Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyczno-Fizyczny

Instytut Matematyki

Jarek Kotowski

Rzutowania w grassmannianach afinicznych

Praca została napisana
pod kierunkiem
dr. Mariusza Żynela

Białystok 2006

Spis treści

Wstęp

W pracy [9] bada się rzuty w bardzo ogólnych strukturach zwanych *przestrzenie jeżowe*. Przestrzenie rzutowe, afiniczne i grassmaniany afiniczne są szczególnymi przypadkami przestrzeni jeżowych. Z tego powodu można uznać, że rozwinięty w [9] aparat rzutowania można zaaplikować w tych również znanych geometriach. Rodzi się tutaj pytanie, na ile stosowanie tego ogólnego aparatu jest zgodne z klasycznymi rzutami w geometrii grassmannianu afinicznego.

Punktem wyjścia do moich rozważań jest praca [8], w której przedstawione są rzutowania w kracie afinicznej. Są tam szczegółowo zbadane pęki odcinków właściwych i rzuty w tych pękach. W ten sposób praca ta, jako bardziej ogólna, dostarcza gotowych rozwiązań w wielu wypadkach. Nie poruszane są w niej niestety odcinki równoległych i w mojej pracy wszystkie konstrukcje ich dotyczące są całkowicie nowe.

Celem mojej pracy jest zrekonstruowanie aparatu rzutowego w grassmanianie afinicznym jako pochodnego od geometrii afinicznej. Podstawą do tej rekonstrukcji jest zbadanie podprzestrzeni odcinkowych i ich pęków w grassmanianie afinicznym. Pośrednim wynikiem pracy jest klasyfikacja pęków podprzestrzeni odcinkowych (por. Tw. 2.9 i Tw. 2.10). Zasadniczym wynikiem jest klasyfikacja rzutów w pękach odcinków, której podsumowanie stanowią Tw. 3.21 i Tw. 3.22. Interesującym faktem jest to, że uzyskane rodzaje rzutów są uogólnieniem dobrze nam znanych rzutów z geometrii elementarnej, a więc rzutu środkowego oraz równoległego. Udało się to uzyskać dzięki wyrażeniu *ślizgów* z [8] jako rzutów równoległych. Nie są to zatem nowe rzuty, a jedynie nowe spojrzenie na ślizgi jak na rzuty równoległe.

Ciekawym problemem jest znalezienie powiązań z podobną klasyfikacją przedstawioną w [9] co może stanowić kontynuację mojej pracy.

Rozdział 1

Grassmannian afiniczny

Punktem wyjścia do rozważań różnych struktur geometrycznych w tej pracy jest grassmannian afiniczny. Nim jednak wprowadzę pojęcie grassmannianu afinicznego przypomnę definicje częściowej przestrzeni prostych, przestrzeni prostych oraz przestrzeni afinicznej, nad którą to dopiero jest budowany grassmannian afiniczny.

1.1 Pojęcia wstępne

Niech S będzie dowolnym niepustym zbiorem, a L rodziną podzbiorów S, tzn. $L \subset 2^S$. Elementy S nazywamy *punktami* natomiast elementy L nazywany *prostymi*. Strukturę $\mathfrak{M} = \langle S, L \rangle$ nazywamy *częściową przestrzenią prostych*, gdy spełnione są następujące aksjomaty:

(L1) Przez dwa dowolne różne punkty przechodzi co najwyżej jedna prosta.

(L2) Każda prosta składa się z co najmniej dwóch punktów.

(L3) Istnieją trzy punkty, nie leżące na jednej prostej (*niewspółliniowe*).

Struktura $\mathfrak{M}$ jest *przestrzenią prostych*, gdy:

(L4) przez każde dwa różne punkty przechodzi jedna prosta.

Niech $\parallel \subseteq L \times L$. Relację $\parallel$ nazywamy *relacją równoległości* jeśli jest ona relacją równoważności i spełnia następujące warunki:

(A1) Dla dowolnego punktu p i prostej k istnieje taka prosta l przez p, że $l \parallel k$.

(A2) Dla dowolnych prostych k, l, jeśli $k \parallel l$ i $k \cap l \neq \emptyset$, to $k = l$.

Powyższe dwa aksjomaty to słynny „postulat równoległości" Euklidesa.

Przestrzeń afiniczna to taka przestrzeń prostych z równoległością, która spełnia afiniczny warunek Veblena. Afiniczny warunek Veblena mówi, że prosta równoległa do podstawy niezdegenerowanego trójkąta, przecinająca jedno z jego ramion przetnie też i drugie. Rzeczywista przestrzeń euklidesowa jest przykładem przestrzeni afinicznej.

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad niekoniecznie przemiennym ciałem K. Przez $\mathrm{Sub}(V)$ oznaczamy rodzinę wszystkich podprzestrzeni przestrzeni V, natomiast

$$\mathcal{H}(V) := \Big\{a + S \colon a \in V,\ S \in \mathrm{Sub}(V)\Big\}$$

to zbiór wszystkich warstw nad V. Jeśli $U \in \mathcal{H}(V)$ to istnieje dokładnie jedna podprzestrzeń $S \in \mathrm{Sub}(V)$ taka, że $U = u + S$ i $U \in \mathcal{H}(V)$ dla pewnego $u \in V$, więc dla warstwy U jej *podprzestrzeń kierunkowa* S jest wyznaczona jednoznacznie. Możemy mówić o wymiarze warstw i przyjąć, że $\dim U := \dim S$. Zbiór wszystkich k-wymiarowych podprzestrzeni V oznaczamy jako $\mathrm{Sub}_k(V)$, natomiast zbiór wszystkich k-wymiarowych warstw to

$$\mathcal{H}_k(V) := \Big\{a + S \colon a \in V,\ S \in \mathrm{Sub}_k(V)\Big\}.$$

Przekształcenie τ_u, zdefiniowane jako $\tau_u(v) = v + u$, działa na V i zachowuje $\mathcal{H}_k(V)$ dla dowolnego naturalnego k. Dla $U, W \in \mathcal{H}(V)$ piszemy:

$$U \subseteq\!\| \ W :\Longleftrightarrow \quad \tau_v(U) \subseteq W \text{ dla pewnego } v \in V.$$

Jeśli $U = u + S$ i $W = w + T$, gdzie $u, w \in V$ a $S, T \in \mathrm{Sub}(V)$, wówczas

$$U \subseteq\!\| \ W \iff S \subseteq T. \tag{1.1}$$

Symetryczną relację równoległości dla warstw możemy określić następująco:

$$U \parallel W :\Longleftrightarrow \quad U \subseteq\!\| \ W \subseteq\!\| \ U. \tag{1.2}$$

Zauważmy, że:

$$U \parallel W \iff S = T. \tag{1.3}$$

Struktura:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(V) = \langle V, \mathcal{H}_1(V), \parallel\rangle,$$

jest *przestrzenią afiniczną*. Zbiór:

$$\widehat{\mathcal{H}(V)} := \mathcal{H}(V) \cup \{\emptyset\}$$

jest klasą wszystkich podprzestrzeni $\mathfrak{A}$. Oczywiście $\dim(\emptyset) = -1$ i $\dim(\{a\}) = 0$ dla każdego $a \in V$. Dla $U, W \in \widehat{\mathcal{H}(V)}$ można określić ich *kres dolny*[1] w następujący sposób:

$$U \sqcap W := U \cap W.$$

Natomiast *kres górny*[2] jest zdefiniowany w następujący sposób:

$$U \sqcup W := u + \langle S, T, u - w\rangle. \tag{1.4}$$

[1] Największa podprzestrzeń zawarta w U i W

[2] Najmniejsza podprzestrzeń zawierająca U i W

Jest to fakt dobrze znany z geometrii elementarnej.

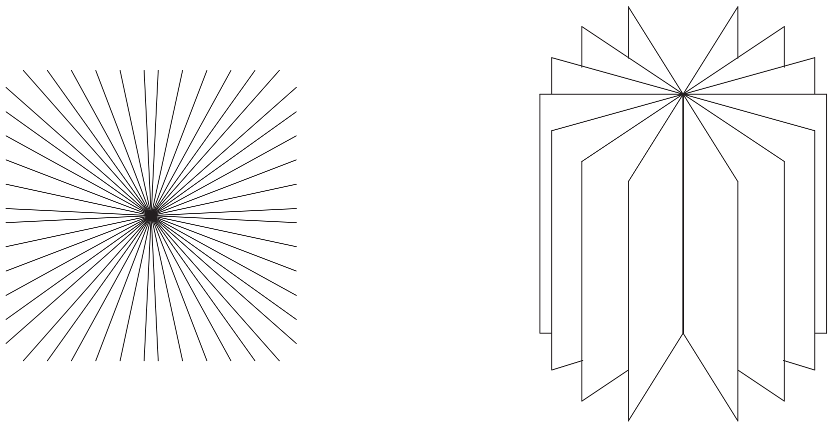
Dalej w pracy k jest liczbą naturalną, taką że

$$0 \leqslant k < \dim V.$$

Definicja 1.1. Dwie podprzestrzenie H, B przestrzeni $\mathfrak{A}$, takie że $H \subset B$ i $\dim H + 1 = k = \dim B - 1$, wyznaczają *k-pęk właściwy*, tzn. zbiór postaci:

$$\mathbf{p}(H, B) = \{R \in \mathcal{H}_k(V) \colon H \subset R \subset B\}\,, \tag{1.5}$$

gdzie H nazywamy *wierzchołkiem*, a B *podstawą* pęku $\mathbf{p}(H, B)$. Przez $\mathcal{P}_k(\mathfrak{A})$ oznaczmy zbiór wszystkich k-pęków właściwych w $\mathfrak{A}$.

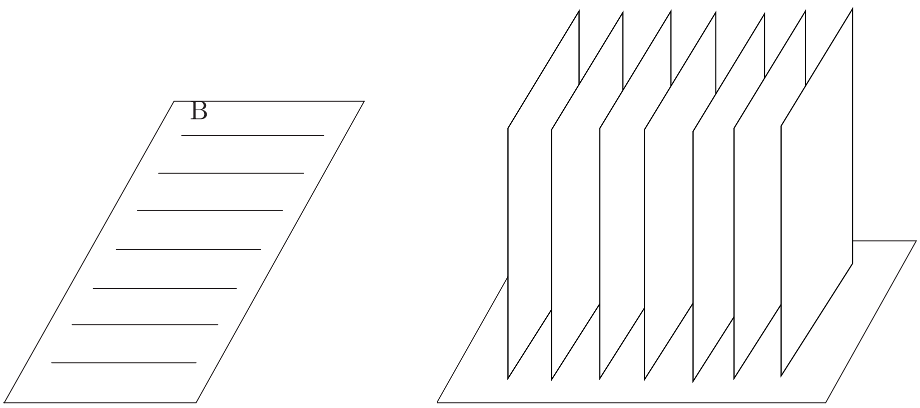


Rysunek 1.1: Przykład pęków właściwych.

Definicja 1.2. Każda para U, B podprzestrzeni przestrzeni $\mathfrak{A}$, taka że $U \subseteq\parallel B$ i $\dim U = k = \dim B - 1$, wyznacza *k-pęk równoległych*, tzn. zbiór

$$\mathbf{p}^*(U, B) = \{R \in \mathcal{H}_k(V) \colon U \parallel R \subset B\}\,, \tag{1.6}$$

gdzie U nazywamy *kierunkiem*, a B *podstawą* pęku $\mathbf{p}^*(U, B)$. Przez $\mathcal{P}^*_k(\mathfrak{A})$ oznaczmy zbiór wszystkich k-pęków równoległych w $\mathfrak{A}$.



Rysunek 1.2: Przykłady pęków równoległych.

Definicja 1.3. Strukturę

$$\mathbf{P}_k(\mathfrak{A}) = \langle \mathcal{H}_k(V), \mathcal{P}_k(\mathfrak{A}) \cup \mathcal{P}_k^*(\mathfrak{A}) \rangle$$

nazywamy *grassmannianem afinicznym indeksu k.*

Zgodnie z [7] grassmannian afiniczny jest częściową przestrzenią prostych.

Definicja 1.4. Mówimy, że dwie różne podprzestrzenie U i W przestrzeni $\mathfrak{A}$ są *sąsiednie* i piszemy $U \sim W$, gdy $\dim(U \sqcap W) + 1 = \dim U = \dim W$.

Fakt 1.5. *Jeśli, dwie różne podprzestrzenie U i W przestrzeni $\mathfrak{A}$, są sąsiednie, to* $\dim(U \sqcup W) = \dim U + 1 = \dim W + 1$ *i wyznaczony przez nie pęk właściwy to* $\mathbf{p}(U \sqcap W, U \sqcup W)$*.*

Lemat 1.6. *Jeśli U i W są podprzestrzeniami $\mathfrak{A}$ takimi, że $W \subseteq\parallel U$ i $U \sqcap W = \emptyset$, to* $\dim(U \sqcup W) = \dim U + 1$ *i U, W wyznaczają pęk równoległych* $\mathbf{p}^*(U, U \sqcup W)$*.*

Dowód. Weźmy, dwie podprzestrzenie $U = u + S$ i $W = w + T$, które spełniają założenia lematu. Oczywiście $U \subseteq U \sqcup W$, więc należy jeszcze pokazać, że $\dim(U \sqcup W) = \dim U + 1$. Z określenia relacji $\subseteq\parallel$ mamy, że $T \subseteq S$ i tym samym

$$U \sqcup W = u + \langle S, T, u - w \rangle = u + \langle S, u - w \rangle. \tag{1.7}$$

Przypuśćmy, że $u - w \in S$ i oznaczmy $x := u + (w - u)$. Wtedy $x \in U$, ale z drugiej strony $x = w$ i $x \in W$. Dostajemy sprzeczność z założeniem, że $U \sqcap W = \emptyset$. Więc $u - w \notin S$ i z (1.7) otrzymujemy

$$\dim(U \sqcup W) = \dim S + 1 = \dim U + 1.$$

Pokazaliśmy, że dla takich U i W, zachodzi $U \subseteq U \sqcup W$ i $\dim(U \sqcup W) = \dim U + 1$. Wyznaczają więc one pęk równoległych $\mathbf{p}^*(U, U \sqcup W)$, co kończy dowód.

□

Wniosek 1.7. *Jeśli, dwie różne podprzestrzenie U, W przestrzeni $\mathfrak{A}$, są równoległe, to* $\dim(U \sqcup W) = \dim U + 1 = \dim W + 1$ *i wyznaczają one pęk równoległych* $\mathbf{p}^*(U, U \sqcup W)$*.*

Definicja 1.8. Mówimy, że dwie podprzestrzenie U i W przestrzeni $\mathfrak{A}$, są *współpękowe*, jeśli są sąsiednie lub są równoległe. Dla współpękowych podprzestrzeni U, W przestrzeni $\mathfrak{A}$ określamy pęk wyznaczony przez U i W, jako zbiór:

$$\overline{U, W} = \begin{cases} \mathbf{p}(U \sqcap W, U \sqcup W), & \text{gdy} \quad W \sim U, \\ \mathbf{p}^*(U, U \sqcup W), & \text{gdy} \quad U \parallel W, \\ \{U\}, & \text{gdy} \quad U = W. \end{cases}$$

Z definicji sąsiedniości 1.4 i określenia równoległości (1.3) wynika, że współpękowe podprzestrzenie przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ mają ten sam wymiar. Zauważmy też, że zbiór punktów na prostej w przestrzeni $\mathfrak{A}$ formalnie spełnia założenia zarówno pęku właściwego jak i pęku równoległych.

Fakt 1.9. *Jeśli U i W są podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ takimi, że $\dim(U \sqcup W) - 1 = \dim U = \dim W$ oraz $U \sqcap W \neq \emptyset$, to $\dim(U \sqcap W) + 1 = \dim U = \dim W$, a tym samym $U \sim W$.*

Dowód. Cytat z pracy [8], a dokładnie lemat 1.9. □

Wniosek 1.10. *Jeśli U i W są podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ takimi, że $\dim(U \sqcup W) - 1 = \dim U = \dim W$, to są one równoległe lub sąsiednie, czyli zawsze są współpękowe.*

Zauważmy, że wniosek 1.10 mówi w szczególności, że na płaszczyźnie afinicznej proste są albo równoległe, albo przecinają się. Jest to znany fakt w geometrii afinicznej.

Lemat 1.11. *Niech p będzie dowolnym k-pękiem w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$, wówczas $p = \overline{U_1, U_2}$ dla dowolnych $U_1, U_2 \in p$, takich, że $U_1 \neq U_2$.*

Dowód. 1°

Niech p będzie dowolnym pękiem właściwym i $U_1, U_2 \in p, U_1 \neq U_2$. Wówczas z definicji 1.8 $p = \overline{U, W}$ dla pewnych sąsiednich i różnych $U, W \in \mathcal{H}_k(V)$. Z określenia pęku właściwego

$$U \sqcap W \subseteq U_1 \text{ i } U \sqcap W \subseteq U_2,$$

więc

$$U \sqcap W \subseteq U_1 \sqcap U_2$$

Ponieważ $U_1, U_2 \in p$ i p jest pękiem właściwym, mamy że U_1, U_2 są sąsiednie, a więc $\dim(U_1 \sqcap U_2) = k - 1$, również $\dim(U \sqcap W) = k - 1$, jednocześnie $U \sqcap W \subseteq U_1 \sqcap U_2$, stąd mamy że $U \sqcap W = U_1 \sqcap U_2$. Z drugiej strony mamy że:

$$U_1 \subseteq U \sqcup W \text{ i } U_2 \subseteq U \sqcup W,$$

czyli

$$U_1 \sqcup U_2 \subseteq U \sqcup W$$

i z faktu że $\dim(U_1 \sqcup U_2) = \dim(U \sqcup W)$ otrzymujemy $U_1 \sqcup U_2 = U \sqcup W$, a wtedy

$$\overline{U, W} = \mathbf{p}(U \sqcap W, U \sqcup W) = \mathbf{p}(U_1 \sqcap U_2, U_1 \sqcup U_2) = \overline{U_1, U_2}.$$

2°

Niech teraz p będzie pękiem równoległych i $U_1, U_2 \in p, U_1 \neq U_2$ Wówczas z definicji 1.8 $p = \overline{U, W}$ dla pewnych $U, W \in \mathcal{H}_k(V)$ takich, że $U \parallel W$. Z definicji 1.2 i przechodniości relacji równoległości mamy $U \parallel W \parallel U_1 \parallel U_2$, a z faktu 1.7 mamy, że $\dim(U_1 \sqcup U_2) = k+1$. Ponieważ

$$U_1 \subseteq U \sqcup W \text{ i } U_2 \subseteq U \sqcup W,$$

to

$$U_1 \sqcup U_2 \subseteq U \sqcup W$$

i otrzymujemy $U \sqcup W = U_1 \sqcup U_2$, a wtedy

$$\overline{U, W} = \mathbf{p}^*(U, U \sqcup W) = \mathbf{p}(U_1, U_1 \sqcup U_2) = \overline{U_1, U_2}.$$

$\square$

Lemat 1.12. *Niech p będzie k-pękiem oraz U_1, U_2 podprzestrzeniami $\mathfrak{A}$ takimi, że $p = \overline{U_1, U_2}$.*

(i) *Jeśli $W \subseteq U_1, U_2$, to dla każdego $U \in p$ mamy $W \subseteq U$.*

(ii) *Jeśli $U_1, U_2 \subseteq W$, to dla każdego $U \in p$ mamy $U \subseteq W$.*

DOWÓD. (i) Jeśli $W \neq \emptyset$ to p jest pękiem właściwym. Z definicji 1.8 p będzie postaci $\mathbf{p}(U_1 \sqcap U_2, U_1 \sqcup U_2)$, a z definicji k-pęku właściwego w przestrzeni afinicznej wiemy, że dla każdego $U \in p$ zachodzi $U_1 \sqcap U_2 \subseteq U$. Z założenia natomiast wynika, że $W \subseteq U_1 \sqcap U_2$, zatem z przechodniości inkluzji $W \subseteq U$.

