, że Δoab jest trójkątem typu 2 było fałszywe. Stąd $a, b, c, a', b', c', o \in S^*(abc)$. Po domknięciu rzutowym $\mathfrak{A}$, gwiazda $S^*(abc)$ stanie się (z dokładnością do izomorfizmu) przestrzenią rzutową, w której spełnione będą założenia twierdzenia Desarguesa. Tak wykazaliśmy, że w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ duży Desargues zachodzi. □

2.7 Uzupełnienie do równoległoboku

Warunek uzupełnienia do równoległoboku dla częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{M}$ z częściową równoległością brzmi następująco (por. rys. 2.9):

PCC: jeśli a, b, c są takimi punktami, że a jest współliniowy z b, a jest współliniowy z c oraz $\overline{a, b} \parallel \overline{a, b}$ i $\overline{a, c} \parallel \overline{a, c}$, to istnieje taki punkt d, że d jest współliniowy z b, d jest współliniowy z c oraz $\overline{c, d} \parallel \overline{a, b}$ i $\overline{b, d} \parallel \overline{a, c}$.



Rysunek 2.9: Uzupełnienie do równoległoboku.

[2.18] thm:gapcc **Twierdzenie 2.18.** *Grassmannian afiniczny spełnia warunek* PCC *o uzupełnieniu do równoległoboku.*

Dowód. Niech U, U_1, U_2 będą punktami grassmannianu $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ spełniającymi założenia PCC. Mamy zatem dwa pęki równoległych:

$$\overline{U, U_1} = \mathbf{p}^*(U, B_1),$$
$$\overline{U, U_2} = \mathbf{p}^*(U, B_2).$$

Zauważmy, że U jest wspólnym kierunkiem obu pęków, zatem $U \parallel U_1 \parallel U_2$ oraz $S^*(UU_1) = S^*(UU_2)$. Weźmy

$$B_1' := U_2 * B_1 \qquad \text{oraz} \qquad B_2' := U_1 * B_2.$$

Ponieważ $U = B_1 \cap B_2$, to mamy W takie, że $W = B_1' \cap B_2'$ i $W \parallel U$ (por. 1.1). Punkt W jest poszukiwanym uzupełnieniem U, U_1, U_2 do równoległoboku, gdyż

$$\overline{U_2, W} = \mathbf{p}^*(U, B_1') \parallel \mathbf{p}^*(U, B_1) = \overline{U, U_1},$$
$$\overline{U_1, W} = \mathbf{p}^*(U, B_2') \parallel \mathbf{p}^*(U, B_2) = \overline{U, U_2}.$$

□

Rozdział 3

Produkt Segre

Niech $\mathfrak{M}_i = \langle S_i, \mathcal{L}_i \rangle$, $i = 1, 2$, będą częściowymi przestrzeniami prostych. Oznaczmy przez

$$S := S_1 \times S_2, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{L}_1' := \Big\{ l_1 \times \{x_2\} \colon l_1 \in \mathcal{L}_1,\ x_2 \in S_2 \Big\}, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{L}_2' := \Big\{ \{x_1\} \times l_2 \colon x_1 \in S_1,\ l_2 \in \mathcal{L}_2 \Big\}. \tag{3.3}$$

Geometrię

$$\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2 = \Big\langle S, \mathcal{L}_1' \cup \mathcal{L}_2' \Big\rangle$$

nazywamy *produktem Segre* przestrzeni $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$.

Produkt Segre częściowych przestrzeni prostych jest częściową przestrzenią prostych. Produkt Segre nigdy nie jest przestrzenią prostych.

[3.1] thm:podpSegre

Twierdzenie 3.1. *Niech $X = X_1 \times X_2 \subseteq S_1 \times S_2$. Zbiór X jest podprzestrzenią w $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2$ wtw, gdy X_1, X_2 są podprzestrzeniami odpowiednio $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$.*

Dowód. $\Rightarrow$: Niech X będzie podprzestrzenią produktu Segre i $X_1 \neq \emptyset \neq X_2$. Musimy sprawdzić, czy X_1, X_2 są podprzestrzeniami odpowiednio $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$. Weźmy prostą $l_1 \in \mathcal{L}_1$. Załóżmy, że $\Big|l_1 \cap X_1\Big| \geqslant 2$. Wówczas istnieją $a_1, b_1 \in l_1, X_1$ takie, że $a_1 \neq b_1$. Pytanie, czy $l_1 \subseteq X_1$?
Weźmy teraz $x_2 \in X_2$ i niech $a = (a_1, x_2)$ oraz $b = (b_1, x_2)$. Zauważmy, że $a, b \in X$. Rozpatrzmy prostą $k = l_1 \times \{x_2\} \in \mathcal{L}_1'$. Ponieważ $a_1, b_1 \in l_1$, więc $a, b \in k$. Ale $a, b \in X$, stąd dostajemy, że $\Big|k \cap X\Big| \geqslant 2$. Mamy więc, że $k \subseteq X$, a zatem $l_1 \subseteq X_1$. Otrzymaliśmy, że X_1 jest podprzestrzenią $\mathfrak{M}_1$. Podobnie wykazuje się, że X_2 jest podprzestrzenią $\mathfrak{M}_2$.

$\Leftarrow$: Niech k będzie prostą z produktu Segre taką, że $\Big|k \cap X\Big| \geqslant 2$ i X_i będą podprzestrzeniami na i-tej współrzędnej. Zatem istnieją $a, b \in k, X$ takie, że $a \neq b$. Albo $k = \{x_1\} \times l_2$ albo $k = l_1 \times \{x_2\}$, gdzie $x_i \in S_i$ oraz $l_i \in \mathcal{L}_i$. Rozpatrzmy pierwszą sytuację. Wówczas $a = (x_1, a_2)$ i $b = (x_1, b_2)$, gdzie $a_2, b_2 \in l_2$ oraz $a_2 \neq b_2$. Zauważmy, że $x_1 \in X_1$ oraz $a_2, b_2 \in X_2$. Ponieważ X_2 jest podprzestrzenią w $\mathfrak{M}_2$, więc $l_2 \subseteq X_2$. Teraz weźmy dowolne $c \in k$. Wtedy $c = (x_1, c_2)$, gdzie $c_2 \in l_2$. Zatem $c_2 \in X_2$, a więc $c = (x_1, c_2) \in X$. Ostatecznie otrzymujemy, że $k \subseteq X$. W przypadku prostej drugiego rodzaju rozumowanie przebiega analogicznie. $\square$