Gdy $W = \mathbf{0}\emptyset$ to zawsze $W \subseteq U$.

(ii) Zarówno dla pęku właściwego, jak i pęku równoległych mamy $U \subseteq U_1 \sqcup U_2$ dla dowolnego $U \in p$. Z założenia zaś $U_1 \sqcup U_2 \subseteq W$ co ostatecznie daje $U \subseteq W$,a tym samym kończy dowód. $\square$

Lemat 1.13. *Niech p będzie k-pękiem oraz U_1, U_2 elementami w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ takimi, że $p = \overline{U_1, U_2}$.*

(i) *Jeśli $W \subseteq\parallel U_1, U_2$, to dla każdego $U \in p$ mamy $W \subseteq\parallel U$.*

(ii) *Jeśli $U_1, U_2 \subseteq\parallel W$, to dla każdego $U \in p$ mamy $U \subseteq\parallel W$.*

DOWÓD.
(i) Jeśli p jest pękiem równoległych, to dla dowolnego $U \in \overline{U_1, U_2}$ mamy $U \parallel U_1, U_2$, a ponieważ $W \subseteq\parallel U_1, U_2$ więc z przechodniości relacji równoległości otrzymujemy $W \subseteq\parallel U$.

Jeśli p jest pękiem właściwym, wówczas dla każdego $U \in p$, spełniona jest inkluzja $U_1 \sqcap U_2 \subseteq U$. Z założenia natomiast wynika, że $W \subseteq\parallel U_1, U_2$, więc $W \subseteq\parallel U_1 \sqcap U_2$ i z przechodniości inkluzji $W \subseteq\parallel U$.

(ii) Jeśli p to pęk równoległych, wówczas:

$$U \in \overline{U_1, U_2} \text{ a więc } U \parallel U_1, U_2 \subseteq\parallel W \rightarrow U \subseteq\parallel W.$$

Jeśli p jest pękiem właściwym rozpiętym przez $U_1 = u_1 + S$ i $U_2 = u_2 + T$, to z definicji 1.4 wiemy, że $\dim(U_1 \sqcap U_2) + 1 = \dim(U_1) = \dim(U_2)$. Jeśli tylko U_1 i U_2 nie są punktami to $U_1 \sqcap U_2 \neq \emptyset$ i istnieje pewne $u \in U_1 \sqcap U_2$, takie że:

$$U_1 = u + S \quad \text{i} \quad U_2 = u + T,$$

Wówczas

$$U_1 \sqcup U_2 = u + \langle S, T, u - u \rangle = u + \langle S, T \rangle,$$

a ponieważ $U_1, U_2 \subseteq\parallel W = w + Q$, to $S, T \subseteq Q$ i otrzymujemy:

$$U_1 \sqcup U_2 \subseteq\parallel W$$

Z 1.1 dowolny element $U \in p$ należy do $U_1 \sqcup U_2$, a tym samym $U \subseteq\parallel W$. W przypadku gdy U_1 i U_2 są punktami w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$, to dowód przebiega analogicznie jak dla pęku równoległych. □

Definicja 1.14. Dla U i W podprzestrzeni $\mathfrak{A}$ takich, że $U \subseteq\parallel W$ przez $U * W$ oznaczamy podprzestrzeń równoległą do W zawierająca U. Operację $*$ można wyrazić w następujący sposób:

$$U' = U * W \quad \text{wtw. gdy} \quad U \subseteq U' \quad \text{i} \quad U' \parallel W. \tag{1.8}$$

W szczególnym przypadku, gdy U jest punktem zaś W prostą w $\mathfrak{A}$, to $U * W$ jest prostą równoległą do prostej W, przechodzącą przez U. Operacja $*$ jest dobrze określona dla dowolnego punku i prostej w przestrzeni z równoległością spełniającą postulat Euklidesa.

Fakt 1.15. *Niech U, W i Y podprzestrzenie $\mathfrak{A}$ takie, że $U \subseteq\parallel W$. Wówczas*

1. $U \subseteq U * W \subseteq U \sqcup W$.
2. $W \parallel U * W$.
3. $U \subseteq Y$ *i* $W \subseteq\parallel Y$ *to* $U * W \subseteq Y$.
4. $\dim(U * W) = k$.

Definicja 1.16. Niech $U = u + S$ oraz $W = w + T$ będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$. Wówczas określamy dla nich operację $\circledvee$ w następujący sposób:

$$U \circledvee W := u + \langle S, T \rangle.$$

Fakt 1.17. *Niech $U = u + S$, $W = w + T$ i Y podprzestrzenie $\mathfrak{A}$. Wówczas*

1. *Jeśli* $W \subseteq\parallel U$ *to* $U \circledvee W = U$.
2. $U \subseteq U \circledvee W \subseteq U \sqcup W$.
3. $U, W \subseteq\parallel U \circledvee W$.

4. *Jeśli* $W \subseteq Y$ *to* $U \varovee W \subseteq U \varovee Y$.

5. *Jeśli* $U \sqcap W \neq \emptyset$ *to* $U \varovee W = W \varovee U = U \sqcup W$.

6. $\dim(U \varovee W) = \dim(\langle S, T\rangle)$.

7. *Jeśli* $U \subseteq Y$ *to* $U \varovee W \subseteq Y \varovee W$.

8. *Jeśli* $U \subseteq Y$ *i* $W \subseteq\parallel Y$ *to* $U \varovee W \subseteq Y$.

Fakt 1.18. *Jeśli* U *jest podprzestrzenią* $\mathfrak{A}$, *a* L *prostą w* $\mathfrak{A}$ *taką, że* $L \not\subseteq\parallel U$, *to* $\dim(U \varovee L) = \dim(U) + 1$.

Dowód. To bardziej wyjaśnienie niż formalny dowód. Niech $U = u + S$, a $L = l + T$ dla pewnych podprzestrzeni S, T przestrzeni V. Z założenia wiemy, że $L \not\subseteq\parallel U$. Oznacza to, że $T \nsubseteq S$. Jak powiedzieliśmy na wstępie do tego rozdziału, wymiar warstwy możemy utożsamiać z wymiarem jej podprzestrzeni kierunkowej. Ponieważ $T \nsubseteq S$ oraz $\dim T = 1$, więc $\dim(\langle S, T\rangle) = \dim S + 1$. Ostatecznie mamy, że $\dim(U \varovee L) = \dim U + 1$. □

Prostym wnioskiem z powyższego faktu jest następujące spostrzeżenie.

Wniosek 1.19. *Jeśli* U *i* L *takie jak w fakcie 1.18, to wyznaczają one pęk równoległych postaci:*

$$\mathbf{p}^*(U, U \varovee L).$$

1.2 Podprzestrzeń odcinkowa w grassmannianie

Odcinkiem właściwym w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ nazywamy zbiór postaci:

$$[Z, Y] := \Big\{U \in \mathcal{H}(V) \colon Z \subseteq U \subseteq Y\Big\}, \tag{1.9}$$

gdzie $Z, Y \in \widehat{H(V)}$. Zauważmy, że pęk właściwy $\mathbf{p}(H, B)$ to zbiór $[H, B] \setminus \{Z, Y\}$, czyli odcinek bez końców. Zatem odcinki są uogólnieniem pęków właściwych. Rodzi się pytanie w jaki sposób uogólnić pęk równoległych?

Odcinkiem równoległych w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$, nazywamy zbiór postaci:

$$[Z, Y]^* := \Big\{U \in \mathcal{H}(V) \colon Z \subseteq\parallel U \subseteq Y\Big\}, \tag{1.10}$$

gdzie $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$ takie, że Z jest co najmniej prostą w $\mathfrak{A}$. Faktycznie odcinek równoległych będzie uogólnieniem pęku równoległych, a mianowicie $\mathbf{p}^*(U, B) = [U, B]^* \setminus \{B\}$.

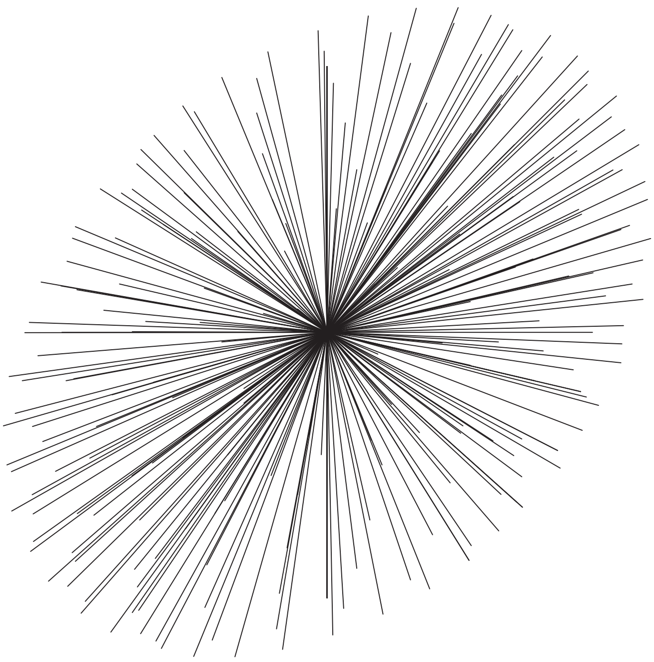
Wprowadzone w tym akapicie nazewnictwo odnosi się zarówno do odcinków właściwych jak również do odcinków równoległych i przez słowo „odcinek” rozumiemy właśnie jeden z nich. I tak koniec Z odcinka nazywamy *wierzchołkiem*, natomiast koniec Y *podstawą*. Mówimy, że odcinek jest *niezdegenerowany* jeśli zawiera co najmniej dwa różne elementy. Odcinek nazywamy *nietrywialnym* jeśli zawiera co najmniej trzy różne elementy.

W pracy będębędziemy się zajmować specjalnymi odcinkami zwanymi *k-odcinkami* lub *odcinkami indeksu k*.

Odcinkiem właściwym indeksu k lub *k-odcinkiem właściwym* w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ nazywamy zbiór postaci:

$$[Z, Y]_k := \Big\{U \in \mathcal{H}_k(V) \colon Z \subseteq U \subseteq Y\Big\}, \tag{1.11}$$

gdzie $Z, Y \in \widehat{\mathcal{H}(V)}$. Łatwo zauważyć że gdy $k < \dim(Z)$ lub $\dim(Y) < k$ to $[Z, Y]_k = \emptyset$, gdy $k = \dim(Z)$ to $[Z, Y]_k = \{Z\}$, a gdy $k = \dim(Y)$ to $[Z, Y]_k = \{Y\}$.



Rysunek 1.3: Przykład k-odcinka właściwego. Zbiór wszystkich prostych w przestrzeni trójwymiarowej przez ustalony punkt.

Odcinkiem równoległych indeksu k lub *k-odcinkiem równoległych* w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$, nazywamy zbiór postaci:

$$[Z, Y]^*_k := \Big\{U \in \mathcal{H}_k(V) \colon Z \subseteq\parallel U \subseteq Y\Big\}, \tag{1.12}$$

gdzie $Z, Y \in \mathcal{H}(V)$ takie, że Z jest co najmniej prostą w $\mathfrak{A}$. Jeśli $Z = a \in V$, czyli Z jest punktem[3] w $\mathfrak{A}$ wówczas odcinek równoległych miałby następującą postać:

[3]W tym wypadku utożsamiamy punkt a z singletonem punktu a tzn. z $\{a\}$.

$$[a, Y]_k^* = \Big\{ U \in \mathcal{H}_k(V) \colon U \subseteq Y \Big\},$$

ponieważ każdy punkt z $\mathfrak{A}$ da się przesunąć w taki sposób, że będzie się zawierał w dowolnej podprzestrzeni U przestrzeni $\mathfrak{A}$. Jednocześnie w każdej U przestrzeni $\mathfrak{A}$ zawarta jest podprzestrzeń zerowa $\emptyset$, więc mamy następującą równość:

$$[a, Y]_k^* = \Big\{ U \in \mathcal{H}_k(V) \colon U \subseteq Y \Big\} = [\emptyset, Y]_k^* = [\emptyset, Y]_k, \tag{1.13}$$

co tłumaczy dlaczego rozważane dalej k-odcinki równoległych, jako wierzchołek posiadają co najmniej prostą.

W dalszej części pracy rozważamy nietrywialne, k-odcinki właściwe $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]_k$, $i = 1, 2, \ldots$, oraz nietrywialne k-odcinki równoległych $\mathcal{X}_i^* = [Z_i, Y_i]_k^*$, $i = 1, 2, \ldots$ i stosujemy następujące konwencje:

$$Z' = Z_1 \sqcap Z_2, \quad Z'' = Z_1 \sqcup Z_2, \quad Y' = Y_1 \sqcap Y_2, \quad Y'' = Y_1 \sqcup Y_2, \tag{1.14}$$

$$\mathcal{X}' = \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = [Z'', Y'], \qquad \mathcal{X}'' = \langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle = [Z', Y'']. \tag{1.15}$$

Fakt 1.20. *Niech Z_1, Z_2, Y będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$. Jeśli $Z_1 \parallel Z_2$, to $[Z_1, Y]_k^* = [Z_2, Y]_k^*$.*

Lemat 1.21. *Niech p będzie dowolną prostą w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, wówczas jeśli $U_1, U_2 \in p \cap [Z, Y]_k$ i $U_1 \neq U_2$, to $p \subseteq [Z, Y]_k$.*

Dowód. W grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, p może być k-pękiem właściwym lub p może być k-pękiem równoległych. Osobno rozpatrzymy te dwa przypadki:

1° Niech p będzie k-pękiem właściwym i $U_1, U_2 \in p \cap [Z, Y]_k$. Z 1.11 mamy $p = \overline{U_1, U_2}$. Weźmy $U \in p$. Z definicji k-pęku właściwego mamy:

$$U_1 \sqcap U_2 \subseteq U \subseteq U_1 \sqcup U_2,$$

natomiast z definicji k-odcinka i z założenia że $U_1, U_2 \in [Z, Y]_k$ mamy:

$$Z \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq U \subseteq U_1 \sqcup U_2 \subseteq Y,$$

co oznacza, że $U \in [Z, Y]_k$.

2° Niech p będzie k-pękiem równoległych i $U_1, U_2 \in p \cap [Z, Y]_k$. Z 1.11 mamy $p = \overline{U_1, U_2}$. Weźmy $U \in p$. Z definicji k-pęku równoległych mamy:

$$U_1 \parallel U_2 \parallel U \subseteq U_1 \sqcup U_2.$$

więc $U_1 \sqcap U_2 = \emptyset$ i z definicji k-odcinka oraz z założenia że $U_1, U_2 \in [Z, Y]_k$ mamy: $Z \subseteq U_1 \cap U_2 = \emptyset$, a to jest wtedy i tylko wtedy gdy $Z = \emptyset$. Z definicji k-odcinka:

$$Z = \emptyset \subseteq U \subset U_1 \sqcup U_2 \subseteq Y,$$

co oznacza, że $U \in [Z, Y]_k$.

□

Z powyższego lematu wynika że k-odcinek właściwy w $\mathfrak{A}$ jest podprzestrzenią w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Zbadamy teraz k-odcinki równoległych.

Lemat 1.22. *Niech p będzie dowolną prostą w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, wówczas jeśli $U_1, U_2 \in p \cap [Z,Y]^*_k$ i $U_1 \neq U_2$, to $p \subseteq [Z,Y]^*_k$.*

DOWÓD. Niech p będzie prostą w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, podobnie jak w dowodzie powyżej oddzielnie rozpatrzymy przypadek, gdy p jest k-pękiem właściwym i gdy p to k-pęk równoległych.
1° Niech p będzie k-pękiem właściwym i $U_1, U_2 \in p \cap [Z,Y]^*_k$. Z 1.11 mamy $p = \overline{U_1, U_2}$, weźmy więc $U \in p$. Z definicji k-odcinka równoległego i założenia wynika

$$Z \subseteq\parallel U_1 \subset Y \quad \text{oraz} \quad Z \subseteq\parallel U_2 \subseteq Y. \tag{1.16}$$

Ponieważ U_1, U_2 są różnymi punktami na p, to $U_1 \sqcap U_2 \neq \emptyset$. Zatem z 1.16 $Z \subseteq\parallel U_1 \cap U_2$ i dalej:

$$Z \subseteq\parallel U_1 \cap U_2 \subset U \subset U_1 \sqcup U_2 \subset Y,$$

a więc $U \in [Z,Y]^*_k$

2° Niech p będzie k-pękiem równoległych i $U_1, U_2 \in p \cap [Z,Y]^*_k$, to z 1.11 mamy $p = \overline{U_1, U_2}$, weźmy teraz $U \in p$. To mamy, że $U \parallel U_1 \parallel U_2$, więc jeśli $U_i = u_i + S$ dla i=1,2, zaś U jest postaci $u + S$ to z faktu, że $U_1, U_2 \in [Z,Y]^*_k$ mamy:

$$z + T = Z \subseteq\parallel U_1 \subset Y \text{ oraz } Z \subseteq\parallel U_2 \subseteq Y.$$

Z określenia relacji $\subseteq\parallel$ wiemy, że $T \subseteq S$, a tym samym

$$Z \subseteq\parallel U \subseteq U_1 \sqcup U_2 \subseteq Y$$

czyli $U \in [Z,Y]^*_k$.

□

Możemy teraz sformułować ogólne twierdzenie.

Stwierdzenie 1.23. *Dowolny k-odcinek jest podprzestrzenią w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.*

DOWÓD. Bezpośredni wniosek z 1.22 oraz 1.21. □

Mówimy, że Podprzestrzeń $\mathcal{X}$ przestrzeni $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ jest podprzestrzenią odcinkową, gdy istnieją takie $Z, Y \in \mathcal{H}(\widehat{V})$ że $\mathcal{X} = [Z,Y]_k$ lub $\mathcal{X} = [Z,Y]^*_k$.

Fakt 1.24. *Niech Z, Y będą elementami $\mathcal{H}(V)$. Jeśli $\mathcal{X}$ jest niezdegenerowanym odcinkiem właściwym o wierzchołku Z i podstawie Y, to*

$$\bigsqcap \mathcal{X} = Z \qquad i \qquad \bigsqcup \mathcal{X} = Y.$$

Tak więc odcinki właściwe w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ jednoznacznie wyznaczają swoje końce. Jeśli $\mathcal{X}$ będzie niezdegenerowanym odcinkiem równoległych, to:

$$\bigsqcap \mathcal{X} = \emptyset \qquad \text{i} \qquad \bigsqcup \mathcal{X} = Y,$$

czyli możemy wyznaczyć podstawę odcinka równoległego $\mathcal{X}$, natomiast wierzchołek nie może być wyznaczony jednoznacznie (najwyżej z dokładnością do kierunku).

Dość łatwo zauważyć, że prawdziwe są również poniższe dwa fakty.

Fakt 1.25. *Niech $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]_k$, $i = 1, 2$ będą k-odcinkami właściwymi w przestrzeni grassmanna $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.*

(i) $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = [Z_1 \sqcup Z_2, Y_1 \sqcap Y_2]_k$

(ii) $\langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle = [Z_1 \sqcap Z_2, Y_1 \sqcup Y_2]_k$,

gdzie $\langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle$ jest najmniejszym k-odcinkiem właściwym zawierającym $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$.

Fakt 1.26. *Niech $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]^*_k$, $i = 1, 2$ będą k-odcinkami równoległych w przestrzeni grassmanna $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.*

(i) $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = [S + T, Y_1 \sqcap Y_2]^*_k$

(ii) $\langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle = [S \cap T, Y_1 \sqcup Y_2]^*_k$,

gdzie $\langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle$ jest najmniejszym k-odcinkiem równoległych zawierającym $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, natomiast S i T są to podprzestrzenie kierunkowe odpowiednio Z_1 i Z_2, czyli $Z_1 = z_1 + S$ zaś $Z_2 = z_2 + T$.

Zgodnie z ogólna teorią, podprzestrzeń kowymiaru 1 to maksymalna, właściwa podprzestrzeń. W przypadku odcinków właściwych $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]_k$, $i = 1, 2$ grassmannianu afinicznego $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ mówimy, że odcinek $\mathcal{X}_1$ jest *kowymiaru* 1 w odcinku $\mathcal{X}_2$ jeśli albo $Z_1 = Z_2$ i $Y_1 \subset Y_2$ oraz $\dim Y_1 + 1 = \dim Y_2$, albo $Z_1 \subset Z_2$ i $\dim Z_1 + 1 = \dim Z_2$ oraz $Y_1 = Y_2$, czyli gdy $\mathcal{X}_2$ jest maksymalnym i właściwym pododcinkiem $\mathcal{X}_1$.

W przypadku odcinka równoległych $\mathcal{X}_2 = [Z_2, Y_2]^*_k$ grassmannianu afinicznego $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ mówimy, że odcinek $\mathcal{X}_1$ jest *kowymiaru* 1 w odcinku $\mathcal{X}_2$ jeśli zachodzi jeden z trzech przypadków:

1. $\mathcal{X}_1 = [Z_1, Y_1]^*_k$, gdzie $Z_1 = Z_2$, $Y_1 \subset Y_2$ oraz $\dim Y_1 + 1 = \dim Y_2$,
2. $\mathcal{X}_1 = [Z_1, Y_1]^*_k$, gdzie $Z_2 \subseteq\parallel Z_1$ i $\dim Z_1 + 1 = \dim Z_2$ oraz $Y_1 = Y_2$,
3. $\mathcal{X}_1 = [Z_1, Y_1]_k$, gdzie $Z_1 \parallel Z_2 \subset Y_2 = Y_1$.

Mówimy, że odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są *komplementarne* lub *uzupełniają się* względem odcinka $\mathcal{X}$ jeśli $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \emptyset$ i $\langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle = \mathcal{X}$.

Rozdział 2

Pęki odcinków

W poniższym rozdziale zajmiemy się badaniem pęków k-odcinków w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Żeby określić taki pęk potrzebne jest pojęcie *współpękowych k-odcinków*. Dwa k-odcinki $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ są współpękowe, jeśli współpękowe są ich wierzchołki Z_1, Z_2 oraz podstawy Y_1, Y_2. Jeśli odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ są różne i współpękowe, to zbiór postaci

$$\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2} := \{[Z, Y]_k \colon Z \in \overline{Z_1, Z_2}, \quad Y \in \overline{Y_1, Y_2}, \quad Z \subseteq Y\} \tag{2.1}$$

nazywamy *quasi-pękiem k-odcinków właściwych.* Natomiast zbiór:

$$\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}^{\,*} := \{[Z, Y]^*_k \colon Z \in \overline{Z_1, Z_2}, \quad Y \in \overline{Y_1, Y_2}, \quad Z \subseteq\parallel Y\} \tag{2.2}$$

nazywamy *quasi-pękiem k-odcinków równoległych*

Mówimy krótko że G jest quasi-pękiem k-odcinków, gdy G jest quasi-pękiem k-odcinków właściwych lub równoległych. Mówimy, że quasi-pęk jest *nietrywialny* gdy zawiera co najmniej dwa elementy.

Fakt 2.1. *Niech $\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}^{\,*}$, będzie quasi pękiem k-odcinków równoległych, takim że $\overline{Z_1, Z_2}$ jest pękiem równoległych. Dla dowolnego $Z_0 \in \overline{Z_1, Z_2}$ mamy:*

$$\overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}^{\,*} = \{[Z_0, Y]^*_k \colon Y \in \overline{Y_1, Y_2},\ Z_0 \subseteq\parallel Y\}.$$

Niech

$$\Sigma := \Big\{[Z, Y]_k \colon Z \subseteq Y,\ Z, Y \in \mathcal{H}(\widehat{V})\Big\}, \tag{2.3}$$

będzie rodziną wszystkich k-odcinków właściwych w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Zaś zbiór

$$\Sigma^* := \Big\{[Z, Y]^*_k \colon Z \subseteq\parallel Y,\ Z, Y \in \mathcal{H}(\widehat{V})\Big\}, \tag{2.4}$$

będzie rodziną wszystkich k-odcinków równoległych w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.

Niech $\widehat{\Sigma} = \Sigma \cup \Sigma^*$, wówczas $\mathrm{Sub}(\mathsf{S})$ oznaczać będzie rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru S, gdzie $\mathsf{S} = \Sigma, \Sigma^*, \widehat{\Sigma}$. Określamy operację

$$\boxtimes \colon \widehat{\Sigma} \times \widehat{\Sigma} \longrightarrow \mathrm{Sub}(\Sigma)$$

w następujący sposób: niech $\mathcal{Z}, \mathcal{Y} \in \widehat{\Sigma}$ wówczas

$$\mathcal{Z} \boxtimes \mathcal{Y} = \Big\{ [Z, Y]_k \in \Sigma \colon Z \in \mathcal{Z}, Y \in \mathcal{Y} \Big\}. \tag{2.5}$$

Jeśli p, q są pękami, względnie p albo q jest singletonem podprzestrzeni $\mathfrak{A}$, to $p \boxtimes q$ jest quasi-pękiem k-odcinków właściwych. Na odwrót, każdy quasi-pęk można przedstawić jako $\boxtimes$ produkt pewnych k-odcinków.

Teraz określamy operację

$$\boxtimes^* \colon \widehat{\Sigma} \times \widehat{\Sigma} \longrightarrow \mathrm{Sub}(\Sigma^*)$$

w następujący sposób: niech $\mathcal{Z}, \mathcal{Y} \in \widehat{\Sigma}$ wówczas

$$\mathcal{Z} \boxtimes^* \mathcal{Y} = \Big\{ [Z, Y]_k^* \in \Sigma^* \colon Z \in \mathcal{Z}, Y \in \mathcal{Y} \Big\}. \tag{2.6}$$

Jeśli p, q są pękami, względnie p albo q jest singletonem podprzestrzeni $\mathfrak{A}$, to $p \boxtimes^* q$ jest quasi-pękiem k-odcinków równoległych. Na odwrót, każdy quasi-pęk k-odcinków równoległych można przedstawić jako $\boxtimes^*$ produkt pewnych k-odcinków.

2.1 Pęki minimalne

Definicja 2.2. Quasi-pęk G k-odcinków nazywamy *tranzytywnym*, gdy dla dowolnych dwóch, różnych k-odcinków należących do G, odcinki te rozpinają pęk G.

Ta własność przysługuje wyłącznie minimalnym, w sensie relacji bycia podzbiorem, quasi-pękom k-odcinków, a więc Twierdzenie 1.28 z pracy [9] pozostaje prawdziwe i zachodzi także dla quasi-pęków k-odcinków:

Fakt 2.3. *Quasi-pęk k-odcinków jest tranzytywny wtw., gdy jest minimalny.*

Twierdzenie 3.2 z pracy [8] dla quasi-pęków odcinków właściwych w kracie podprzestrzeni $\mathfrak{A}$, ma także zastosowanie dla quasi-pęków k-odcinków właściwych w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ i przytaczamy je tutaj w następującej postaci:

Fakt 2.4. *Niech $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ będzie quasi-pękiem k-odcinków właściwych w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Quasi-pęk G jest minimalny wtw., gdy zachodzi jeden z następujących warunków:*

(i) $Z_1 = Z_2$ *lub* $Y_1 = Y_2$,

(ii) $Z_1 \not\subseteq Y_2$ *i* $Z_2 \not\subseteq Y_1$.

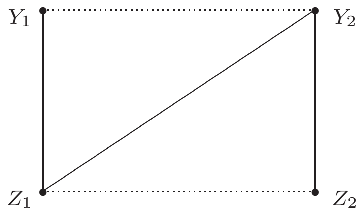
Twierdzenie 2.5. *Niech $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}^{\,*}$ będzie quasi-pękiem k-odcinków równoległych w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Quasi-pęk G jest minimalny wtw., gdy zachodzi jeden z następujących warunków:*

(i) $Z_1 = Z_2$ *lub* $Y_1 = Y_2$,

(ii) $Z_1 \not\subseteq\!\parallel Y_2$ *i* $Z_2 \not\subseteq\!\parallel Y_1$.

DOWÓD. Oznaczmy $p := \overline{Z_1, Z_2}$ i $q := \overline{Y_1, Y_2}$.

$\Rightarrow$: Załóżmy, że G jest minimalnym quasi-pękiem k-odcinków równoległych i nie zachodzi (i), tzn. $Z_1 \neq Z_2$ i $Y_1 \neq Y_2$. Przypuśćmy ponadto, że $Z_1 \subseteq\!\parallel Y_2$.



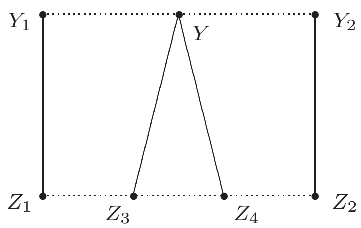
Rysunek 2.1

Zauważmy, że $\{Z_1\} \boxtimes^* q$, jak również $p \boxtimes^* \{Y_1\}$, są quasi-pękami k-odcinków równoległych zawartymi w G różnymi od G, co przeczy minimalności G. Analogicznie, w przypadku, gdy $Z_2 \subseteq\!\parallel Y_1$, uzyskamy sprzeczność. Wykazaliśmy zatem, że spełniony jest warunek (ii).

$\Leftarrow$: (i) Załóżmy, że $Z_1 = Z_2 = Z$. Wówczas $\mathsf{G} = \{Z\} \boxtimes^* q$. Niech $\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4 \in \mathsf{G}$ i $\mathcal{X}_3 \neq \mathcal{X}_4$. Zauważmy, że $Y_3, Y_4 \in q$ i $Y_3 \neq Y_4$, więc z 1.11 $q = \overline{Y_3, Y_4}$, a tym samym $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4}^*$, co oznacza, że G jest tranzytywny. Z 2.3 quasi-pęk G jest minimalny.

W sytuacji, gdy $Y_1 = Y_2$ dowód biegnie analogicznie.

(ii) Niech $\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4 \in \mathsf{G}$ i $\mathcal{X}_3 \neq \mathcal{X}_4$. Pokażemy, że $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4}^*$. Ponieważ $\mathsf{G} = p \boxtimes^* q$, wystarczy więc dowieść równości $p = \overline{Z_3, Z_4}$ i $q = \overline{Y_3, Y_4}$. Z uwagi na to, że $Z_3, Z_4 \in p$ oraz $Y_3, Y_4 \in q$ dowód sprowadza się do wykazania różności $Z_3 \neq Z_4$ i $Y_3 \neq Y_4$.



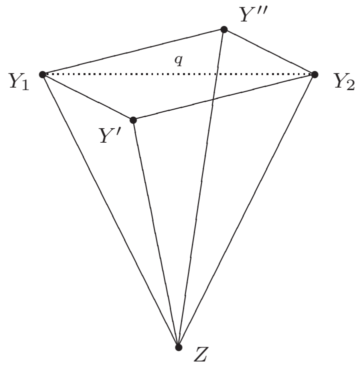
Rysunek 2.2

Przypuśćmy, że $Y_3 = Y_4 = Y$, to wówczas zgodnie z 1.20 $Z_3 \nparallel Z_4$, a tym samym $Z_1 \neq Z_2$ bo założyliśmy że $\mathcal{X}_3 \neq \mathcal{X}_4$. Tak więc z 1.11 mamy $p = \overline{Z_3, Z_4}$, a ponieważ $Z_3, Z_4 \subseteq\!\parallel Y$ to z 1.13(ii) również $Z_1, Z_2 \subseteq\!\parallel Y$. Jeśli $Y_1 = Y$, to $Z_2 \subseteq\!\parallel Y_1$ i otrzymujemy sprzeczność z założeniami. Gdy $Y_1 \neq Y$, to $q = \overline{Y_1, Y}$. Ponadto $Z_1 \subseteq\!\parallel Y_1, Y$ i z 1.13(i) dostaniemy $Z_1 \subseteq\!\parallel Y_2$, co przeczy założeniom. W stosunku do pary Y, Y_2 można zastosować analogiczne rozumowanie i otrzymać sprzeczność. Ostatecznie, nasze przypuszczenie jest fałszywe, czyli $Y_3 \neq Y_4$.

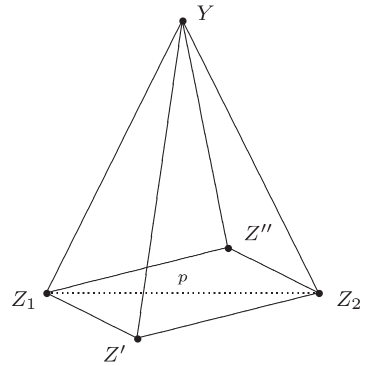
Dualnie można dowieść, że $Z_3 \neq Z_4$. $\square$

Definicja 2.6. Niech $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ będzie nietrywialnym quasi-pękiem k-odcinków właściwych w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Jeśli quasi-pęk G jest minimalny, to nazywamy go *pękiem k-odcinków właściwych* w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.

Jeśli $Z_1 = Z_2$, to G nazywamy *pękiem właściwym k-odcinków typu gwiazda* (rys. 2.3), jeśli natomiast $Y_1 = Y_2$, to G nazywamy *pękiem właściwym k-odcinków typu układ* (rys. 2.4). Mówimy krótko, że G jest pękiem k-odcinków właściwych, gdy G jest pękiem k-odcinków właściwym typu gwiazda lub układ.



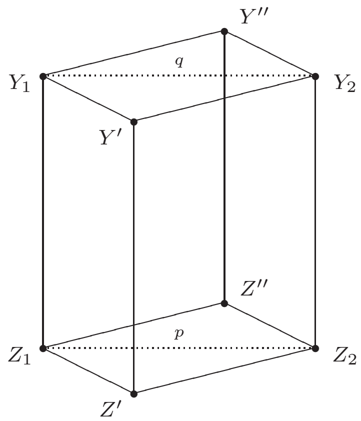
Rysunek 2.3



Rysunek 2.4

Odcinek $\mathcal{X}' = \bigcap \mathsf{G}$ nazywamy *wierzchołkiem* pęku k-odcinków G, natomiast odcinek $\mathcal{X}'' = \langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle$ jego *podstawą*.

Pęk k-odcinków G nazywamy *waflem* jeśli $Z_1 \not\subseteq Y_2$ i $Z_2 \not\subseteq Y_1$ (rys. 2.5).



Rysunek 2.5

Fakt 2.7. *W każdym pęku k-odcinków $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ zachodzą następujące związki*

$$Z' \subseteq Y', \qquad Z'' \subseteq Y''.$$

Gdy G jest waflem, to ponadto

$$\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \emptyset, \qquad Z_i \not\subseteq Y', \qquad Z'' \not\subseteq Y_i, \qquad Z'' \not\subseteq Y'.$$

Definicja 2.8. Quasi-pęk $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}^*$ k-odcinków równoległych w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ nazywamy *pękiem odcinków równoległych*, gdy G jest nietrywialny i minimalny.

Mówimy, że pęk G jest typu *gwiazda*, gdy $Z_1 = Z_2$, natomiast G jest typu *układ*, gdy $Y_1 = Y_2$. W przypadku, gdy $Z_1 \not\subseteq\| Y_2$ i $Z_2 \not\subseteq\| Y_1$ to G nazywamy *waflem*.

Ponieważ relacja $\subseteq\|$ nie jest relacją antysymetryczną, nie jest tym samym relacją porządku i dlatego w przypadku pęków k-odcinków równoległych diagramy kratowe nie mają sensu.

2.2 Klasyfikacja pęków odcinków

Każdemu quasi-pękowi $\mathsf{G} = p \boxtimes q = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ k-odcinków właściwych grassmannianiu afinicznego $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ przypisujemy typ $\xi\backslash\eta$, w ten sposób, że jeśli $p = \overline{Z_1, Z_2}$ jest pękiem właściwym w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, to w miejscu ξ piszemy pw, itd. zgodnie z tabelą 2.1. W miejscu η wpisujemy typ $q = \overline{Y_1, Y_2}$ określony w analogiczny sposób jak dla p.

ξ	p
pw	pęk właściwy w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$, nie będący prostą
pr	pęk równoległych w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$, nie będący prostą
s	singleton podprzestrzeni $\mathfrak{A}$, różny od $\{\emptyset\}$
l	prosta w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$
0	$\{\emptyset\}$

Tabela 2.1: Możliwe wartości występujące w nazwie typu pęku k-odcinków.