Jeśli $\mathfrak{M}_i = \langle S_i, \mathcal{L}_i, \|_i \rangle$, $i = 1, 2$ są częściowymi przestrzeniami prostych z częściową równoległością, to w produkcie Segre $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2$ możemy wprowadzić relację częściowej równoległości. Niech $l, m \in \mathcal{L}'_1 \cup \mathcal{L}'_2$. Mówimy, że proste l, m są równoległe i piszemy

$$l \parallel m \quad \text{wtw., gdy}$$

$$l = l_1 \times \{x_2\}, m = m_1 \times \{y_2\} \in \mathcal{L}'_1 \quad \text{i} \quad l_1 \parallel_1 m_1 \quad \text{lub}$$
$$l = \{x_1\} \times l_2, m = \{y_1\} \times m_2 \in \mathcal{L}'_2 \quad \text{i} \quad l_2 \parallel_2 m_2.$$

Tak wprowadzona relacja jest relacją równoważności. Ponadto zauważmy, że jeśli proste l i m z produktu są równoległe i przecinają się niepusto, to muszą być równe. Zatem rzeczywiście relacja $\parallel$ na prostych w produkcie jest częściową równoległością.

Rozważmy dwa grassmanniany afiniczne $\mathbf{P}_{k_1}(\mathfrak{A}), \mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$ nad ustaloną wcześniej analityczną przestrzenią afiniczną $\mathfrak{A}$, gdzie

$$0 < k_1 < k_2.$$

Dalej zajmujemy się produktem Segre tychże przestrzeni Grassmanna tzn.

$$\mathcal{M} = \mathbf{P}_{k_1}(\mathfrak{A}) \otimes \mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A}).$$

Zgodnie z określeniem zbioru prostych w grassmannianie afinicznym i w produkcie Segre (3.2), (3.3), w $\mathcal{M}$ mamy cztery klasy prostych. Mówi o tym następujące twierdzenie.

[3.2] thm:prosteM

Twierdzenie 3.2. *Każda prosta przestrzeni $\mathcal{M}$ jest elementem jednego z czterech poniższych zbiorów:*

$$\mathcal{L}_1(\mathcal{M}) = \Big\{\mathbf{p}(H, B) \times \{W\} \colon \\ H \in \mathcal{H}_{k_1-1}(V), B \in \mathcal{H}_{k_1+1}(V), W \in \mathcal{H}_{k_2}(V), H \subseteq B\Big\},$$

$$\mathcal{L}^*_1(\mathcal{M}) = \Big\{\mathbf{p}^*(U, B) \times \{W\} \colon \\ U \in \mathcal{H}_{k_1}(V), B \in \mathcal{H}_{k_1+1}(V), W \in \mathcal{H}_{k_2}(V), U \subseteq\parallel B\Big\},$$

$$\mathcal{L}_2(\mathcal{M}) = \Big\{\{W\} \times \mathbf{p}(H, B) \colon \\ W \in \mathcal{H}_{k_1}(V), H \in \mathcal{H}_{k_2-1}(V), B \in \mathcal{H}_{k_2+1}(V), H \subseteq B\Big\},$$

$$\mathcal{L}^*_2(\mathcal{M}) = \Big\{\{W\} \times \mathbf{p}^*(U, B) \colon \\ W \in \mathcal{H}_{k_1}(V), U \in \mathcal{H}_{k_2}(V), B \in \mathcal{H}_{k_2+1}(V), U \subseteq\parallel B\Big\}.$$

Dalej stosujemy oznaczenie $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}_1(\mathcal{M}) \cup \mathcal{L}^*_1(\mathcal{M}) \cup \mathcal{L}_2(\mathcal{M}) \cup \mathcal{L}^*_2(\mathcal{M})$.

3.1 Spójność

[3.3] thm:spójnośćM **Twierdzenie 3.3.** *Przestrzeń $\mathcal{M}$ jest spójna.*

Dowód. Niech $(U_1, W_1), (U_2, W_2)$ będą punktami $\mathcal{M}$. Weźmy w $\mathcal{M}$ punkt (U_1, W_2). Wówczas, na mocy 2.4, w $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$ istnieje łamana pomiędzy W_1 a W_2, tzn. $Q_0 = W_1$, $Q_r = W_2$ i Q_{i-1} jest współpękowe z Q_i w $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$ dla $i = 1, \dots, r$. Zatem (U_1, Q_i) dla $i = 0, \dots, r$ tworzy łamaną w $\mathcal{M}$ łączącą punkt (U_1, W_1) z (U_1, W_2). Analogicznie, w $\mathcal{M}$ istnieje łamana (P_i, W_2) dla $i = 0, \dots, t$ łącząca punkty (U_1, W_2) i (U_2, W_2). Ponieważ $(U_1, Q_r) = (P_0, W_2)$ dowód jest zakończony. □

3.2 Trójkąty

Aby wyznaczyć postać mocnych podprzestrzeni w $\mathcal{M}$ potrzebujemy postać trójkątów w $\mathcal{M}$.

[3.4] lem:otrójkącie **Lemat 3.4.** *Jeżeli punkty (U_i, W_i) dla $i = 1, 2, 3$, są wierzchołkami trójkąta w przestrzeni $\mathcal{M}$, to albo $U_1 = U_2 = U_3$ albo $W_1 = W_2 = W_3$.*

Dowód. Niech $A = (U_1, W_1)$, $B = (U_2, W_2)$, $C = (U_3, W_3)$ będą wierzchołkami trójkąta w $\mathcal{M}$. Ponieważ punkty A i B są współliniowe to zgodnie z 3.2 albo $U_1 = U_2$, albo $W_1 = W_2$.

Przyjmijmy, że $U_1 = U_2$. Z 3.2 dla punktów A i C mamy albo

(I) $U_1 = U_3$ i W_1 współpękowy z W_3, albo

(II) U_1 współpękowy z U_3 i $W_1 = W_3$.

Przypuśćmy, że zachodzi przypadek (II). Wówczas $U_1 \neq U_3$, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy $A = (U_1, W_1) = (U_3, W_3) = C$, co przeczy założeniu, że A, B, C tworzą trójkąt. Zauważmy, że w tym wypadku $C = (U_3, W_1)$. Ponieważ $B = (U_1, W_2)$ i jest współliniowy z C, to z 3.2 musi być $W_1 = W_2$. To oznacza, że $B = (U_1, W_1) = A$, co prowadzi do sprzeczności z założeniem, że A, B, C to trójkąt.
Tak więc przypadek (II) nie jest możliwy. Zatem zachodzi (I). Stąd $U_1 = U_2 = U_3$.

Gdyby założyć na początku, że $W_1 = W_2$, to rozumując w analogiczny sposób dostaniemy $W_1 = W_2 = W_3$. □

3.3 Mocne podprzestrzenie

[3.5] thm:postmp **Twierdzenie 3.5.** *X jest mocną podprzestrzenią w $\mathcal{M}$ wtw., gdy:*

1. *albo $X = \{W\} \times X_2$, gdzie W jest punktem $\mathbf{P}_{k_1}(\mathfrak{A})$ i X_2 jest mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$,*

2. *albo* $X = X_1 \times \{W\}$, *gdzie* X_1 *mocną podprzestrzenią w* $\mathbf{P}_{k_1}(\mathfrak{A})$ *a* W *jest punktem* $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$.

DOWÓD. $\Rightarrow$: Zakładamy, że X jest mocną podprzestrzenią w $\mathcal{M}$. Weźmy dwa różne punkty $A = (U_1, W_1)$, $B = (U_2, W_2)$ z X. Ponieważ X jest mocną podprzestrzenią, to punkty A, B są współliniowe w $\mathcal{M}$. Zatem z 3.2 mamy dwie możliwości:

1° W_1 jest współpękowy z W_2 w $\mathbf{P}_{k_1}(\mathfrak{A})$ i $U_1 = U_2$, albo

2° $W_1 = W_2$ i U_1 jest współpękowy z U_2 w $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$.

Załóżmy, że zachodzi pierwsza z nich, tzn. $U_1 = U_2 =: U$. Weźmy dowolny punkt $C = (U_3, W_3)$ z X. Zgodnie z założeniem X jest mocną podprzestrzenią, więc C jest współliniowy z A i z B w $\mathcal{M}$. Jeśli $C \in \overline{A, B}$, to z 3.2 otrzymamy, że $U_3 = U$. Jeśli natomiast $C \notin \overline{A, B}$, to A, B, C tworzą trójkąt. Z 3.4 również dostajemy, że $U_3 = U$. Z dowolności wyboru C wiemy, że $X = \{U\} \times X_2$.

W przypadku, gdy $W_1 = W_2$, analogicznie jak wyżej, pokażemy, że $X = X_1 \times \{W\}$, gdzie $W = W_1 = W_2$.

$\Leftarrow$: Rozważmy przypadek $X = \{U\} \times X_2$, gdzie X_2 jest mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$. Z 3.1 X jest podprzestrzenią w $\mathcal{M}$. Niech $A = (U, W_1)$, $B = (U, W_2)$ będą dowolnymi punktami z X. Z założenia o X_2 wiemy, że W_1 jest współpękowy z W_2 w $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$; przez l oznaczmy odpowiednią prostą przez W_1 i W_2. Zauważmy, że $\{U\} \times l$ jest prostą w $\mathcal{M}$ łączącą punty A i B. Pokazaliśmy, że X jest mocną podprzestrzenią w $\mathcal{M}$.

Gdy $X = X_1 \times \{U\}$, to rozumowanie przebiega jak wyżej. □

To twierdznie zostało udowodnione w bardziej ogólnej sytuacji, dla dowolnych produktów Segre, w pracy [2].

Rozdział 4

Podprodukt Segre

Geometrią badaną w pracy jest struktura

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}\Big|\subseteq\| := \Big\langle \subseteq\|, \mathcal{G} \Big\rangle,$$

gdzie $\mathcal{G} = \Big\{ l \cap \subseteq\| : l \in \mathcal{L}(\mathcal{M}), \Big| l \cap \subseteq\| \Big| \geqslant 2 \Big\}$. Punktami $\mathcal{N}$ są pary (U, W) gdzie U jest punktem z grassmannianu $\mathbf{P}_{k_1}(\mathfrak{A})$, a W punktem $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$ takimi, że $U \subseteq\| W$.

[4.1] lem:oprostych

Lemat 4.1. *Jeśli* $l \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ *i* $\Big| l \cap \subseteq\| \Big| \geqslant 2$*, to* $l \subseteq (\subseteq\|)$*. Innymi słowy, zbiór* $\subseteq\|$ *jest podprzestrzenią* $\mathcal{M}$*.*

Dowód. Niech $l \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$. Załóżmy, że $\Big| l \cap \subseteq\| \Big| \geqslant 2$, a więc istnieją

$$W_1, W_2 \in \subseteq\|, l.$$

Ponieważ $W_1, W_2 \in (\subseteq\|)$, więc W_i jest postaci (X_i, Y_i), gdzie X_i jest punktem z grassmannianu $\mathbf{P}_{k_1}(\mathfrak{A})$, a Y_i punktem $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$ takim, że $X_i \subseteq\| Y_i$ dla $i = 1, 2$. Jeśli $X_i = x_i + S_i$ a $Y_i = y_i + T_i$, to z określenia relacji $\subseteq\|$ otrzymujemy, że $S_i \subseteq T_i$ dla $i = 1, 2$. Ponieważ $W_1 \neq W_2$, więc $X_1 \neq X_2$ lub $Y_1 \neq Y_2$.

1° Niech $l \in \mathcal{L}_1(\mathcal{M})$, wówczas otrzymujemy, że $Y_1 = Y_2 = Y$, zaś X_1, X_2 leżą w pęku właściwym $\mathbf{p}(H, B)$, gdzie $H = X_1 \cap X_2$, $B = X_1 \sqcup X_2$, i możemy zapisać $l = \mathbf{p}(H, B) \times \{Y\}$. Ponieważ $X_1 \subseteq\| Y$ i $X_2 \subseteq\| Y$, to każdy element należący do pęku $\mathbf{p}(H, B)$ będzie równoległy do Y, a więc $l \in (\subseteq\|)$.

2° Niech $l \in \mathcal{L}_1^*(\mathcal{M})$, wówczas otrzymujemy, że $Y_1 = Y_2 = Y$, zaś X_1, X_2 należą do pęku równoległych $\mathbf{p}^*(U, B)$, gdzie U możemy przyjąć, że jest równe X_1 lub X_2, to nie ma znaczenia ponieważ z definicji pęku równoległych i relacji $\subseteq\|$, mamy że $X_1 \subseteq\| X_2$ jeśli $X_1, X_2 \in \mathbf{p}^*(U, B)$, zaś $B = X_1 \sqcup X_2$. Możemy zapisać, że $l = \mathbf{p}^*(U, B) \times \{Y\}$. Weźmy dowolny punkt $p \in l$. Jest on postaci $p = (X, Y)$. Z faktu, że $X \in \mathbf{p}^*(U, B)$ otrzymujemy $X \subseteq\| X_1, X_2$. Ponieważ $X_1, X_2 \subseteq\| Y$, to z faktu, że $\subseteq\|$ jest relacją przechodnią, otrzymujemy, że $X \subseteq\| Y$, a tym samym, że $l \in (\subseteq\|)$, co wynika z dowolności wyboru punktu p.