2.2.1 Klasyfikacja pęków odcinków właściwych

Pęk typu 0\s

Gdy G jest quasi-pękiem k-odcinków właściwych tego typu, jak łatwo zauważyć:

$$\mathsf{G} = \{[\emptyset, Y]_k\}. \tag{2.7}$$

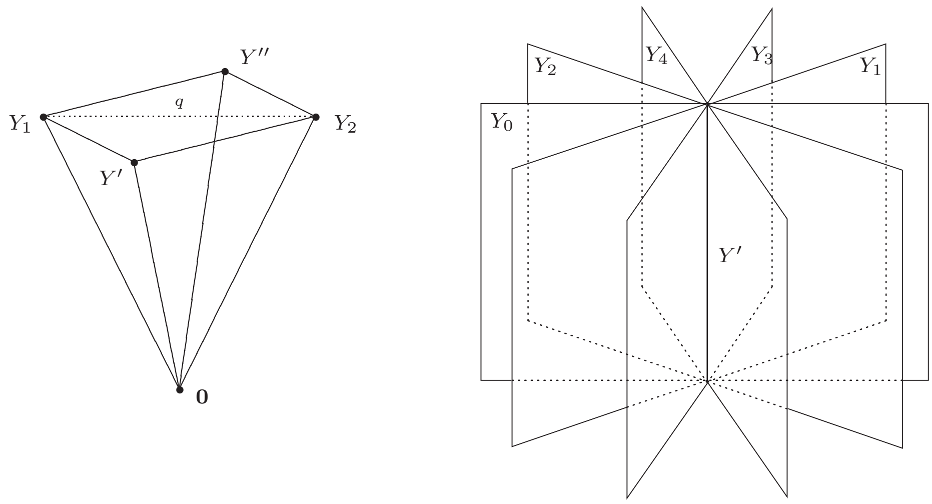
Tak więc G składa się tylko z jednego k-odcinka, co wyklucza go z dalszych rozważań.

Pęk typu 0\pw

W tym przypadku G jest $\boxtimes$ produktem singletonu zbioru pustego $p = \{\emptyset\}$ z pękiem właściwym $q = \overline{Y_1, Y_2}$. Zatem G będzie zbiorem postaci:

$$\mathsf{G} = \{[\emptyset, Y]_k\colon\ Y \in \overline{Y_1, Y_2}\}. \tag{2.8}$$

Ponieważ $Z_1 = Z_2 = \{\emptyset\}$, więc z faktu 2.4 o minimalności pęków k-odcinków właściwych wiemy, że G jest pękiem minimalnym. Jeśli odcinek $\mathcal{X} \in \mathsf{G}$ to zgodnie z (2.8) $\mathcal{X} = [\emptyset, Y]_k$ i w jego skład wchodzą wszystkie k-wymiarowe podprzestrzenie zawarte w Y. Jeśli przyjmiemy, że Y_1 i Y_2 są płaszczyznami i $k = 2$, to wówczas odcinek $\mathcal{X}$ będzie składał się z wszystkich prostych zawartych w płaszczyźnie $Y \in \overline{Y_1, Y_2}$. Opisaną sytuację przedstawiono na rysunku 2.1.



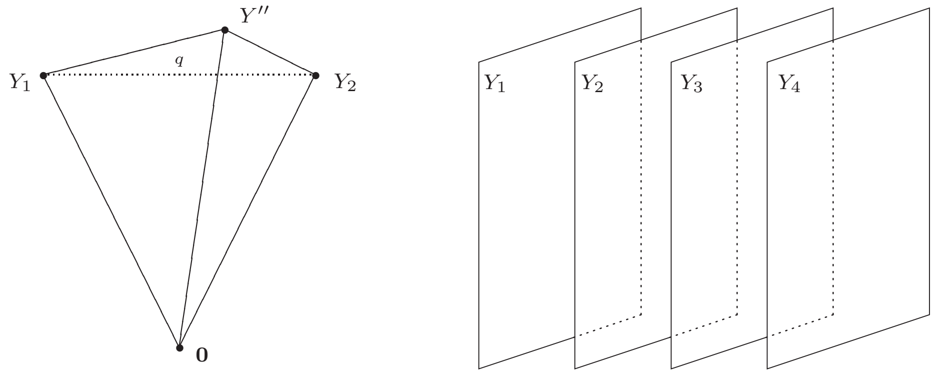
Rysunek 2.1: Pęk k-odcinków typu 0\pw.

Pęk typu 0\pr

Niech $\mathsf{G} = p \boxtimes q$ będzie quasi-pękiem k-odcinków właściwych typu $\mathbf{0}$\pr. Wówczas $p = \{\emptyset\}$, a q to pęk równoległych rozpięty przez Y_1 i Y_2. Z (2.1) G jest postaci:

$$\mathsf{G} = \{[\emptyset, Y]_k\colon\ Y \in \overline{Y_1, Y_2}\} = \{[\emptyset, Y]_k\colon\ Y \in \mathbf{p}^*(Y_1, Y_2 \sqcup Y_2)\}. \tag{2.9}$$

Ponieważ $Z_1 = Z_2 = \emptyset$, więc z 2.4 wiemy, że G jest minimalny. Odcinek należący do G będzie miał podobną budowę do odcinka z pęku typu $\mathbf{0}$\pw. Również będzie składał się z wszystkich k-wymiarowych podprzestrzeni zawartych w Y, tylko w tym przypadku Y należy do pęku równoległych utworzonego przez Y_1 i Y_2. Jeśli przyjmiemy, że Y_1 i Y_2 to dwie różne i równoległe płaszczyzny oraz $k = 1$, to odcinek z pęku G składa się z wszystkich prostych zawartych w płaszczyźnie $Y \parallel Y_1, Y_2$. Opisany pęk G przedstawiono na rysunku 2.2.



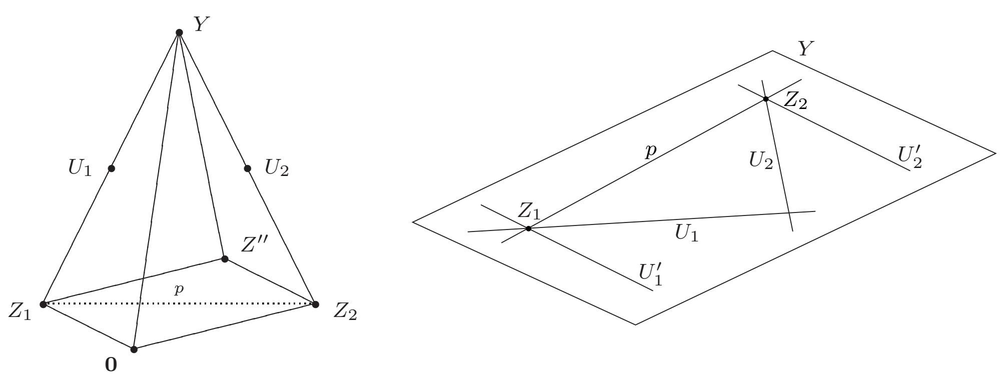
Rysunek 2.2: Pęk k-odcinków typu 0\pr.

Pęk typu l\s

Jeśli $\mathsf{G} = p \boxtimes q$ jest quasi-pękiem k-odcinków właściwych wymienionego typu. Wówczas $p = \overline{Z_1, Z_2}$, gdzie Z_1, Z_2 to dwa różne punkty przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$, zaś $q = \{Y\}$. Z określenia pęku k-odcinków właściwych G jest postaci:

$$\mathsf{G} = \{[Z, Y]_k \colon\ Z \in \overline{Z_1, Z_2}\ Z \subseteq Y\}. \tag{2.10}$$

Ponieważ $Y_1 = Y_2 = Y$, więc z 2.4 G jest minimalny. Odcinek $\mathcal{X} = [Z, Y]_k$ należący do G, będzie składał się z k-wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni Y zawierających punkt Z z prostej $\overline{Z_1, Z_2}$. W przypadku, gdy Y jest płaszczyzną, zaś Z_1 i Z_2 są różnymi punktami na tej płaszczyźnie. To dla $k = 1$ odcinek $\mathcal{X}$ składa się z prostych przechodzących przez punkt Z i zawartych w Y. Dodatkowo można zauważyć, że prosta $\overline{Z_1, Z_2}$ [1] będzie wchodziła w skład każdego k-odcinka z pęku G. Opisaną sytuację przedstawiono na rysunku 2.3.



Rysunek 2.3: Pęk k-odcinków typu l\s.

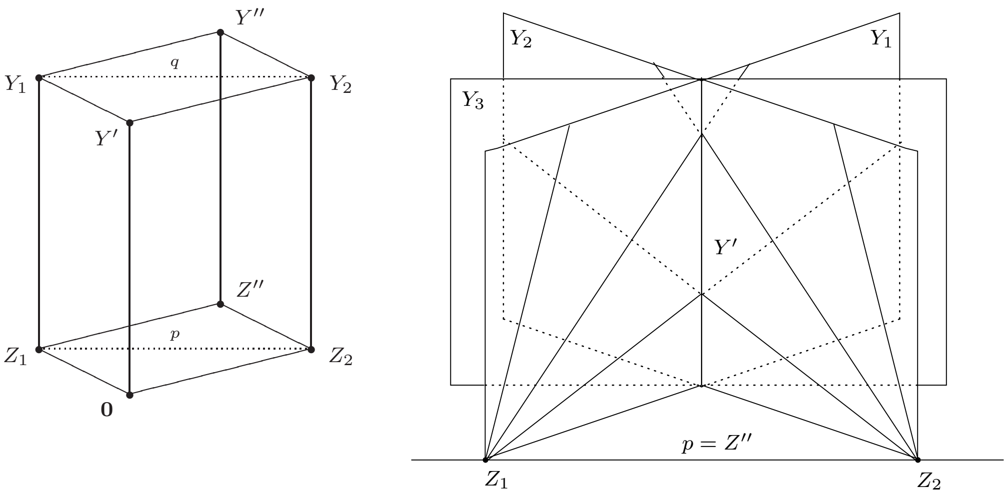
[1] Prostą $\overline{Z_1, Z_2}$ można utożsamiać z podprzestrzenią Z''.

Pęk typu l\pw

Dla quasi-pęku $\mathsf{G} = p \boxtimes q$ k-odcinków właściwych typu l\pw, p jest prostą rozpiętą przez dwa różne punkty Z_1, Z_2, zaś q jest pękiem właściwym. Quasi-pęk G będzie miał postać:

$$\mathsf{G} = \{[Z, Y]_k \colon\ Z \in \overline{Z_1, Z_2},\ Y \in \overline{Y_1, Y_2},\ Z \subseteq Y\}. \tag{2.11}$$

Z 2.4 aby G był quasi-pękiem minimalnym to $Z_1 \nsubseteq Y_2$ i $Z_2 \nsubseteq Y_1$. Czyli prosta $\overline{Z_1, Z_2}$ nie może zawierać się w żadnym elemencie z pęku q. Przyjmijmy, że Y_1 i Y_2 są sąsiednimi płaszczyznami oraz $k = 1$. Wówczas k-odcinek $\mathcal{X} = [Z, Y]_k$ z pęku G, będzie składał się z prostych przechodzących przez punkt Z i zawartych w płaszczyźnie Y. Przykład ten przedstawiono na rysunku 2.4. Należy zauważyć, że dla płaszczyzny Y_3 (na tym rysunku), równoległej do prostej $\overline{Z_1, Z_2}$, nie istnieje punkt $Z_3 \in \overline{Z_1, Z_2}$ taki, że $Z_3 \subseteq Y_3$.



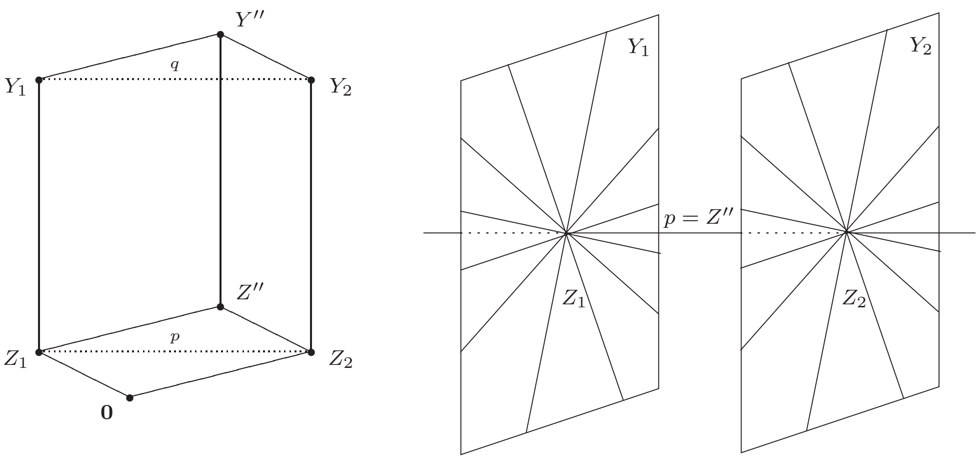
Rysunek 2.4: Pęk k-odcinków typu l\pw.

Pęk typu l\pr

Przyjmijmy że $\mathsf{G} = p \boxtimes q$ jest quasi-pękiem k-odcinków właściwych typu l\pr. Wówczas p będzie prostą jak w poprzednim przypadku, zaś q to pęk równoległych. Z (2.1) G ma postać:

$$\mathsf{G} = \{[Z, Y]_k \colon\ Z \in \overline{Z_1, Z_2},\ Y \in \overline{Y_1, Y_2},\ Z \subseteq Y\}. \tag{2.12}$$

Z faktu 2.4 quasi-pęk G będzie minimalny wtw., gdy $Z_1 \nsubseteq Y_2$ i $Z_2 \nsubseteq Y_1$. Przyjmijmy, że Y_1 i Y_2 to dwie różne i równoległe płaszczyzny i $k = 1$. Wtedy k-odcinek $\mathcal{X} = [Z, Y]_k$ należący do G, będzie składał się z prostych przechodzących przez punkt Z i zawartych w płaszczyźnie $Y \parallel Y_1, Y_2$. Przykład ten przedstawiono na rysunku 2.4. W tym typie pęku dla każdej płaszczyzny Y z pęku q, będzie istniał pewien punkt Z należący do p taki, że $Z \subseteq Y$.



Rysunek 2.5: Pęk k-odcinków typu l\pr.

Pęk typu s\s

Zauważmy, że quasi-pęk G tego typu, tak samo jak quasi-pęk typu $\mathbf{0}$\s, jest jednoelementowy, dokładnie:

$$\mathsf{G} = \{[Z, Y]_k\}. \tag{2.13}$$

W dalszej części pracy zajmujemy się tylko pękami i pomijamy trywialne quasi-pęki.

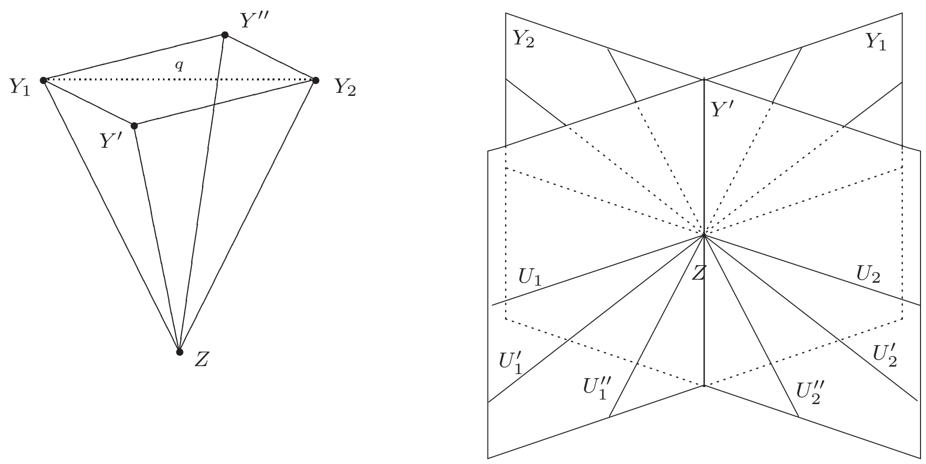
Pęk typu s\pw

Weźmy quasi-pęk $\mathsf{G} = p \boxtimes q$ k-odcinków właściwych typu s\pw. Wtedy p jest singletonem niepustej podprzestrzeni $\mathfrak{A}$, natomiast $q = \overline{Y_1, Y_2}$ jest pękiem właściwym. Zatem G jest postaci:

$$\mathsf{G} = \{[Z, Y]_k\colon\ Y \in \overline{Y_1, Y_2},\ Z \subseteq Y\} \tag{2.14}$$

Z faktu 2.4 o minimalności pęków k-odcinków właściwych wiemy, że G jest quasi-pękiem minimalnym, gdyż $Z_1 = Z_2 = Z$.

Przykładowy pęk k-odcinków tego typu został przedstawiony na rysunku 2.6. Przyjmujemy tutaj, że $k = 1$, p jest singletonem punktu Z w $\mathfrak{A}$, zaś q jest wyznaczony przez dwie przecinające się płaszczyzny Y_1 i Y_2. Punkt Z leży w części wspólnej obu płaszczyzn. Odcinek wchodzący w skład pęku G, jest zbiorem prostych przechodzących przez Z i leżących w pewnej płaszczyźnie Y należącej do q.



Rysunek 2.6: Pęk k-odcinków typu s\pw.

Pęk typu s\pr

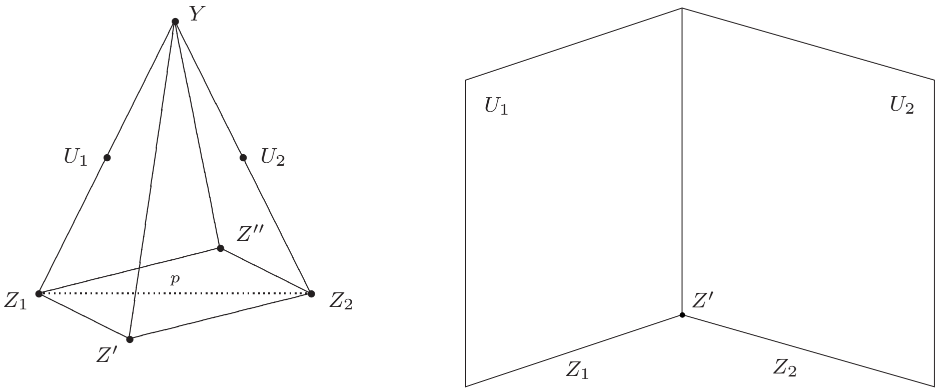
Ten rodzaj pęku k-odcinków nie występuje w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Gdyby $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}$ był quasi-pękiem tego typu, to $p = \{Z\}$ dla pewnej niepustej podprzestrzeni Z. Wówczas $\mathcal{X}_i = [Z, Y_i]_k$ dla $i = 1, 2$. Z definicji k-odcinka właściwego mamy, że $Z \subseteq Y_1, Y_2$ i tym samym $Z \subseteq Y_1 \sqcap Y_2$. Ponieważ $Y_1 \parallel Y_2$, więc ich przekrój jest zbiorem pustym. Otrzymujemy zatem sprzeczność.