3° Niech $l \in \mathcal{L}_2(\mathcal{M})$, wówczas otrzymujemy, że $X_1 = X_2 = X$, zaś Y_1, Y_2 należą do pęku $\mathbf{p}(H, B)$, gdzie $H = Y_1 \cap Y_2$, zaś $B = Y_1 \sqcup Y_2$. Możemy zapisać

$l = \{X\} \times \mathbf{p}(H, B)$. Ponieważ $X \subseteq\parallel Y_1$ i $X \subseteq\parallel Y_2$, więc X będzie równoległy do H, a więc i do każdego elementu pęku $\mathbf{p}(H, B)$. Zatem $l \in (\subseteq\parallel)$.

4° Niech $l \in \mathcal{L}_2^*(\mathcal{M})$, wówczas otrzymujemy, że $X_1 = X_2 = X = x + S$, zaś Y_1, Y_2 należą do pęku równoległych $\mathbf{p}^*(U, B)$, czyli $Y_1 \subseteq\parallel Y_2$ i $\dim(Y_1) = \dim(Y_2) = k_2$, więc mamy, że $Y_2 \subseteq\parallel Y_1$, a stąd $T_1 \subseteq T_2$ i $T_1 \supseteq T_2$, a tym samym, że $T_1 = T_2 = T$. Skąd otrzymujemy, że $Y_i = y_i + T$ dla $i = 1, 2$. Możemy zapisać, że $l = \{X\} \times \mathbf{p}^*(U, B)$. Jeśli weźmiemy dowolny punkt $p \in l$, będzie on postaci $p = (X, Y)$. Z faktu, że $Y \in \mathbf{p}^*(U, B)$, mamy $Y = y + T$. Wiemy, że $S \subset T$, wiec otrzymujemy, że $X \subseteq\parallel Y$, a tym samym $l \in (\subseteq\parallel)$, co wynika z dowolności wyboru punktu p.

□

[4.2]
cor:oG

Wniosek 4.2. $\mathcal{G} = \Big\{ l \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) \colon \Big| l \cap \subseteq\parallel \Big| \geqslant 2 \Big\}$.

Innym, ważnym wnioskiem jaki można wyciągnąć z 4.1 jest

Wniosek 4.3. *$\mathcal{N}$ jest częściową przestrzenią prostych.*

Zbadamy teraz postać prostych przestrzeni $\mathcal{N}$.

[4.4]
thm:prosteN

Twierdzenie 4.4. *Każda prosta przestrzeni $\mathcal{N}$ jest elementem jednego z czterech poniższych zbiorów:*

$$\mathcal{L}_1(\mathcal{N}) = \Big\{ \mathbf{p}(H, B) \times \{W\} \colon \\ H \in \mathcal{H}_{k_1-1}(V), B \in \mathcal{H}_{k_1+1}(V), W \in \mathcal{H}_{k_2}(V), H \subseteq B \subseteq\parallel W \Big\},$$

$$\mathcal{L}_1^*(\mathcal{N}) = \Big\{ \mathbf{p}^*(U, B) \times \{W\} \colon \\ U \in \mathcal{H}_{k_1}(V), B \in \mathcal{H}_{k_1+1}(V), W \in \mathcal{H}_{k_2}(V), U \subseteq\parallel B, U \subseteq\parallel W \Big\},$$

$$\mathcal{L}_2(\mathcal{N}) = \Big\{ \{W\} \times \mathbf{p}(H, B) \colon \\ W \in \mathcal{H}_{k_1}(V), H \in \mathcal{H}_{k_2-1}(V), B \in \mathcal{H}_{k_2+1}(V), H \subseteq B, W \subseteq\parallel H \Big\},$$

$$\mathcal{L}_2^*(\mathcal{N}) = \Big\{ \{W\} \times \mathbf{p}^*(U, B) \colon \\ W \in \mathcal{H}_{k_1}(V), U \in \mathcal{H}_{k_2}(V), B \in \mathcal{H}_{k_2+1}(V), U \subseteq\parallel B, W \subseteq\parallel U \Big\}.$$

Dowód. Niech l będzie prostą z $\mathcal{N}$, tzn. $l \in \mathcal{G}$. Z 4.2 wiemy, że l jest prostą w przestrzeni $\mathcal{M}$. Tak więc l jest elementem jednego z czterech zbiorów: $\mathcal{L}_1(\mathcal{M}), \mathcal{L}_1^*(\mathcal{M}), \mathcal{L}_2(\mathcal{M})$ lub $\mathcal{L}_2^*(\mathcal{M})$. Rozważmy przypadek pierwszy, gdy $l \in \mathcal{L}_1(\mathcal{M})$. Wówczas $l = \mathbf{p}(H, B) \times \{W\}$, gdzie $H \in \mathcal{H}_{k_1-1}(V)$, $B \in \mathcal{H}_{k_1+1}(V)$, $W \in \mathcal{H}_{k_2}(V)$ i $H \subseteq B$. Ponieważ $l \subseteq (\subseteq\parallel)$, to dla każdego $U \in \mathbf{p}(H, B)$ mamy $U \subseteq\parallel W$. Czyli dla każdego U takiego, że $H \subset U \subset B$ mamy $U \subseteq\parallel W$. Zatem $B \subseteq\parallel W$.

Teraz załóżmy, że $l \in \mathcal{L}_1^*(\mathcal{M})$. Wówczas $l = \mathbf{p}^*(U,B) \times \{W\}$, gdzie $U \in \mathcal{H}_{k_1}(V), B \in \mathcal{H}_{k_1+1}(V), W \in \mathcal{H}_{k_2}(V)$ i $U \subseteq\parallel B$. Ponieważ $l \subseteq (\subseteq\parallel)$, to dla każdego $A \in \mathbf{p}^*(U,B)$ mamy $U \subseteq\parallel A$. Czyli dla każdego A takiego, że $U \subseteq\parallel A \subset B$ mamy $A \subseteq\parallel W$. Zatem $U \subseteq\parallel W$.