Pęk typu pw\s

Dla tego typu quasi-pęków k-odcinków właściwych p jest pękiem właściwym, zaś $q = \{Y\}$. Zgodnie więc z 2.4 G jest pękiem minimalnym. Pęk G ma postać:

$$\mathsf{G} = \{[Z, Y]_k \colon Z \in \overline{Z_1, Z_2},\ Z \subseteq Y\} \tag{2.15}$$

Przykładowy pęk k-odcinków typu pw\s został przedstawiony na rysunku 2.7. Za Y przyjęliśmy trójwymiarową przestrzeń, a za Z_1, Z_2 dwie przecinające się proste, leżące w Y. Odcinek $\mathcal{X}$ indeksu $k = 2$ należący do G, składa się z płaszczyzn przecinających się w pewnej prostej $Z \in \overline{Z_1, Z_2}$. Należy zanotować, że każda prosta z p zawarta jest w płaszczyźnie Z'', więc Z'' będzie wchodził w skład każdego k-odcinka z G.



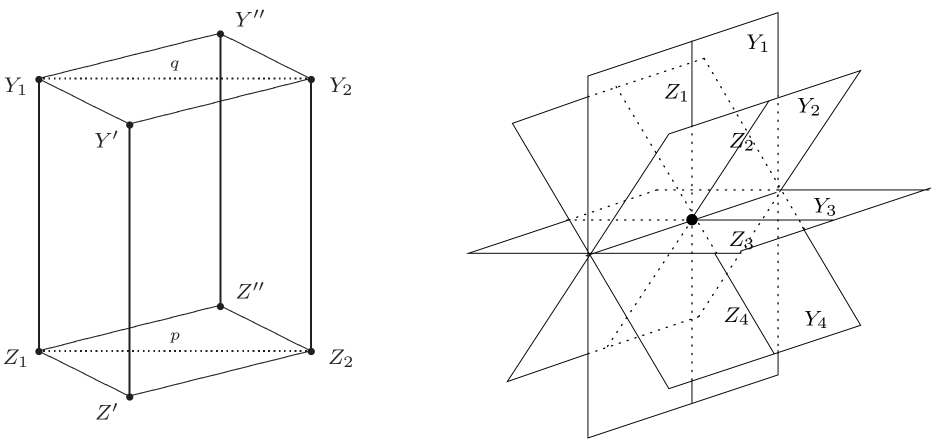
Rysunek 2.7: Pęk odcinków typu pw\s.

Pęk typu pw\pw

Dla tego typu quasi-pęku p i q są pękami właściwymi, wyznaczonymi odpowiednio przez Z_1, Z_2 oraz Y_1, Y_2. Z faktu 2.4, aby G był minimalny to musi być $Z_1 \nsubseteq Y_2$ oraz $Z_2 \nsubseteq Y_1$. Pęk G jest zbiorem postaci:

$$\mathsf{G} = \{[Z, Y]_k \colon Z \in \overline{Z_1, Z_2}, Y \in \overline{Y_1, Y_2},\ Z \subseteq Y\} \tag{2.16}$$

Na rysunku 2.7 zamieszczono przykład takiego pęku k-odcinków właściwych. Nasze Z_1, Z_2 są prostymi wyznaczającymi pęk prostych, natomiast Y_1 i Y_2 to płaszczyzny zawierające odpowiednio Z_1 i Z_2. Odcinki będą postaci $[Z, Y]_k$, gdzie $Z \in p$ jest prostą zawartą w płaszczyźnie $Y \in q$. Jeśli $k = 1$ to $[Z, Y]_k = \{Z\}$, gdy $k = 2$ to $[Z, Y]_k = \{Y\}$.



Rysunek 2.8: Pęk k-odcinków typu pw\pw.

Pęk typu pw\pr

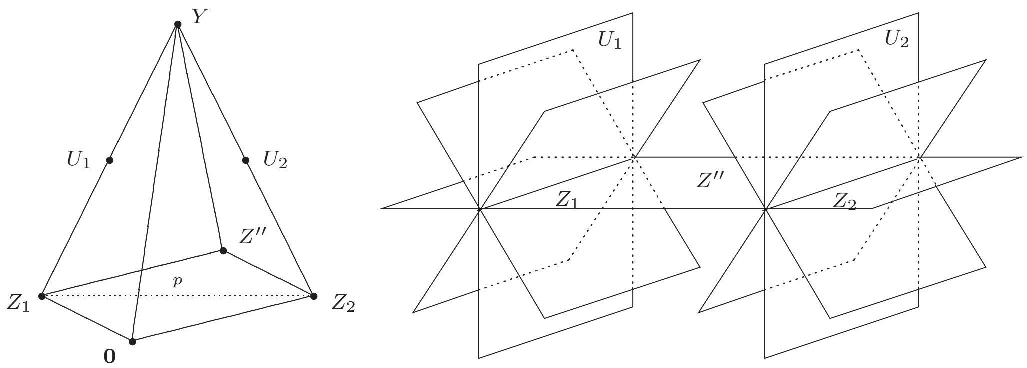
Pęk k-odcinków tego typu nie istnieje w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Gdyby istniał to p byłby pękiem właściwym $\overline{Z_1, Z_2}$, który nie jest prostą. Zatem $Z' \neq \emptyset$ takie, że $Z' \subseteq Z_1, Z_2$. Ponieważ $q = \overline{Y_1, Y_2}$ jest pękiem równoległych, więc $Y_1 \parallel Y_2$ i ich przekrój jest zbiorem pustym. Ostatecznie mamy następujące inkluzje $Z_i \subseteq Y_i$ dla $i = 1, 2$ i w konsekwencji $Z' \subseteq Y_1 \sqcap Y_2 = \emptyset$, co jest niemożliwe. Dlatego nie ma pęków k-odcinków właściwych typu pw\pr.

Pęk typu pr\s

W przypadku gdy $\mathsf{G} = p \boxtimes q$ jest quasi-pękiem typu pr\s, to zgodnie z tabelą 2.1 p jest pękiem równoległych zaś $q = \{Y\}$. Ponieważ $Y_1 = Y_2 = Y$ więc z 2.4 G będzie minimalnym pękiem k-odcinków właściwych. Pęk G ma postać:

$$\mathsf{G} = \{[Z, Y]_k \colon Z \in \overline{Z_1, Z_2},\ Z \subseteq Y\} \tag{2.17}$$

Przyjmijmy, że Y jest trójwymiarową przestrzenią, zaś Z_1, Z_2 są różnymi i równoległymi prostymi zawartymi w Y. Wtedy k-odcinek $[Z, Y]_k \in \mathsf{G}$ dla $k = 2$ składa się z płaszczyzn przechodzących przez Z i zawartych Y. W tej sytuacji należy zwrócić uwagę, że płaszczyzna Z'' znajdzie się w każdym k-odcinku z pęku G. W przypadku, gdy $k = 1$ odcinek $[Z, Y]_k$ będzie składał się tylko z prostej Z. Sytuację dla $k = 2$ przedstawia poniższy rysunek.



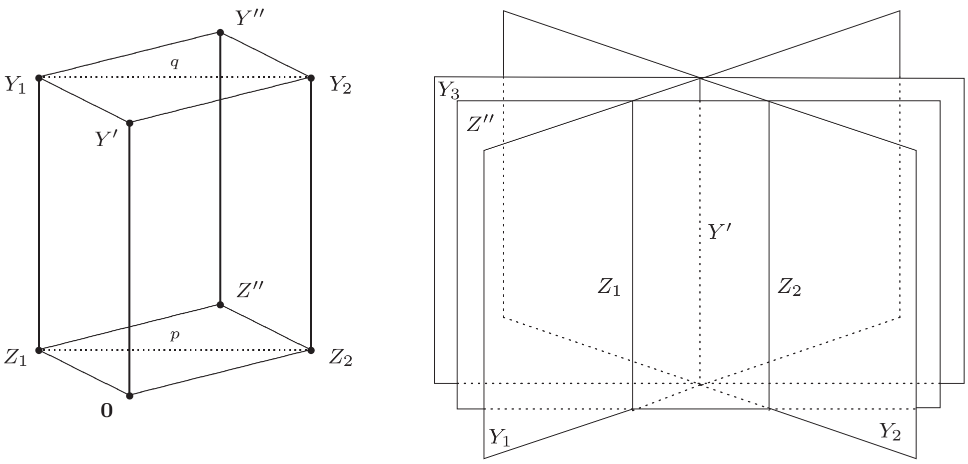
Rysunek 2.9: Pęk k-odcinków typu pr\s.

Pęk typu pr\pw

Niech $\mathsf{G} = p \boxtimes q$, będzie quasi-pękiem tego typu. Wówczas p jest pękiem równoległych, zaś q pękiem właściwym. Ponieważ $Z_1 \neq Z_2$ oraz $Y_1 \neq Y_2$, zatem musi zachodzić warunek (ii) faktu 2.4, żeby G był minimalnym pękiem k-odcinków właściwych. Pęk G będzie postaci:

$$\mathsf{G} = \{[Z, Y]_k \colon Z \in \overline{Z_1, Z_2}, Y \in \overline{Y_1, Y_2}\ Z \subseteq Y\} \tag{2.18}$$

Przykładowy pęk k-odcinków został przedstawiony na rysunku 2.10. Za Z_1 i Z_2 przyjęliśmy proste równoległe, które są odpowiednio zawarte w płaszczyznach Y_1 i Y_2. Dla $k = 2$ odcinek $[Z, Y]_k \in \mathsf{G}$, będzie składał się z samej płaszczyzny Y, a w przypadku, gdy $k = 1$ to k-odcinek $[Z, Y]_k = \{Z\}$. Należy jeszcze zauważyć, że dla płaszczyzny $Y_3 \in q$ takiej, że $Y_3 \parallel Z''$ nie znajdziemy takiej prostej Z_3 z pęku p, by $Z_3 \subseteq Y_3$.



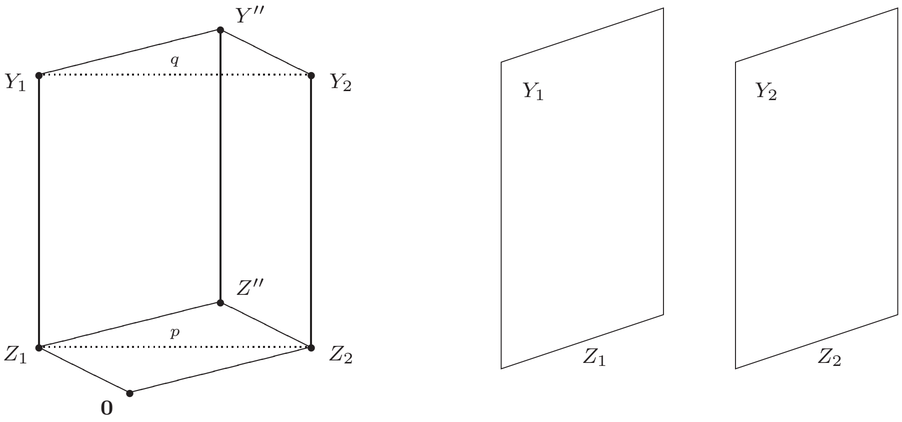
Rysunek 2.10: Pęk k-odcinków typu pr\pw.

Pęk typu pr\pr

Jeśli $\mathsf{G} = p \boxtimes q$ jest quasi-pękiem k-odcinków typu pr\pr, to p i q są pękami równoległych. Ponieważ Z_1, Z_2 rozpinają pęk p, więc z 1.8 wiemy, że $Z_1 \neq Z_2$. Podobnie $Y_1 \neq Y_2$, gdyż rozpinają pęk równoległych q. Dlatego z faktu 2.4 musi zachodzić $Z_1 \nsubseteq Y_2$ i $Z_2 \nsubseteq Y_1$, żeby G był minimalny. Pęk G to zbiór:

$$\mathsf{G} = \{[Z, Y]_k \colon Z \in \overline{Z_1, Z_2}, Y \in \overline{Y_1, Y_2}\ Z \subseteq Y\} \tag{2.19}$$

Do przykładu weźmy dwie równoległe proste Z_1 i Z_2 oraz dwie równoległe płaszczyzny Y_1 i Y_2, takie że $Z_i \subseteq Y_i$ dla $i = 1, 2$. Widać, że $\overline{Z_1, Z_2}$ będzie pękiem równoległych, tak jak i $\overline{Y_1, Y_2}$. Zatem pęk $\mathsf{G} = \overline{Z_1, Z_2} \boxtimes \overline{Y_1, Y_2}$ będzie typu pr\pr. Weźmy teraz $[Z, Y]_k \in \mathsf{G}$, wówczas $[Z, Y]_k = \{Z\}$ dla $k = 1$, natomiast gdy $k = 2$ to k-odcinek $[Z, Y]_k$ będzie składał się z samej płaszczyzny Y. Ten przykład przedstawia rysunek 2.11.



Rysunek 2.11: Pęk k-odcinków typu pr\pr.

Z powyżej przeprowadzonej analizy wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.9. *Tabela* 2.2 *przedstawia wszystkie możliwe typy pęków k-odcinków właściwych w* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.

$\xi\backslash\eta$	pw	pr	s
pw	wafel	$\times$	pęk wł. typu układ
pr	wafel (afiniczny)^2	wafel	pęk wł. typu układ
l	wafel (afiniczny)	wafel	pęk wł. typu układ
s	pęk wł. typu gwiazda	$\times$	$\times$
0	pęk wł. typu gwiazda	pęk wł. typu gwiazda	$\times$

Tabela 2.2: Klasyfikacja pęków k-odcinków właściwych w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.

Przyjrzymy się teraz pękom k-odcinków równoległych.

2.2.2 Klasyfikacja pęków odcinków równoległych

Każdemu quasi-pękowi $\mathsf{G} = \overline{Z_1, Z_2} \boxtimes^* \overline{Y_1, Y_2} = p \boxtimes^* q$, k-odcinków równoległych grassmannianu afinicznego $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ przypisujemy typ $\xi\backslash^*\eta$. Za ξ i η podstawiamy wartości z tabelki 2.1, w analogiczny sposób jak dla pęków k-odcinków właściwych. Należy zauważyć, że pomijamy wartości $\mathbf{0}$ oraz l, ponieważ rozważamy tylko k-odcinki równoległych, które jako wierzchołek posiadają co najmniej prostą w przestrzenie afinicznej $\mathfrak{A}$. Jest to następstwem wzoru (1.13).

Pęk typu $\mathrm{s}\setminus^{*}\mathrm{s}$

Niech G będzie quasi-pękiem k-odcinków równoległych typu $\mathrm{s}\setminus^{*}\mathrm{s}$. Wówczas z (2.2) otrzymamy:

$$\mathsf{G} = \{[Z,Y]^*_k\}$$

Tak więc G składa się z jednego k-odcinka równoległych. Jest tym samym trywialnym pękiem k-odcinków, co wyklucza go z dalszych rozważań.

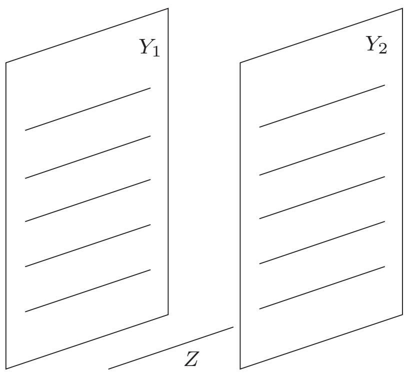
Pęk typu $\mathrm{s}\setminus^{*}\mathrm{pr}$

W tym przypadku $p = \{Z\}$ dla pewnej niepustej podprzestrzeni Z, zaś $q = \overline{Y_1, Y_2}$ to pęk równoległych. Quasi-pęk G to zbiór postaci:

$$\mathsf{G} = \{[Z,Y]^*_k\colon\ Y \in \overline{Y_1, Y_2},\ Z \subseteq\parallel Y\}. \tag{2.20}$$

Ponieważ $Z_1 = Z_2 = Z$, więc z twierdzenia 2.5 wiemy, że G jest minimalny. Aby G był niepusty, musi zachodzić $Z \subseteq\parallel Y_0 \in q$. Jeśli spełniony jest ten warunek, to wówczas dla każdego $Y \in \overline{Y_1, Y_2}$, mamy $Z \subseteq\parallel Y$.

Przyjmijmy, że Y_1 i Y_2 są płaszczyznami, zaś Z jest prostą oczywiście taką, że $Z \subseteq\parallel Y_1, Y_2$, a $k = 1$. Wówczas k-odcinek $\mathcal{X} \in \mathsf{G}$, będzie składał się ze wszystkich prostych zawartych w płaszczyźnie $Y \in \overline{Y_1, Y_2}$ i równoległych do Z. Przedstawiono to na rysunku 2.12.



Rysunek 2.12: Pęk k-odcinków typu $\mathrm{s}\setminus^{*}\mathrm{pr}$.

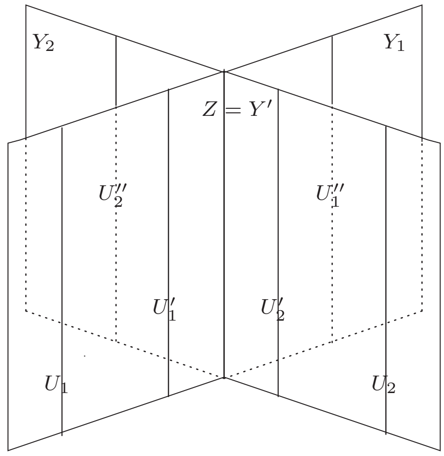
Pęk typu $\mathrm{s}\setminus^{*}\mathrm{pw}$

Niech $\mathsf{G} = p \boxtimes^* q$ będzie quasi-pękiem k-odcinków równoległych typu $\mathrm{s}\setminus^{*}\mathrm{pw}$. Wówczas $p = \{Z\}$, natomiast $q = \overline{Y_1, Y_2}$ jest pękiem właściwym. Z określenia quasi-pęku k-odcinków równoległych G jest postaci:

$$\mathsf{G} = \{[Z,Y]^*_k\colon\ Y \in \overline{Y_1, Y_2},\ Z \subseteq\parallel Y\}. \tag{2.21}$$

Ponieważ $Z_1 = Z_2 = Z$, więc z 2.5 G jest minimalny. Aby pęk typu $\mathrm{s}\setminus^{*}\mathrm{pw}$ nie był trywialnym pękiem k-odcinków równoległych, to Z musi być zawarte równolegle przynajmniej w dwóch podprzestrzeniach z q. Nie zmniejszając ogólności przyjmijmy, że $Z \subseteq\parallel Y_1, Y_2$. Wówczas $Z \subseteq\parallel Y_1 \sqcap Y_2 = Y'$, a to już daje, że $Z \subseteq\parallel Y$ dla każdego Y należącego do $\overline{Y_1, Y_2}$.