W kolejnym przypadku $l \in \mathcal{L}_2(\mathcal{M})$. Wtedy $l = \{W\} \times \mathbf{p}(H,B)$, gdzie $W \in \mathcal{H}_{k_1}(V), H \in \mathcal{H}_{k_2-1}(V), B \in \mathcal{H}_{k_2+1}(V)$ oraz $H \subseteq B$. Ponieważ $l \subseteq (\subseteq\parallel)$, więc dla każdego $U \in \mathbf{p}(H,B)$ mamy $W \subseteq\parallel U$. Tak więc dla każdego U takiego, że $H \subset U \subset B$ mamy $W \subseteq\parallel U$. Zatem $W \subseteq\parallel H$.

Na koniec rozpatrzmy $l \in \mathcal{L}_2^*(\mathcal{M})$. Wówczas $l = \{W\} \times \mathbf{p}^*(U,B)$, gdzie $W \in \mathcal{H}_{k_1}(V), U \in \mathcal{H}_{k_2}(V), B \in \mathcal{H}_{k_2+1}(V)$ i $U \parallel B$. Wiemy, że skoro $l \subseteq (\subseteq\parallel)$, to dla każdego $A \in \mathbf{p}^*(U,B)$ otrzymujemy $W \subseteq\parallel A$. Zauważmy, że dla każdego takiego A mamy $A \subseteq\parallel U$, bo $\dim(A) = \dim(U)$.

Tak więc ostatecznie otrzymujemy, że zachodzi $W \subseteq\parallel U$. □

4.1 Spojność

[4.5] thm:spójnaN

Twierdzenie 4.5. *Przestrzeń $\mathcal{N}$ jest spójna.*

Dowód. Niech $(U_1, W_1), (U_2, W_2)$ będą punktami z $\mathcal{N}$. Przyjmijmy, że $U_i = a_i + S_i$, $W_i = b_i + T_i$ dla pewnych $a_i, b_i \in V$, $S_i \in \mathrm{Sub}_{k_1}(V)$ i $T_i \in \mathrm{Sub}_{k_2}(V)$, gdzie $i = 1, 2$. Stąd, że $U_1 \parallel S_1$, możemy wywnioskować, iż punkty (U_1, W_1) i (S_1, W_1) są ze sobą współliniowe w $\mathcal{N}$. Analogicznie, skoro $W_1 \parallel T_1$, zatem punkt (S_1, W_1) jest współliniowy z (S_1, T_1). Ponieważ $S_i \in \mathrm{Sub}_{k_1}(V)$ oraz $T_i \in \mathrm{Sub}_{k_2}(V)$, więc dalej poruszamy się w $\mathbf{P}_{k_1}(V)$ i $\mathbf{P}_{k_2}(V)$ dobierając odpowiednio pary punktów.

Weźmy z $\mathbf{P}_{k_2}(V)$ ciąg punktów $Q_0, \ldots, Q_r$ takich, że $Q_0 = T_1, Q_r = T_2$ i $Q_{i-1} \sim Q_i$ dla $i = 1, \ldots, r$. Zatem $\dim(Q_{i-1} \cap Q_i) = k_2 - 1$, co oznacza, że $Q_{i-1} \cap Q_i$ jest kowymiaru 1 w Q_{i-1} i w Q_i dla $i = 1, \ldots, r$.
Niech $P_0 := S_1$. Stąd, że $U_1 \subseteq\parallel W_1$ mamy

$$P_0 = S_1 \subseteq T_1 = Q_0,$$

więc albo

(a) $P_0 \subseteq (Q_0 \cap Q_1)$ albo (b) $P_0 \cap (Q_0 \cap Q_1)$ jest kowymiaru 1 w P_0.

Jeśli zachodzi przypadek (a), to (P_0, Q_1) jest punktem $\mathcal{N}$ i (P_0, Q_0) jest współliniowy w $\mathcal{N}$ z (P_0, Q_1). W tym wypadku weźmy

$$P_1 := P_0.$$

Jeśli natomiast zachodzi (b), to weźmy

$$P_1 := \Big(P_0 \cap (Q_0 \cap Q_1)\Big) + \langle a \rangle, \text{ gdzie } a \in (Q_0 \cap Q_1) \setminus P_0.$$

Zauważmy, że $P_1 \in \mathrm{Sub}_{k_1}(V)$, $P_1 \subseteq Q_0$ i $P_0 \sim P_1$. Tak więc (P_1, Q_0) jest punktem $\mathcal{N}$ współliniowym z (P_0, Q_0) w $\mathcal{N}$. Mamy także $P_1 \subseteq Q_1$, więc (P_1, Q_1)

jest punktem $\mathcal{N}$ współliniowym z (P_1, Q_1) w $\mathcal{N}$.
Stąd, że $P_1 \subseteq Q_1$ mamy również, że albo $P_1 \subseteq (Q_1 \cap Q_2)$, albo $P_1 \cap (Q_1 \cap Q_2)$ jest kowymiaru 1 w P_1. Dalej rozumowanie przebiega jak wyżej. Utworzoną w ten sposób łamaną dojdziemy do punktu (P_r, Q_r), gdzie $Q_r = T_2$. Z konstrukcji P_r oraz z założenia, że $U_2 \subseteq\parallel W_2$ mamy $P_r, S_2 \subseteq T_2$. Na mocy 2.3 grassmannian $\mathbf{P}_{k_1}(T_2)$ jest spójny, więc mamy w nim łamaną łączącą punkt P_r z punktem S_2. Tak dochodzimy od punktu (P_r, T_2) do punktu (S_2, T_2) łamaną o wierzchołkach (P_i, T_2) w $\mathcal{N}$, gdzie $i = r, \ldots, r+m$, $P_{r+m} = S_2$ dla pewnego naturalnego m. Następnie, stąd, że $S_2 \parallel U_2$ otrzymujemy, iż (S_2, T_2) jest współliniowy z punktem (U_2, T_2) w $\mathcal{N}$. Analogicznie, skoro $T_2 \parallel W_2$, to współliniowe są punkty (U_2, T_2) i (U_2, W_2), co kończy dowód. □

4.2 Trójkąty

Kolejny fakt daje bardziej precyzyjny opis trójkątów w $\mathcal{N}$.