Rozpatrzmy przypadek, gdy Y_1, Y_2 są płaszczyznami wyznaczającymi pęk właściwy, a Z jest prostą równoległą do Y'. W szczególności Z może być równe Y'. W wypadku gdy $k = 1$, odcinek należący do G będzie składał się z wszystkich prostych równoległych do Z (ale także i do Y'), leżących w pewnej płaszczyźnie Y z pęku q. Należy zwrócić uwagę, że prosta Y' będzie wchodziła w skład każdego k-odcinka równoległych z G. Opisaną sytuację przedstawiono na rysunku 2.13.



Rysunek 2.13: Pęk k-odcinków typu s*pw.

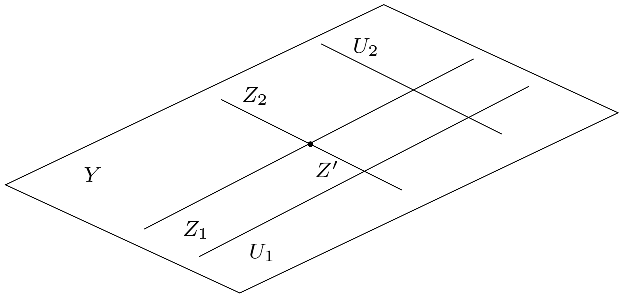
Pęk typu pw*s

W tym typie quasi-pęku k-odcinków równoległych p jest pękiem właściwym, zaś $q = \{Y\}$. Ponieważ $Y_1 = Y_2 = Y$, to z 2.5 G jest minimalnym pękiem k-odcinków równoległych. G ma postać:

$$\mathsf{G} = \{[Z, Y]_k^* \colon Z \in \overline{Z_1, Z_2},\ Z \subseteq\parallel Y\} \tag{2.22}$$

Aby pęk G nie był trywialnym pękiem k-odcinków równoległych, to $Z_1 \subseteq\parallel Y$ oraz $Z_2 \subseteq\parallel Y$. Wówczas z 1.13(ii) dla każdego $Z \in p$ zachodzi $Z \subseteq\parallel Y$. Można więc przyjąć, że pęk typu pw*s jest nietrywialny, tylko wtedy gdy $Z'' \subseteq\parallel Y$.

Do przykładu weźmy za Z_1, Z_2 proste wyznaczające pęk właściwy, a za Y płaszczyznę równoległą do Z''. W szczególnym przypadku Y może być równe Z''. Odcinek indeksu $k = 1$ należący do G będzie składał się prostych równoległych do pewnej prostej Z z pęku p i leżących na płaszczyźnie Y. Przykład ten przedstawiono na rysunku 2.14.



Rysunek 2.14: Pęk k-odcinków typu pw$\backslash^*$s.

Pęk typu pw$\backslash^*$pr

Załóżmy, że $\mathsf{G} = \overline{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2}^*$ jest quasi-pękiem typu pw$\backslash^*$pr. Z definicji k-odcinka równoległych wiemy, że $Z_1 \subseteq\parallel Y_1$ oraz $Z_2 \subseteq\parallel Y_2$. Ale ponieważ $Y_1 \parallel Y_2$, więc także $Z_1 \subseteq\parallel Y_2$ i $Z_2 \subseteq\parallel Y_1$. Przeczy to minimalności quasi-pęku G zgodnie z twierdzeniem 2.5. Możemy nawet wskazać konkretne pęki k-odcinków równoległych, które będą zawarte w G. Takimi pękami będą na przykład $\overline{Z_1, Z_2} \boxtimes^* Y_1$ i $\overline{Z_1, Z_2} \boxtimes^* Y_2$.

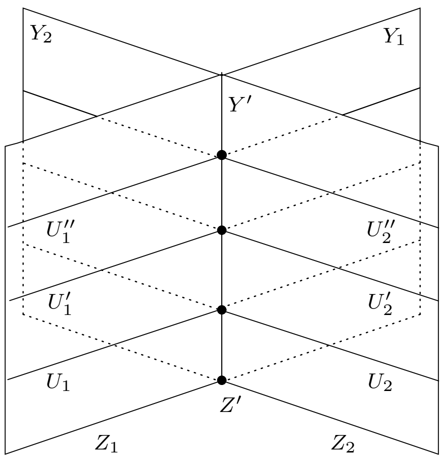
Tak więc quasi-pęk G tego typu nie może być minimalny, a takie pomijamy w naszych rozważaniach.

Pęk typu pw$\backslash^*$pw

Przyjmijmy, że quasi-pęk $\mathsf{G} = p \boxtimes^* q$ k-odcinków równoległych jest typu pw$\backslash^*$pw. Wówczas zarówno p jak q są pękami właściwymi. Z (2.2) G to zbiór postaci:

$$\mathsf{G} = \{[Z, Y]_k^* \colon\ Z \in \overline{Z_1, Z_2},\ Y \in \overline{Y_1, Y_2},\ Z \subseteq\parallel Y\}. \tag{2.23}$$

Na to aby G był minimalny, z 2.5 potrzeba by $Z_1 \not\subseteq\parallel Y_2$ oraz $Z_2 \not\subseteq\parallel Y_1$. Natomiast żeby G był nietrywialny, to $Z_i \subseteq\parallel Y_i$ dla $i = 1, 2$.



Rysunek 2.15: Pęk k-odcinków typu pw$\backslash^*$pw.

W przypadku, gdy Y_1, Y_2 są sąsiednimi płaszczyznami i Z_1, Z_2 sąsiednimi prostymi, takimi że $Z_i \subseteq\parallel Y_i$. To dla $k = 1$ odcinek $[Z, Y]_k^*$ należący do G, będzie składał się z prostych równoległych do $Z \in p$ i leżących w płaszczyźnie Y z pęku q. Przedstawiono to na rysunku 2.15.

Pęki typu pr*s, pr*pr i pr*pw

Weźmy quasi-pęk $\mathsf{G} = \overline{Z_1, Z_2} \boxtimes^* \overline{Y_1, Y_2}$ k-odcinków równoległych, taki że $Z_1 \parallel Z_2$ zaś Y_1, Y_2 to dwie współpękowe podprzestrzenie $\mathfrak{A}$. Z faktu 2.1 wynika że

$$\mathsf{G} = \overline{Z_1, Z_2} \boxtimes^* \overline{Y_1, Y_2} = \{Z\} \boxtimes^* \overline{Y_1, Y_2}, \tag{2.24}$$

gdzie $Z \in \overline{Z_1, Z_2}$. Z definicji współpękowości 1.8 $\overline{Y_1, Y_2}$ może być singletonem pewnej podprzestrzeni $\mathfrak{A}$, pękiem równoległych lub pękiem właściwym. W zależności od $\overline{Y_1, Y_2}$ quasi-pęk G, będzie odpowiednio typu pr*s, pr*pr lub pr*pw. Korzystając z (2.24) $\overline{Z_1, Z_2}$ możemy zastąpić przez $\{Z\}$. Otrzymamy w ten sposób quasi-pęk G k-odcinków równoległych odpowiednio typu s*s, s*pr i s*pw. Wynika stąd równość pomiędzy poszczególnymi typami quasi-pęków. Quasi-pękami k-odcinków typu pr*s, pr*pr i pr*pw nie będziemy się zajmowali oddzielnie, gdyż jakościowo są one równe odpowiednio quasi-pękom typu s*s, s*pr i s*pw.

Z analizy przedstawionej w tym podrozdziale otrzymujemy:

Twierdzenie 2.10. *Tabela 2.3 przedstawia wszystkie możliwe typy pęków k-odcinków równoległych w* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.

$\xi\backslash^*\eta$	pw	pr	s
pw	wafel	$\times$	pęk wł, typu układ
s	pęk wł. typu gwiazda	pęk wł. typu gwiazda	$\times$

Tabela 2.3: Klasyfikacja pęków k-odcinków równoległych w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.

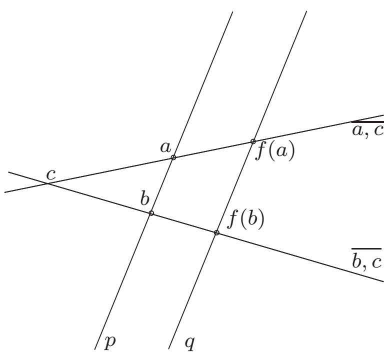
Rozdział 3

Rzuty w grassmannianie afinicznym

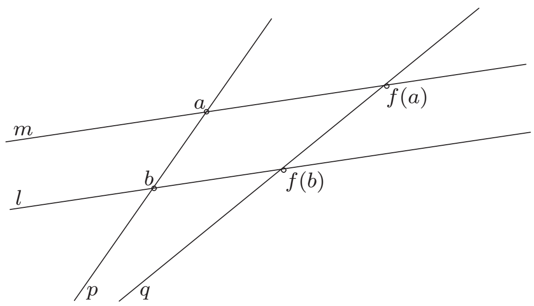
W przestrzeni afinicznej, klasyczny rzut środkowy o środku w punkcie c z prostej p na prostą q to bijekcja $f\colon p \longrightarrow q$, dana następującym przepisem: punkt $a \in p$ łączymy z punktem c, prostą $\overline{a,c}$ przecinamy z prostą q, punkt przecięcia to $f(a)$. Aby taka konstrukcja była możliwa, spełnionych musi być kilka warunków: $c \notin p \cup q$, $p \parallel q$ i $c \in \langle p, q \rangle$.

Rzut równoległy f z prostej p na prostą q o kierunku l określa się jako bijekcję $f\colon p \longrightarrow q$, przy której obrazy punktów z p znajduje się w ten sposób, że przez punkt $a \in p$ prowadzi się prostą m równoległą do l i punkt przecięcia m i q to $f(a)$. Tutaj musi być: $l \nparallel p, q$ i $q \subset \langle p, a * l \rangle$ dla dowolnego $a \in p$.

Zauważmy, że te klasyczne rzuty działają w pękach prostych. Wzorując się na przytoczonych przepisach spróbujemy określić rzuty działające w pękach odcinków w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.



Rysunek 3.1: Rzut środkowy.



Rysunek 3.2: Rzut równoległy.

Uwaga 3.1. W pracy [8] badane są rzuty w pękach odcinków właściwych. Jeśli U_2 jest obrazem elementu U_1 przy takim dowolnym rzucie z odcinka $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$, to U_1 i U_2 są współpękowe. Oznacza to, że $\dim U_1 = \dim U_2$. Tak więc otrzymane tam postacie rzutów będzie można wykorzystać w grassmannianie afinicznym, gdzie ograniczamy się do k-odcinków.

3.1 Uogólniony rzut środkowy

Rozważania na temat rzutów rozpoczniemy od dobrze znanego rzutu środkowego, tylko zastosowanego do k-odcinków w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.

Twierdzenie 3.2. *Niech* G *będzie pękiem właściwym* k*-odcinków typu różnego od* $0\backslash\mathrm{pw}$ *i* $\mathrm{s}\backslash^*\mathrm{pw}$ *w* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3 \in \mathsf{G}$, $\mathcal{X}_3 \neq \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}' := \bigcap \mathsf{G}$ *oraz niech* $\mathcal{Y}$ *będzie odcinkiem grassmannianu afinicznego* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$.

(i) *Dla każdego* $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$ *istnieje dokładnie jeden* $U_3 \in \mathcal{Y}$ *współpękowy z* U_1.

(ii) *Dla* $U_1 \in \mathcal{X}_1$ *istnieje dokładnie jeden* $U_2 \in \mathcal{X}_2$ *współpękowy z* U_1 *taki, że pęk przez* U_1, U_2 *przecina* $\mathcal{Y}$. *Jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$, *to* $U_2 \in \mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{X}'$, *jeśli natomiast* $U_1 \in \mathcal{X}'$, *to* $U_2 = U_1$.

Twierdzenie 3.2 uzasadnia poprawność poniższej definicji.

Definicja 3.3. Niech $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}$ będą k-odcinkami grassmannianu $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ spełniającymi założenia 3.2. Określamy odwzorowanie $\overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\mathcal{Y}}} : \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_2$ warunkiem

$$\overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\mathcal{Y}}}(U_1) = U_2 \text{ wtw., gdy } U_1, U_2, U_3 \text{ leżą w jednym pęku dla pewnego } U_3 \in \mathcal{Y}, \tag{3.1}$$

gdzie $U_i \in \mathcal{X}_i$. Tak określone przekształcenie nazywamy *uogólnionym rzutem środkowym* z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ o środku $\mathcal{Y}$.

Postać środka rzutu $\mathcal{Y}$ w definicji 3.3, oraz wzór analityczny $\overset{\mathcal{X}_1}{\underset{\mathcal{X}_2}{\mathcal{Y}}}$ zależy od typu pęku G, w którym rzutujemy. W dalszej części tego rozdziału rozpatrujemy poszczególne typy pęków i dowodzimy 3.2 w tych konkretnych przypadkach.

3.1.1 Pęki typu pw\s i s\pw

Pęki typu pw\s lub s\pw można zanużyć w odpowiedniej przestrzeni rzutowej. Tak więc w tym przypadku, zgodnie z uwagą 3.1 twierdzenie 3.2 będzie przeformułowaniem faktu 4.10 z pracy [8]:

Fakt 3.4. *Niech* G *będzie pękiem właściwym odcinków typu* pw\s *lub* s\pw *w grassmannianie afinicznym* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ *oraz niech* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}'$ *i* $\mathcal{Y}$ *jest kowymiaru 1 w* $\mathcal{X}_3$ *i komplementarny z* $\mathcal{X}'$ *względem odcinka* $\mathcal{X}_3$.

(i) *Jeśli* $Z_1 = Z_2 = Z$, *to istnieje podprzestrzeń* C *zawarta w* Y_3 *taka, że* $\mathcal{Y} = [C, Y_3]_k$ *oraz* Z *jest kowymiaru jeden w* C *i* $Z = Y' \sqcap C$, $Y_3 = Y' \sqcup C$.

(ii) *Jeśli* $Y_1 = Y_2 = Y$, *to istnieje* C *takie, że* $\mathcal{Y} = [Z_3, C]_k$ *oraz* $Z_3 \subseteq C$ *i* C *jest hiperpłaszczyzną w* Y *taką, że* $Y = Z'' \vee C$, $Z_3 = Z'' \wedge C$.

(iii) *Wzór analityczny rzutu* $f = \begin{smallmatrix} \top \mathcal{X}_1 \\ \circ \mathcal{Y} \\ \downarrow \mathcal{X}_2 \end{smallmatrix}$ *jest następujący:*

$$f(U) = \begin{cases} (U \sqcup C) \sqcap Y_2, & Z_1 = Z_2,\ U \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}' \\ (U \sqcap C) \sqcup Z_2, & Y_1 = Y_2,\ U \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}' \\ U, & U \in \mathcal{X}'. \end{cases} \tag{3.2}$$

3.1.2 Pęk typu pr\s i l\s

Tutaj również możemy zacytować lemat 4.11 z pracy [8].

Fakt 3.5. *Niech* G *będzie pękiem właściwym odcinków typu* pr\s *lub* l\s *w* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ *oraz niech* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}'$ *i* $\mathcal{Y}$ *takie jak w* 3.2. *Dodatkowo o* $\mathcal{Y}$ *zakładamy, że jest kowymiaru 1 w* $\mathcal{X}_3$, *takim że odcinki* $\mathcal{X}', \mathcal{Y}$ *są komplementarne względem* $\mathcal{X}_3$.

(i) *Istnieje* C *takie, że* $\mathcal{Y} = [Z_3, C]_k$ *oraz* $Z_3 \subseteq C$ *i* C *to hiperpłaszczyzna w* Y *dla, której spełnione są następujące warunki:* $Y = Z'' \sqcup C$, $Z_3 = Z'' \sqcap C$.

(ii) *Jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$ *to* $U_3 = (U_1 \sqcup Z'') \sqcap C$ *jest dokładnie jednym elementem* $\mathcal{Y}$ *współpękowym z* U_1.

(iii) *Jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$ *to*

$$U_2 = \begin{cases} (U_1 \sqcup C) \sqcap Z_2, & \text{gdy} \quad U_1 \sqcap C \neq \emptyset, \\ Z_2 \circledvee U_1, & \text{gdy} \quad U_1 \sqcap C = \emptyset, \end{cases}$$

jest dokładnie jednym takim elementem $\mathcal{X}_2$ *współpękowym z* U_1, *że pęk* $\overline{U_1, U_2}$ *przecina* $\mathcal{Y}$.

(iv) *Jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}'$, *to po pierwsze, istnieje pęk zawierający* U_1 *i przecinający* $\mathcal{Y}$, *po drugie, każdy pęk przez* U_1 *przecinający* $\mathcal{Y}$ *przecina* $\mathcal{X}_2$ *jedynie w* U_1.

3.1.3 Pęk typu 0\pr

Na mocy 3.1 oraz lematu 4.13 z pracy [8] mamy:

Fakt 3.6. *Niech* G *będzie pękiem właściwym odcinków typu* 0\pr *w* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ *oraz niech* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}'$ *i* $\mathcal{Y}$ *takie jak w* 3.2. *Ponadto niech* $\mathcal{Y}$ *jest kowymiaru 1 w* $\mathcal{X}_3$ *takim, że razem z odcinkiem* $\mathcal{X}'$ *jest komplementarny względem* $\mathcal{X}_3$. *W tym wypadku* $Z_1 = Z_2 = \emptyset$ *oraz* $\mathcal{X}' = \emptyset$

(i) $\mathcal{Y} = [C, Y_3]_k$, *gdzie* C *jest punktem przestrzeni afinicznej* $\mathfrak{A}$, *zawartym w* Y_3.

(ii) *Jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$, *to* $U_3 = (U_1 \sqcup C) \sqcap Y_3$ *jest dokładnie jednym elementem* $\mathcal{Y}$ *współpękowym z* U_1.