[4.6]
prop:trójkąt

Stwierdzenie 4.6. *Jeśli punkty (U_i, W_i) dla $i = 1, 2, 3$ są wierzchołkami trójkąta w przestrzeni $\mathcal{N}$, to zachodzi jedna z sześciu możliwości:*

(1) $U_1 = U_2 = U_3$ *i* $W_1 \sim W_2 \sim W_3 \sim W_1$,

(2) $U_1 = U_2 = U_3$ *i* $W_i \sim W_j \sim W_k \parallel W_i$, *gdzie* $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, $\neq (i, j, k)$,

(3) $U_1 = U_2 = U_3$ *i* $W_1 \parallel W_2 \parallel W_3 \parallel W_1$,

(4) $W_1 = W_2 = W_3$ *i* $U_1 \sim U_2 \sim U_3 \sim U_1$,

(5) $W_1 = W_2 = W_3$ *i* $U_i \sim U_j \sim U_k \parallel U_i$, *gdzie* $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, $\neq (i, j, k)$,

(6) $W_1 = W_2 = W_3$ *i* $U_1 \parallel U_2 \parallel U_3 \parallel U_1$.

Dowód. Załóżmy, że punkty (U_i, W_i) dla $i = 1, 2, 3$, są wierzchołkami trójkąta w $\mathcal{N}$. Z 3.4 mamy albo $U_1 = U_2 = U_3$, albo $W_1 = W_2 = W_3$. Załóżmy, że $W_1 = W_2 = W_3$. W tym wypadku, z 4.4 oraz z definicji trójkąta wiemy, że U_1, U_2, U_3 są parami różne oraz współpękowe w $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$. Zatem, z określenia pojęcia współpękowości mamy następujące możliwości:

(I) $U_1 \sim U_2 \sim U_3 \sim U_1$,

(II) $U_i \sim U_j \sim U_k \parallel U_i$, dla $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$,

(III) $U_i \parallel U_j \parallel U_k \sim U_i$, dla $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$,

(IV) $U_1 \parallel U_2 \parallel U_3 \parallel U_1$. 1

Załóżmy, że zachodzi przypadek (III). Przyjmijmy, bez ograniczenia ogólności, że $U_1 \parallel U_2 \parallel U_3 \sim U_1$. Ponieważ U_1, U_2, U_3 są jednakowych wymiarów, więc z przechodniości relacji równoległości, mamy $U_1 \parallel U_3$. Zatem, zgodnie z założeniem, że $U_3 \sim U_1$ musi być $U_1 = U_3$. Przeczy to wcześniejszemu założeniu, że U_1, U_3 są różne. W ten sposób pokazaliśmy, że przypadek (III) nigdy nie zachodzi.

W sytuacji, gdy $U_1 = U_2 = U_3$, rozumowanie jest dokładnie takie samo jak wyżej. □

4.3 Mocne podprzestrzenie

[4.7] lem:podMpodN

Lemat 4.7. *Jeżeli X jest podprzestrzenią w $\mathcal{M}$, to $X\cap \subseteq\|$ jest podprzestrzenią w $\mathcal{N}$.*

Dowód. Weźmy $l \in \mathcal{G}$. Załóżmy, że $\left|l \cap X\cap \subseteq\|\right| \geqslant 2$. Zatem $\left|l \cap X\right| \geqslant 2$ i $\left|l\cap \subseteq\|\right| \geqslant 2$. Zauważmy, że l jest prostą w $\mathcal{M}$ z wniosku 4.2. Stąd $l \subseteq X$ i z 4.1 $l \subseteq (\subseteq\|)$. Więc $l \subseteq (X\cap \subseteq\|)$, co oznacza, że $X\cap \subseteq\|$ jest podprzestrzenią w $\mathcal{N}$. □

Z uwagi na 4.1 zbiór $\subseteq\|$ jest podprzestrzenią $\mathcal{M}$, więc z 4.7 możemy wyciągnąć następujący wniosek.

[4.8] cor:mpMN

Wniosek 4.8. *Jeśli X jest mocną podprzestrzenią w $\mathcal{M}$, to $X\cap \subseteq\|$ jest mocną podprzestrzenią w $\mathcal{N}$.*

Lemat 4.9. *Jeśli X jest podprzestrzenią w $\mathcal{N}$, to X jest podprzestrzenią w $\mathcal{M}$.*

Dowód. Niech l będzie prostą w $\mathcal{M}$ taką, że $\left|X \cap l\right| \geqslant 2$. Ponieważ $X = X\cap \subseteq\|$, więc $\left|l\cap \subseteq\|\right| \geqslant 2$. Z 4.2 $l \in \mathcal{G}$. Ponieważ X jest podprzestrzenią $\mathcal{N}$ i $\left|X \cap l\right| \geqslant 2$, to $l \subseteq X$. To znaczy, że X jest podprzestrzenią w $\mathcal{M}$. □

Z 4.2 proste przestrzeni $\mathcal{N}$, są prostymi przestrzeni $\mathcal{M}$. Stąd mamy następujący wniosek:

[4.10] cor:mpNM

Wniosek 4.10. *Jeśli X jest mocną podprzestrzenią w $\mathcal{N}$, to X jest mocną podprzestrzenią w $\mathcal{M}$.*

[4.11] thm:mpodN

Twierdzenie 4.11. *X jest mocną podprzestrzenią w $\mathcal{N}$ wtw, gdy:*

(1) *albo $X = \{W\} \times X_2$, gdzie W jest punktem w $\mathbf{P}_{k_1}(\mathfrak{A})$, a X_2 jest mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$ taką, że $W \subseteq\| X_2$, to znaczy, dla $U \in X_2$, $W \subseteq\| U$;*

(2) *albo $X = X_1 \times \{W\}$, gdzie X_1 jest mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_{k_1}(\mathfrak{A})$, a W jest punktem w $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$ takim, że $X_1 \subseteq\| W$, to znaczy, dla $U \in X_1$, $U \subseteq\| W$.*

Dowód. $\Rightarrow$: Zakładamy, że X jest mocną podprzestrzenią w $\mathcal{N}$. Zatem z wniosku 4.10 X jest mocną podprzestrzenią w $\mathcal{M}$ i z twierdzenia 3.5:

1. albo $X = \{W\} \times X_2$, gdzie W jest punktem $\mathbf{P}_{k_1}(\mathfrak{A})$ i X_2 jest mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$,

2. albo $X = X_1 \times \{W\}$, gdzie X_1 mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_{k_1}(\mathfrak{A})$ a W jest punktem $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$.