(iii) *Jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$ *to*

$$U_2 = (U_1 \sqcup C) \sqcap Y_2$$

jest dokładnie jednym takim elementem $\mathcal{X}_2$ *współpękowym z* U_1*, że pęk* $\overline{U_1, U_2}$ *przecina* $\mathcal{Y}$*.*

3.1.4 Pęk typu pw$\setminus^*$s

Lemat 3.7. *Niech* G *będzie pękiem* k*-odcinków równoległych typu* pw$\setminus^*$s *w* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ *oraz niech* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}'$ *i* $\mathcal{Y}$ *takie jak w* 3.2*. Niech* C *będzie hiperpłaszczyzną w* Y *taką, że* $C \sqcap Z'' = Z_3$ *i* $C \sqcup Z'' = Y$ *i niech* $\mathcal{Y} := [Z_3, C]^*_k$*. Wówczas:*

(i) *Jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$ *to* $U_3 = (U_1 \sqcap C) \varovee Z_3$ *jest dokładnie jednym punktem* $\mathcal{Y}$ *współpękowym z* U_1*.*

(ii) *Jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$ *to*

$$U_2 = (U_1 \sqcap C) \varovee Z_2,$$

jest dokładnie jednym takim punktem $\mathcal{X}_2$ *współpękowym z* U_1*, że pęk* $\overline{U_1, U_2}$ *przecina* $\mathcal{Y}$*.*

(iii) *Jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}'$*, to po pierwsze, istnieje pęk zawierający* U_1 *i przecinający* $\mathcal{Y}$*, po drugie, każdy pęk przez* U_1 *przecinający* $\mathcal{Y}$ *przecina* $\mathcal{X}_2$ *jedynie w* U_1*.*

DOWÓD. Niech $U_1 \in \mathcal{X}_1$. Ponieważ C jest kowymiaru 1 w Y i $U_1 \subseteq Y$, więc albo

$$\dim U_1 \sqcap C = k - 1, \tag{3.3}$$

albo $U_1 \subseteq\parallel C$. W drugim przypadku $Z_1 \subseteq\parallel U_1 \subseteq\parallel C$ i ponadto $Z_3 \subseteq\parallel C$. Zatem $Z'' \subseteq\parallel C$, to znaczy, że $Z'' \sqcap C = \emptyset$ albo $Z'' \sqcap C = Z''$, ale w obu przypadkach sprzeczność z założeniem, że $Z'' \sqcap C = Z_3$.

Niech teraz $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$. Aby wyznaczyć wymiar $(U_1 \sqcup C) \varovee Z''$, zgodnie z definicją 1.16, należy wyznaczyć wymiar sumy kierunków $U_1 \sqcup C$ oraz Z''. Z uwagi na (3.3) możemy utożsamiać podprzestrzenie U_1, C, Z'' z ich kierunkami, co nie zmniejsza ogólności rozważań. Możemy wręcz przyjąć, że początek układu współrzędnych leży w Z' i $Z' \subseteq U_1$ (skądinąd $Z' \subseteq Z_3 = C \sqcap Z''$). Ponieważ w tej sytuacji nie może być $Z'' \subseteq U_1$ z założenia, że $U_1 \notin \mathcal{X}' = [Z'', Y]^*_k$, więc $U_1 \sqcap C \sqcap Z'' = Z'$. A zatem

$$\begin{aligned}\dim((U_1 \sqcap C) \varovee Z'') = \dim(U_1 \sqcap C) + \dim Z'' - \dim(U_1 \sqcap C \sqcap Z'') = \\ \dim U_1 - 1 + \dim Z' + 2 - \dim Z' = \dim U_1 + 1 = k + 1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Zgodnie z 1.17(2), (3.3) i (3.4), wykazaliśmy, że

$$p = \mathbf{p}(U_1 \sqcap C, (U_1 \sqcap C) \varovee Z'')$$

jest pękiem właściwym. Ponieważ $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ są odcinkami równoległych, więc pęk właściwy p nie może przecinać żadnego z nich w więcej niż jednym punkcie, tzn.

$$|p \cap \mathcal{X}_i| \leqslant 1 \quad \text{dla} \quad i = 1,2,3. \tag{3.5}$$

Pokażemy, że $(U_1 \sqcap C) \vee\!\!\!\!\bigcirc Z_i$, dla $i = 1,2,3$ są punktami pęku p. Z 1.17(2) i 1.17(4) łatwo zauważyć, że

$$U_1 \sqcap C \subseteq (U_1 \sqcap C) \vee\!\!\!\!\bigcirc Z_i \subseteq (U_1 \sqcap C) \vee\!\!\!\!\bigcirc Z_i.$$

Ponadto $U_1 \sqcap C \sqcap Z_i = Z'$ dla $i = 1,2,3$ i z (3.3) mamy

$$\begin{aligned}\dim((U_1 \sqcap C) \vee\!\!\!\!\bigcirc Z_i) = \dim(U_1 \sqcap C) + \dim Z_i - \dim(U_1 \sqcap C \sqcap Z_i) = \\ k - 1 + \dim Z' + 1 - \dim Z' = k.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Tak więc

$$(U_1 \sqcap C) \vee\!\!\!\!\bigcirc Z_i \in p \quad \text{dla} \quad i = 1,2,3. \tag{3.7}$$

Z własności 1.17(8) mamy $(U_1 \sqcap C) \vee\!\!\!\!\bigcirc Z_1 \subseteq U_1$, zatem z porównania wymiarów, zgodnie z (3.6), otrzymamy

$$U_1 = (U_1 \sqcap C) \vee\!\!\!\!\bigcirc Z_1. \tag{3.8}$$

(i) Z uwagi na (3.5), (3.7) i (3.8) wystarczy jeszcze pokazać, że $U_3 \in \mathcal{Y}$. Korzystając z 1.17(3) mamy $Z_3 \subseteq (U_1 \sqcap C) \vee\!\!\!\!\bigcirc Z_3$. Ponieważ $U_1 \sqcap C \subseteq C$ oraz $Z_3 \subseteq\parallel C$, więc z 1.17(8) mamy $(U_1 \sqcap C) \vee\!\!\!\!\bigcirc Z_3 \subseteq C$ i ostatecznie

$$Z_3 \subseteq\parallel (U_1 \sqcap C) \vee\!\!\!\!\bigcirc Z_3 \subseteq C.$$

(ii) Wynika bezpośrednio z (3.5), (3.7), (3.8) oraz (i).

(iii) Niech $U_1 \in \mathcal{X}'$, a więc $U_1 \in \mathcal{X}_i$, a tym samym $Z_i \subseteq\parallel U_1$ dla $i = 1,2,3$. To z kolei pociąga za sobą, że $Z'' \subseteq\parallel U_1$. Zakładamy jednocześnie, że $Z'' \nsubseteq U_1$, czyli $Z'' \sqcap U_1 = \emptyset$. W przeciwnym razie zamiast Z'' możemy wziąć Z''_0 takie, że $Z'' \parallel Z''_0 \subseteq Y$ i $Z''_0 \nsubseteq U_1$.

Rozważmy $p = \mathbf{p}(U_1 \sqcap C, (U_1 \sqcap C) \sqcup Z'')$. Pokażemy, że p jest wymaganym pękiem zawierającym U_1 i przecinającym $\mathcal{Y}$. Z (3.3) mamy $\dim(U_1 \sqcap C) = k - 1$. Rozumując tak jak przy wyliczaniu (3.4) (wprawdzie tutaj $U_1 \in \mathcal{X}'$, ale założyliśmy, że $Z'' \nsubseteq U_1$) dostaniemy $\dim((U_1 \sqcap C) \sqcup Z'') = k + 1$. Oczywiście $U_1 \sqcap C \subsetneq (U_1 \sqcap C) \sqcup Z''$. Zatem p jest pękiem właściwym.

Aby $U_1 \in p$ musimy sprawdzić, czy $U_1 \subseteq (U_1 \sqcap C) \sqcup Z''$. W tym celu zauważmy, że $(U_1 \sqcap C) \sqcup Z'' \subseteq U_1 \sqcup Z''$ oraz $\dim U_1 \sqcup Z'' = k+1$ z 1.6. A zatem

$$U_1 \subseteq U_1 \sqcup Z'' = (U_1 \sqcap C) \sqcup Z''.$$

Musimy jeszcze pokazać, że $p \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$. Weźmy $U_3 := (U_1 \sqcap C) \sqcup Z_3$. Łatwo zauważyć, że $U_3 \in \mathcal{Y}$. Widać również, że

$$U_1 \sqcap C \subseteq (U_1 \sqcap C) \sqcup Z_3 \subseteq (U_1 \sqcap C) \sqcup Z''. \tag{3.9}$$

W pierwszej inkluzji w (3.9) nie zachodzi równość bo w przeciwnym razie mielibyśmy $Z'' = Z_1 \sqcup Z_3 \subseteq U_1$, co zostało wykluczone założeniem na początku. W drugiej inkluzji w (3.9) również nie zachodzi równość bo w przeciwnym razie

$$C = C \sqcup Z_3 = C \sqcup (U_1 \sqcap C) \sqcup Z_3 = (U_1 \sqcap C) \sqcup Z'' \sqcup C = Z'' \sqcup C = Y.$$

Stąd wniosek, że $U_3 \in p$, więc p spełnia wymagania pierwszej części punktu (iii).

Niech teraz p będzie dowolnym pękiem przez U_1, przecinającym $\mathcal{Y}$ w pewnym punkcie U_3. Przypuśćmy, że p przecina $\mathcal{X}_2$ w punkcie $U_2 \neq U_1$. Ponieważ $p = \overline{U_1, U_2}$ i $U_1 \in \mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}_2$, więc $p \subseteq \mathcal{X}_2$ z 1.22. Stąd

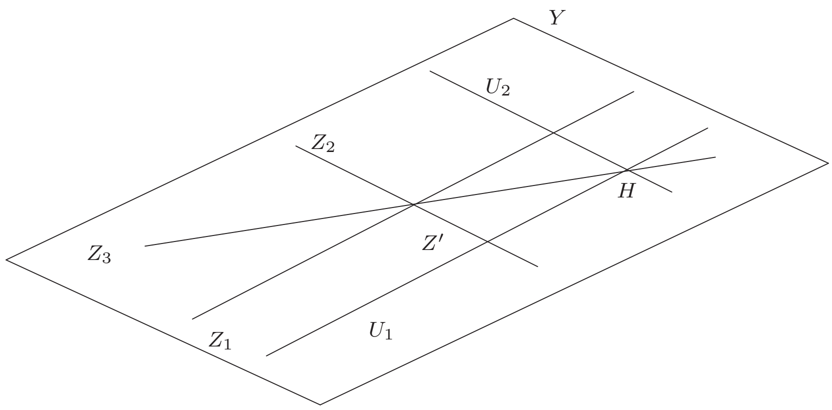
$$U_3 \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_2 \cap \mathcal{X}_3 = \mathcal{Y} \cap \mathcal{X}'. \tag{3.10}$$

Ale zgodnie z 1.26(i) mamy

$$\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}' = [Z_3, C]^*_k \cap [Z'', Y]^*_k = [Z_3 \circledvee Z'', Y \sqcap C]^*_k = [Z'', C]^*_k. \tag{3.11}$$

Gdyby $Z'' \subseteq\parallel C$, to mielibyśmy $Z'' \sqcap C = Z''$ albo $Z'' \sqcap C = \emptyset$, ale z założenia mamy $Z'' \sqcap C = Z_3$. Tak więc $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}' = \emptyset$ na mocy (3.11). Biorąc pod uwagę (3.10) dostajemy sprzeczność, a więc nasze przypuszczenie, że $U_2 \neq U_1$ było fałszywe, co kończy dowód. $\square$

Przykład 3.8. Rozważmy w przestrzeni afinicznej płaszczyznę Y. Bierzemy trzy parami różne proste Z_1, Z_2 i Z_3 na tej płaszczyźnie przecinające się w punkcie Z'. Określimy teraz odwzorowanie f przyporządkowujące prostym z pęku $\mathbf{p}^*(Z_1, Y)$, proste z pęku $\mathbf{p}^*(Z_2, Y)$.



Rysunek 3.3

Proste leżące na Y i równoległe do Z_1, zawsze będą przecinały prostą Z_3. Weźmy więc dowolną prostą $U_1 \parallel Z_1$ i punkt przecięcia U_1 i Z_3 oznaczmy przez H (por. rys. 3.3). Prostą U_2 przechodzącą przez H i równoległą do Z_2 będziemy traktować jako obraz U_1 przy f.

Zauważmy, że proste leżące na Y równoległe do Z_1 tworzą k-odcinek $\mathcal{X}_1 = [Z_1, Y]^*_k$ w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, gdzie $k = 1$. W taki sam sposób otrzymujemy pozostałe 1-odcinki $\mathcal{X}_2 = [Z_2, Y]^*_1$ i $\mathcal{X}_3 = [Z_3, Y]^*_1$. Ponieważ Z_1, Z_2, Z_3 są współpękowe, to odcinki $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ i $\mathcal{X}_3$ tworzą pęk typu pw*s. Odwzorowanie f jest uogólnionym rzutem środkowym z odcinka $\mathcal{X}_1$ na odcinek $\mathcal{X}_2$ o środku $\mathcal{Y} = [Z_3, Z_3]^*_1$.

3.1.5 Pęk typu s*pr

Lemat 3.9. *Niech* G *będzie pękiem właściwym* k*-odcinków równoległych typu* s*pr *w* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ *oraz niech* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}'$ *takie jak w* 3.2. *W tym wypadku* $Z_1 = Z_2 = Z$ *oraz* $\mathcal{X}' = \emptyset$. *Weźmy* C *takie, że* $Z \parallel C \subseteq Y_3$ *i niech* $\mathcal{Y} := [C, Y_3]_k$.

(i) *Jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1$*, to* $U_3 = (U_1 \sqcup C) \sqcap Y_3$ *jest dokładnie jednym punktem* $\mathcal{Y}$ *współpękowym z* U_1.

(ii) *Jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1$ *to*

$$U_2 = (U_1 \sqcup C) \sqcap Y_2$$

jest dokładnie jednym takim punktem $\mathcal{X}_2$ *współpękowym z* U_1*, że pęk* $\overline{U_1, U_2}$ *przecina* $\mathcal{Y}$.

Dowód. Niech $U_1 \in \mathcal{X}_1$. Ponieważ $C \parallel Z$, więc $C \subseteq\parallel U_1$ i albo $C \sqcap U_1 = C$ albo $C \sqcap U_1 = \emptyset$. W pierwszym przypadku $C \subseteq U_1 \subseteq Y_1$ oraz $C \subseteq Y_3$, co jest sprzeczne z tym, że Y_1 różne i równoległe do Y_3. Podsumowując mamy, że $C \subseteq\parallel U_1$ oraz $C \sqcap U_1 = \emptyset$, więc zgodnie z 1.6

$$\dim(U_1 \sqcup C) = k + 1 \tag{3.12}$$

i możemy rozpiąć pęk równoległych $p = \mathbf{p}^*(U_1, U_1 \sqcup C)$.

Zastanówmy się, czy $p \cap \mathcal{X}_i \neq \emptyset$ dla $i = 1, 2, 3$. Jak nie trudno zauważyć

$$Z \subseteq\parallel (U_1 \sqcup C) \sqcap Y_i \subseteq Y_i,$$

a także

$$U_1 \subseteq\parallel (U_1 \sqcup C) \sqcap Y_i \subseteq U_1 \sqcup C, \tag{3.13}$$

ponieważ $U_1 \subseteq (U_1 \sqcup C)$ i $U_1 \subseteq Y_1 \parallel Y_1, Y_2$. Tak więc na to aby $(U_1 \sqcup C) \sqcap Y_i \in p \cap \mathcal{X}_i$ potrzeba by $\dim((U_1 \sqcup C) \sqcap Y_i) = k$. Na pewno z (3.13)

$$k = \dim U_1 \leqslant \dim((U_1 \sqcup C) \sqcap Y_i) \leqslant \dim(U_1 \sqcup C) = k + 1,$$

Gdyby $\dim((U_1 \sqcup C) \sqcap Y_i) = k + 1$, to $U_1 \sqcup C \subseteq Y_i$. Jeśli:

$$\begin{aligned} i = 1 &\text{ to } C \subseteq Y_1 \text{ sprzeczność, bo } Y_1 \parallel Y_3 \supseteq C, \\ i \neq 1 &\text{ to } U_1 \subseteq Y_i \text{ sprzeczność, bo } Y_i \parallel Y_1 \supseteq U_1. \end{aligned}$$

Widać stąd, że $\dim((U_1 \sqcup C) \sqcap Y_i) = k$ i w ostateczności

$$(U_1 \sqcup C) \sqcap Y_i \in p \cap X_i, \tag{3.14}$$

dla $i = 1, 2, 3$. Ponieważ $U_1 \subseteq (U_1 \sqcup C) \sqcap Y_1$, więc $U_1 = (U_1 \sqcup C) \sqcap Y_1$. Niech $U_i := (U_1 \sqcup C) \sqcap Y_i$ dla $i = 2, 3$.

Ponieważ, każdy k-odcinek jest podprzestrzenią w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, więc jeśli p przetnie $\mathcal{X}_i$ w dwóch elementach to $p \subseteq \mathcal{X}_i$. Z drugiej strony k-odcinki $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ są rozłączne i p przecina każdy z nich na mocy (3.14). Tak więc

$$p \cap \mathcal{X}_i = \{U_i\} = \{(U_1 \sqcup C) \sqcap Y_i\}, \tag{3.15}$$

gdzie $i = 1, 2, 3$.

Potrzebujemy jeszcze aby $U_3 \in \mathcal{Y}$. Ponieważ

$$C \subseteq (U_1 \sqcup C) \sqcap Y_3 \subseteq Y_3$$

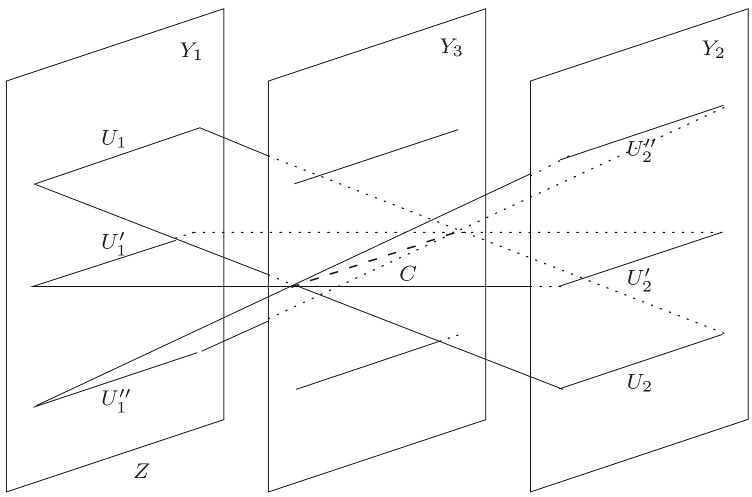
więc $U_3 \in \mathcal{Y}$. Z uwagi na to, że $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}_3$ i (3.15) mamy

$$p \cap \mathcal{Y} = \{U_3\}. \tag{3.16}$$

Dla dowolnego $U_1 \in \mathcal{X}_1$ wskazaliśmy pęk p taki, że zachodzi (3.15) i (3.16), co kończy dowód zarówno (i) jak i (ii). $\square$

Przykładem rzutu w tym typie pęku k-odcinków może być:

Przykład 3.10. Rozważamy w przestrzeni afinicznej trzy różne równoległe płaszczyzny Y_1, Y_2, Y_3 i prostą $Z \subseteq Y_1$ (jak na rys. 3.4). Ustalmy prostą C z Y_3 równoległą do Z. Określimy teraz odwzorowanie f przyporządkowujące prostym równoległym do Z leżącym na płaszczyźnie Y_1 proste równoległe do Z leżące na Y_2.