Załóżmy, że zachodzi 1. Weźmy $U \in X_2$. Wówczas $(W, U) \in X$. Ponieważ $X \subseteq (\subseteq\parallel)$, to $W \subseteq\parallel U$.
W przypadku 2, jeśli $U \in X_1$, to $(U, W) \in X$ i tak jak poprzednio, $U \subseteq\parallel W$.

$\Leftarrow$: Mamy tutaj dwa przypadki. Rozważmy sytuację, gdy $X = \{W\} \times X_2$, gdzie W jest punktem $\mathbf{P}_{k_1}(\mathfrak{A})$, X_2 jest mocną podprzestrzenią w $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$ i $W \subseteq\parallel X_2$. Z 3.5 X jest mocną podprzestrzenią w $\mathcal{M}$. Zauważmy, że jeśli $(W, U) \in X$, to $W \subseteq\parallel U$, co oznacza, że $X \subseteq (\subseteq\parallel)$. Zatem $X = X \cap (\subseteq\parallel)$. Na mocy 4.8 mamy, że X jest mocną podprzestrzenią w $\mathcal{N}$.

W sytuacji, gdy $X = X_1 \times \{W\}$, rozumowanie przebiega analogicznie. □

Twierdzenie 4.12. *X jest mocną podprzestrzenią w $\mathcal{N}$ wtw, gdy:*

(1) $X = \{W\} \times [H, Y]_{k_2}$, *gdzie* $W \in \mathcal{H}_{k_1}(V)$, $H \in \mathcal{H}_{k_2-1}(V)$, $Y \in \mathcal{H}(V)$, $H \subseteq Y$ *i* $W \subseteq\parallel H$;

(2) $X = \{W\} \times [Z, B]_{k_2}$, *gdzie* $W \in \mathcal{H}_{k_1}(V)$, $Z \in \mathcal{H}(V)$, $B \in \mathcal{H}_{k_2+1}(V)$, $Z \subseteq B$ *i* $W \subseteq\parallel Z$;

(3) $X = \{W\} \times [U, Y]^*_{k_2}$, *gdzie* $W \in \mathcal{H}_{k_1}(V)$, $U \in \mathcal{H}_{k_2}(V)$, $Y \in \mathcal{H}(V)$, $U \subseteq\parallel Y$ *i* $W \subseteq\parallel U$;

(4) $X = [H, Y]_{k_1} \times \{W\}$, *gdzie* $H \in \mathcal{H}_{k_1-1}(V)$, $Y \in \mathcal{H}(V)$, $W \in \mathcal{H}_{k_2}$, $H \subseteq Y$ *i* $Y \subseteq\parallel W$;

(5) $X = [Z, B]_{k_1} \times \{W\}$, *gdzie* $Z \in \mathcal{H}(V)$, $B \in \mathcal{H}_{k_1+1}(V)$, $W \in \mathcal{H}_{k_2}$, $Z \subseteq B$ *i* $B \subseteq\parallel W$;

(6) $X = [U, Y]^*_{k_1} \times \{W\}$, *gdzie* $U \in \mathcal{H}_{k_1}(V)$, $Y \in \mathcal{H}(V)$, $W \in \mathcal{H}_{k_2}$, $U \subseteq\parallel Y$ *i* $U \subseteq\parallel W$.

Dowód. $\Rightarrow$: Z założenia X jest mocną podprzestrzenią $\mathcal{N}$. Zgodnie z 4.11, uwzględniając 2.11, gdzie przedstawiona jest postać mocnych podprzestrzeni w grassmannianie afinicznym, otrzymujemy sześć przypadków wyliczonych w naszym twierdzeniu.

(1) Ponieważ musi być $W \subseteq\parallel [H, Y]_{k_2}$, więc z lematu 1.1 otrzymujemy $W \subseteq\parallel H$.

(2) Podobnie jak poprzednio mamy $W \subseteq\parallel [Z, B]_{k_2}$. Zatem z 1.1 $W \subseteq\parallel Z$.

(3) W tym przypadku mamy $W \subseteq\parallel [U, Y]^*_{k_2}$. Ponieważ dla $U_0 \in [U, Y]^*_{k_2}$, $W \subseteq\parallel U_0$ i $U_0 \parallel U$, więc $W \subseteq\parallel U$.

(4) Teraz $[H, Y]_{k_1} \subseteq\parallel W$. Zatem z lematu 1.2 dostajemy $Y \subseteq\parallel W$.

(5) Podobnie, $[Z, B]_{k_1} \subseteq\parallel W$, a zatem z 1.2 otrzymujemy $B \subseteq\parallel W$.

(6) Ponieważ $[U, Y]^*_{k_1} \subseteq\parallel W$, to znaczy, że dla $U_0 \in [U, Y]^*_{k_1}$ zachodzi $U \parallel U_0$ i $U_0 \subseteq\parallel W$, a więc $U \subseteq\parallel W$.

$\Leftarrow$: Z narzuconych na X warunków mamy, że $X \subseteq (\subseteq\parallel)$. Zgodnie z 2.11 i 4.11, X jest mocną podprzestrzenią w $\mathcal{N}$. □

4.4 Warunek Veblena

Stwierdzenie 4.6 mówi, że jeśli trzy punkty tworzą trójkąt w $\mathcal{N}$, to ich pierwsze współrzędne są ustalone, a na drugiej mamy trójkąt w odpowiednim grassmannianie, albo na odwrót. Z uwagi na 2.15 mamy więc:

[4.13] thm:veblenWN

Twierdzenie 4.13. *Przestrzeń $\mathcal{N}$ spełnia afiniczny warunek Veblena.*

4.5 Warunek Shulta

[4.14] thm:shultWN

Twierdzenie 4.14. *Przestrzeń $\mathcal{N}$ spełnia warunek Shulta.*

Dowód. Niech (W_1, U_1) będzie połączalny z różnymi punktami (W_2, U_2), (W_3, U_3) na prostej z przestrzeni $\mathcal{N}$. Możemy założyć, że (W_1, U_1) nie leży na prostej przez $(W_2, U_2), (W_3, U_3)$ jako, że ten przypadek jest trywialnie prawdziwy.
Z 4.6, albo $W_1 = W_2 = W_3 =: W$, albo $U_1 = U_2 = U_3 =: U$.
W pierwszym przypadku, U_1, U_2, U_3 tworzą trójąt w $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$. Niech $U_0 \in \overline{U_2, U_3}$. Z 2.16 U_1 i U_0 są połączalne w $\mathbf{P}_{k_1}(\mathfrak{A})$. Zauważmy, że $\{W\} \times \overline{U_1, U_0}$ jest prostą w $\mathcal{N}$. Pokazaliśmy, że (W_1, U_1) jest połączalny z każdym punktem prostej przez $(W_2, U_2), (W_3, U_3)$.

W sytuacji, gdy $U_1 = U_2 = U_3$, dowód przebieba analogicznie. □

4.6 Warunek Desarguesa

[4.15] thm:DesWN

Twierdzenie 4.15. *Przestrzeń $\mathcal{N}$ spełnia oba warianty afinicznego warunku Desarguesa.*

Dowód. Załóżmy, że spełnione są założenia warunku des. Zatem punkty a, b, c tworzą trójkąt w $\mathcal{N}$. Zgodnie z 4.6 możemy przyjąć, że

$$a = (a_1, y), \qquad b = (b_1, y) \qquad \text{i} \qquad c = (c_1, y). \tag{4.1}$$

[4.1] eq:trojkatabc

Również punkty a', b', c' tworzą trójkąt w $\mathcal{N}$. Przypuśćmy zatem, na podstawie 4.6, że

$$a' = (x, a'_2), \qquad b' = (x, b'_2) \qquad \text{i} \qquad c' = (x, c'_1). \tag{4.2}$$

[4.2] eq:trojkatapbpcp

Z założeń des wiemy, że punkty a, a' połączone są prostą l_1, podobnie b, b' prostą l_2 oraz c, c' prostą l_3. Dlatego też, z określenia prostych w produkcie Segre (3.2), (3.3), musi zachodzić koniunkcja następujących trzech warunków:

(a) $a_1 = x$ albo $a'_2 = y$,

(b) $b_1 = x$ albo $b'_2 = y$,

(c) $c_1 = x$ albo $c'_2 = y$.

Prowadzi to do sprzeczności z założeniem, że punkty abc i $a'b'c'$ tworzą trójkąty. W takim razie nasze przypuszczenie (4.2) było fałszywe. Uwzględniając istnienie prostych l_1, l_2 i l_3 musi więc być

$$a' = (a'_1, y), \qquad b' = (b'_1, y) \qquad \text{i} \qquad c' = (c'_1, y).$$

W ten sposób pokazaliśmy, że wszystkie punkty a, b, c, a', b', c' mają jedną, wspólną współrzędną ustaloną. Możemy zatem ograniczyć się do drugiej współrzędnej, na której mamy grassmanian afiniczny. Tak więc na mocy 2.17 w $\mathcal{N}$ zachodzi des.

Zauważmy, że nigdzie w powyższym rozumowaniu nie korzystaliśmy z tego, że $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$. Zatem w $\mathcal{N}$ prawdziwy jest również Des. □

4.7 Uzupełnienie do równoległoboku

[4.16] thm:Npcc

Twierdzenie 4.16. *Przestrzeń $\mathcal{N}$ spełnia warunek* PCC *o uzupełnianiu do równoległoboku.*

Dowód. Niech a, b, c będą punktami przestrzeni $\mathcal{N}$ spełniającymi założenia warunku PCC o uzupełnianiu do równoległoboku. Bez zmniejszenia ogólności, możemy wówczas powiedzieć, że są dwie możliwości:

(a) $a = (U, W)$, $b = (U, W_1)$, $c = (U, W_2)$,

(b) $a = (U, W)$, $b = (U, W_1)$, $c = (U_1, W)$.

Rozważmy sytuację (a). Punkty a, b, c mają pierwszą współrzędną ustaloną. Korzystając zatem z prawa PCC dla grassmannianu afinicznego, tzn. z 2.18, otrzymujemy W_3 uzupełniający trójkę W, W_1, W_2 do równoległoboku. Ponieważ a jest punktem $\mathcal{N}$, więc $U \subseteq\parallel W$. Ponadto $W \parallel W_3$ (por. dowód 2.18). Stąd $U \subseteq\parallel W_3$ i

$$d = (U, W_3)$$

jest uzupełnieniem trójki a, b, c do równoległoboku w $\mathcal{N}$.

Załóżmy teraz, że zachodzi (b). Mamy wówczas dwie proste przestrzeni $\mathcal{N}$:

$$\overline{a, b} = \{U\} \times l_2,$$
$$\overline{a, c} = l_1 \times \{W\},$$

gdzie $l_1 = \overline{U, U_1}$ jest prostą w pierwszej składowej produktu, a $l_2 = \overline{W, W_1}$ jest prostą w drugiej składowej.

Zauważmy, iż z założeń PCC mamy:

$$\{U\} \times l_2 \parallel \{U\} \times l_2 \qquad \text{oraz} \qquad l_1 \times \{W\} \parallel l_1 \times \{W\}.$$

Z definicji równoległości w $\mathcal{N}$ oznacza to odpowiednio, że $l_1 \parallel l_1$ i $l_2 \parallel l_2$. Zatem l_1 jest pękiem równoległych w $\mathbf{P}_{k_1}(\mathfrak{A})$, a l_2 jest pękiem równoległych w $\mathbf{P}_{k_2}(\mathfrak{A})$. Stąd, na mocy 2.1, otrzymujemy odpowiednio

$$U \parallel U_1 \qquad \text{oraz} \qquad W \parallel W_1. \tag{4.3}$$

[4.3] eq:NpccA Ponieważ b jest punktem z $\mathcal{N}$, więc $U \subseteq\parallel W_1$. Zatem z (4.3) mamy

$$U_1 \parallel U \subseteq\parallel W_1,$$

a więc

$$U_1 \subseteq\parallel W_1.$$

To znaczy, że mamy punkt $d := (U_1, W_1)$ w przestrzeni $\mathcal{N}$.

Zauważmy, że

$$\{U_1\} \times l_2 = \overline{c, d} \qquad \text{oraz} \qquad l_1 \times \{W_1\} = \overline{b, d}.$$

Ponieważ powyższe proste łączą punkty z $\mathcal{N}$, więc zgodnie z 4.2, są one prostymi z $\mathcal{N}$. W ten sposób dowód PCC jest zakończony. $\square$

Bibliografia

Bennet [1] Bennet M. K., *Affine and projective geometry*, Wiley-Interscience 1995.

segre [2] Naumowicz A., Prażmowski K., *On Segre's product of partial line spaces and spaces of pencils*, J. Geom. 71 (2001), 128-143.

szmielew [3] Szmielew W., *Od geometrii afinicznej do euklidesowej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1981.

kaf [4] Żynel J., *Rzutowania w kracie podprzestrzeni przestrzeni afinicznej*, praca magisterska z roku 2005, UwB IM.