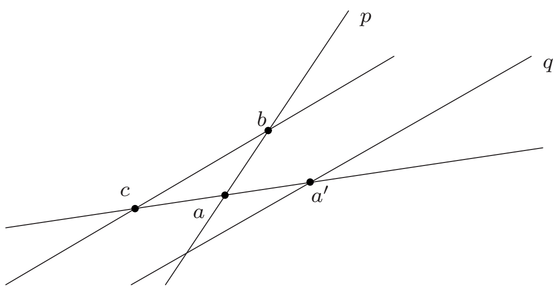
Rysunek 3.4

Dla prostej $U_1 \parallel Z$ i $U_1 \subseteq Y_1$ z przechodniości relacji równoległości będziemy również mieli $U_1 \parallel Z \parallel C$. Tak więc proste U_1 i C wyznaczą płaszczyzną, która przetnie płaszczyznę Y_2 w pewnej prostej nazwijmy ją U_2. Prosta U_2 będzie równoległa do U_1, a tym samym także do Z.

Proste leżące na Y_1 równoległe do Z tworzą k-odcinek $\mathcal{X}_1 = [Z, Y_1]^*_k$ w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, gdzie $k = 1$. W taki sam sposób otrzymujemy $\mathcal{X}_2 = [Z, Y_2]^*_k$ i $\mathcal{X}_3 = [Z, Y_3]^*_k$. Ponieważ $Y_1 \parallel Y_2$, to odcinki $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ wyznaczają pęk typu s*pr. Odwzorowanie f jest zatem uogólnionym rzutem środkowym z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$ o środku w $\mathcal{Y} = [C, Y_3]_k$.

3.2 Uogólniony rzut równoległy

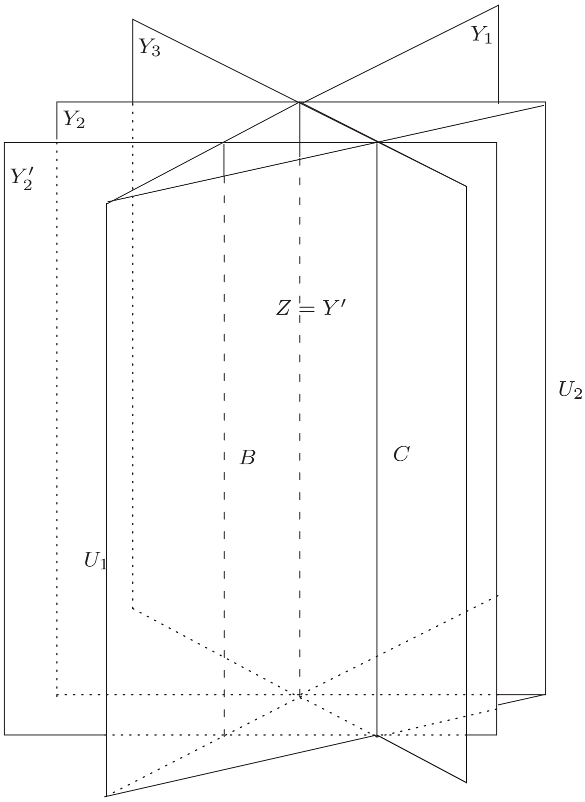
Z elementarnej geometrii wiadomo, że w przestrzeni afinicznej nie da się dobrze określić rzutu środkowego dla prostych przecinających się. Na rys. 3.6 przedstawiony jest rzut środkowy o środku w punkcie c z prostej p na prostą q. Obraz punktu a znajdziemy z przecięcia prostej $\overline{a, c}$ z prostą q, ale nie uda nam znaleźć obrazu punktu b, ponieważ $\overline{b, c} \parallel q$.



Rysunek 3.6

Niemal dokładnym odzwierciedleniem tej klasycznej sytuacji jest pęk typu s*pw, tylko o wymiar wyżej, co przedstawiono na rysunku 3.7. Jest to rzut środkowy o środku w prostej C. Płaszczyznom Y_1, Y_2, odpowiadają proste p, q z rysunku 3.6, Prosta $U_1 \in [Z, Y_1]^*_k$ to punkt $a \in p$, natomiast prosta $U_2 \in [Z, Y_2]^*_k$ czyli $a' \in q$ jest jej obrazem powstałym z przecięcia płaszczyzny $(U_1 \sqcup C)$ z płaszczyzną Y_2. W tym przypadku nie uda nam się znaleźć obrazu dla prostej B (punkt b), która wraz z prostą C utworzy płaszczyznę $Y_2' \parallel Y_2$, ($\overline{b, c} \parallel p$ na rys. 3.6).

Zauważmy, że proste leżące na Y_1 równoległe do $Z = Y'$ tworzą k-odcinek $\mathcal{X}_1 = [Z, Y_1]^*_k$ w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, gdzie $k = 1$. W taki sam sposób otrzymujemy pozostałe k-odcinki $\mathcal{X}_2 = [Z, Y_2]^*_k$ i $\mathcal{X}_3 = [Z, Y_3]^*_k$. Ponieważ Y_1, Y_2, Y_3 są współpękowe, to odcinki $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ i $\mathcal{X}_3$ tworzą pęk typu s*pw. Opisane odwzorowanie jest więc uogólnionym rzutem środkowym (wariant afiniczny) z odcinka $\mathcal{X}_1$ na odcinek $\mathcal{X}_2$ o środku $\mathcal{Y} = [C, Y_3]^*_k$.



Rysunek 3.7

Definicja 3.11. Niech U_1, U_2 będą różnymi, współpękowymi podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$, zaś L prostą taką, że $L \subseteq\parallel U_1 \sqcup U_2$ i $L \not\subseteq\parallel U_i$. Wówczas piszemy, że

$$U_1 \mathbin{/\!\!/_L} U_2 \overset{\text{def}}{\iff} U_1 \ovee L = U_2 \ovee L. \tag{3.17}$$

Możemy tutaj zacytować stwierdzenie 4.15 z pracy [8].

Fakt 3.12. *Niech U_1, U_2 będą różnymi, współpękowymi podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$, zaś L prostą. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $U_1 \mathbin{/\!\!/_L} U_2$

(2) *Dla każdego $a \in U_1 \setminus U_2$ istnieje $b \in U_2$ takie, że $\overline{a, b} \parallel L$ oraz dla każdego $b \in U_2 \setminus U_1$ istnieje $a \in U_1$ takie, że $\overline{a, b} \parallel L$.*

(3) $L \subseteq\parallel U_1 \vee U_2$ *i* $L \not\subseteq\parallel U_i$.

3.2.1 Pęk typu $\mathbf{0}\backslash$pw i $\mathbf{0}\backslash$pr

Stwierdzenie 3.13. *Niech G będzie pękiem odcinków typu $\mathbf{0}\backslash$pw lub $\mathbf{0}\backslash$pr w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathsf{G}$ i niech L będzie prostą w $\mathfrak{A}$ taką, że $L \not\subseteq\parallel Y_i$, oraz $Y_i \subset Y_{3-i} \ovee L$ dla $i = 1, 2$. Jeśli $U_1 \in \mathcal{X}_1$, to*

$$U_2 = (U_1 \ovee L) \sqcap Y_2$$

jest jedynym takim elementem $\mathcal{X}_2$ *współpękowym z* U_1*, że* $U_1 \mathbin{/\!\!/_L} U_2$*.*

Dowód. Jest to jedynie przeformułowanie Lematu 4.16 z pracy [8]. □

3.2.2 Pęki typu s\pw, s*pw, s*pr

Stwierdzenie 3.14. *Niech* G *będzie pękiem* k*-odcinków typu* $s\backslash$pw, s$\backslash^*$pw, s$\backslash^*$pr *w* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$*,* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathsf{G}$ *i niech* L *będzie prostą taką, że* $L \not\subseteq\!\| \ Y_i$*, oraz* $Y_i \subset Y_{3-i} \circledvee L$ *dla* $i = 1, 2$*. Wówczas jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1$*, to*

$$U_2 = (U_1 \circledvee L) \sqcap Y_2$$

jest jedynym takim punkty $\mathcal{X}_2$ *współpękowym z* U_1*, że* $U_1 \mathbin{/\!\!/_L} U_2$*.*

Dowód. Weźmy pęk $\mathsf{G} = \{Z\} \boxtimes q$ k-odcinków typu s$\backslash$pw, pęk $\mathsf{G}^* = \{Z\} \boxtimes^* q$ typu s$\backslash^*$pw oraz pęk $\mathsf{G}' = \{\emptyset\} \boxtimes q$ typu $\mathbf{0}\backslash$pw dla pewnych, odpowiednio dobrych Z i q. Mamy tutaj $Z \subseteq Y'$, ale nie zmniejsza to ogólności gdy rozważamy G^*. Niech ponadto $\mathcal{X}_i = [Z, Y_i]_k \in \mathsf{G}$, $\mathcal{X}_i^* = [Z, Y_i]_k^* \in \mathsf{G}^*$ oraz $\mathcal{X}_i' = [\emptyset, Y_i]_k \in \mathsf{G}'$, gdzie $i = 1, 2$.

Zauważmy, że

$$\mathcal{X}_i \subseteq \mathcal{X}_i' \supseteq \mathcal{X}_i^*.$$

Stąd, gdy $U_1 \in \mathcal{X}_1$ lub $U_1 \in \mathcal{X}_1^*$, to $U_1 \in \mathcal{X}_1'$. Na mocy lematu 3.13 zastosowanego do pęku G', otrzymujemy, że

$$U_2 = (U_1 \circledvee L) \sqcap Y_2 \tag{3.18}$$

jest jedynym takim punktem w $\mathcal{X}_2'$ współpękowym z U_1, że $U_1 \mathbin{/\!\!/_L} U_2$.

Rozważmy przypadek, gdy $U_1 \in \mathcal{X}_1$. Wtedy $Z \subseteq U_1 \subseteq Y_1$. Stąd uzyskujemy $Z \subseteq U_1 \circledvee L$. Ponadto mamy $Z \subseteq Y_2$, a więc z (3.18)

$$Z \subseteq U_2 \subseteq Y_2,$$

czyli $U_2 \in \mathcal{X}_2$.

Teraz rozważmy sytuację, gdy $U_1 \in \mathcal{X}_1^*$. Wówczas mamy $Z \subseteq\!\| \ U_1 \subseteq Y_1$. Stąd $Z \subseteq\!\| \ U_1 \circledvee L$. Ponadto $Z \subseteq\!\| \ Y_2$ skąd oraz z (3.18) dostajemy

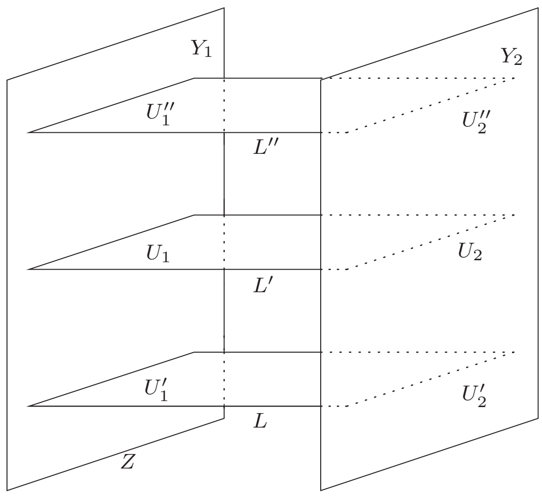
$$Z \subseteq\!\| \ U_2 \subseteq Y_2,$$

a więc $U_2 \in \mathcal{X}_2^*$.

W ten sposób, dla pęków typu s$\backslash$pw i s$\backslash^*$pw dowód jest zakończony.

Przejdźmy teraz do pęku $\mathsf{G} = \{Z\} \boxtimes^* q$ typu s$\backslash^*$pr. Weźmy pęk $\mathsf{G}' = \{\emptyset\} \boxtimes q$ typu $\mathbf{0}\backslash$pr. Niech $\mathcal{X}_i = [Z, Y_i]_k^* \in \mathsf{G}$ oraz $\mathcal{X}_i' = [\emptyset, Y_i]_k \in \mathsf{G}'$ dla $i = 1, 2$. Oczywiście $\mathcal{X}_i \subseteq \mathcal{X}_i'$. Stąd jeśli $U_1 \in \mathcal{X}_1$ to także $U_1 \in \mathcal{X}_1'$. Na mocy lematu 3.13 dla pęku G', otrzymujemy punkt U_2 postaci jak w (3.18) jedyny w $\mathcal{X}_2'$ współpękowy z U_1, taki że $U_1 \mathbin{/\!\!/_L} U_2$. Ponieważ $Z \subseteq\!\| \ U_1$, więc $Z \subseteq\!\| \ U_1 \circledvee L$. Ponadto mamy $Z \subseteq Y_1 \parallel Y_2$ skąd, zgodnie z (3.18) dostajemy $Z \subseteq\!\| \ U_2 \subseteq Y_2$. Oznacza to, że $U_2 \in \mathcal{X}_2$, co kończy dowód. □

Przykład 3.15. Rozważmy w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$, dwie różne i równoległe do siebie płaszczyzny Y_1 i Y_2, oraz prostą L nie równoległą do żadnej z nich (wystarczy by L nie była równoległa przynajmniej do jednej z nich, to z przechodniości relacji równoległości nie będzie także równoległa i do drugiej). Weźmy jeszcze prostą $Z \subseteq\parallel Y_1, Y_2$ i określimy odwzorowanie f przyporządkowujące prostym równoległym do Z i zawartych w Y_1, proste zawarte w Y_2, które są równoległe do Z.



Rysunek 3.8

Dla prostej $U_1 \parallel Z$ i $U_1 \subseteq Y_1$, możemy poprowadzić prostą L' równoległą do L i przecinającą U_1 w punkcie. Tak więc proste L' i U_1 są sąsiednie i ich kres górny będzie płaszczyzną, która przetnie płaszczyznę Y_2 w prostej $U_2 \parallel Z$ (ponieważ $U_2 \parallel U_1 \parallel Z$).

Zauważmy, że proste leżące na Y_1 równoległe do Z tworzą k-odcinek $\mathcal{X}_1 = [Z, Y_1]_k^*$ w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, gdzie $k = 1$. W taki sam sposób otrzymujemy k-odcinek $\mathcal{X}_2 = [Z, Y_2]_k^*$. Ponieważ $Y_1 \parallel Y_2$, to odcinki $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ tworzą pęk typu s*pr. Odwzorowanie f jest uogólnionym rzutem równoległym z k-odcinka $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$.

3.2.3 Rzut równoległy w waflach

Stwierdzenie 3.16. *Niech* G *będzie waflem w* $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathsf{G}$ *i niech* L *będzie prostą taką, że* $L \subseteq\parallel Z''$ *oraz* $L \not\subseteq\parallel Y_i$ *i* $Y_i \subset Y_{3-i} \ovee L$ *dla* $i = 1, 2$. *Wówczas jeśli* $U_1 \in \mathcal{X}_1$, *to*

$$U_2 = (U_1 \ovee L) \sqcap Y_2$$

jest jedynym takim punktem $\mathcal{X}_2$ *współpękowym z* U_1, *że* $U_1 /\!\!/_L U_2$.

DOWÓD. W dowodzie będziemy rozważać poszczególne typy wafli. Dla każdego z nich przyjmujemy, że $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathsf{G}$, gdzie G to odpowiedni wafel, $U_1 \in \mathcal{X}_1$ oraz L prosta spełniającą założenia naszego lematu.

Zauważmy, że gdyby $L \subseteq\!\parallel U_1$, to $L \subseteq\!\parallel Y_1$, bo $U_1 \subseteq Y_1$. Dostajemy sprzeczność z założeniem o L i na mocy 1.18 mamy

$$\dim(U_1 \varovee L) = k + 1. \tag{3.19}$$

Pęk G **typu** pw*pw.
W tym pęku k-odcinki $\mathcal{X}_i$ są postaci $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y_i]^*_k$ dla $i = 1, 2$. Bez ograniczenia ogólności możemy przyjąć, że $Z' \subseteq Y'$. Weźmy $p = \mathbf{p}(U_1 \sqcap Y', U_1 \varovee L)$. Na to aby p był pękiem właściwym zgodnie z 1.1 potrzeba, by $U_1 \sqcap Y' \subseteq U_1 \varovee L$ oraz $\dim(U_1 \sqcap Y') + 1 = \dim(U_1 \varovee L) - 1$. Z uwagi na (3.19) wystarczy wyznaczyć wymiar $U_1 \sqcap Y'$. Gdyby $U_1 \subseteq\!\parallel Y'$, to

$$Z_1 \subseteq\!\parallel U_1 \subseteq\!\parallel Y' \subseteq Y_2,$$

co przeczy definicji wafla 2.8. Zatem $\dim U_1 \cap Y' = k - 1$, gdyż Y' jest kowymiaru 1 w Y_1 i $U_1 \subseteq Y_1$. Jak łatwo zauważyć:

$$U_1 \sqcap Y' \subseteq U_1 \overset{1.17(4)}{\subseteq} U_1 \varovee L$$

a więc $U_1 \in p$. Wykazaliśmy że p jest pękiem właściwym.

Dla k-odcinka $\mathcal{X}_2 = [Z_2, Y_2]^*_k$, moc przekroju $p \cap \mathcal{X}_2$ jest co najwyżej równa jeden. W przeciwnym wypadku mielibyśmy $p \subseteq \mathcal{X}_2$ i tym samym $U_1 \in \mathcal{X}_2$, więc $U_1 \in \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}' = \emptyset$ ↯.

Pokażemy, że

$$p \cap \mathcal{X}_2 = \{U_2\}, \quad \text{gdzie} \quad U_2 := (U_1 \varovee L) \sqcap Y_2.$$

Zauważmy, że

$$\left.\begin{array}{r} L, Z_2 \subseteq\!\parallel Z'' = Z_1 \varovee L \subseteq\!\parallel U_1 \varovee L \;\text{ więc }\; Z_2 \subseteq\!\parallel U_1 \varovee L \\ Z_2 \subseteq\!\parallel Y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow Z_2 \subseteq\!\parallel U_2 \subseteq Y_2$$

czyli $U_2 \in \mathcal{X}_2$. Z drugiej strony:

$$\left.\begin{array}{r} U_1 \sqcap Y' \subseteq Y' \subseteq Y_2 \text{ więc }\; U_1 \sqcap Y' \subseteq U_2 \\ U_2 \subseteq U_1 \varovee L \end{array}\right\} \Rightarrow U_1 \sqcap Y' \subseteq U_2 \subseteq U_1 \varovee L$$

czyli $U_2 \in p$. Pozostaje sprawdzić, czy $\dim U_2 = k$? Na pewno wymiar U_2, możemy oszacować przez:

$$k - 1 = \dim(U_1 \sqcap Y') \leqslant \dim U_2 \leqslant \dim(U_1 \varovee L) = k + 1.$$

W przypadku, gdy $\dim U_2 = k - 1$, to $U_2 = U_1 \sqcap Y'$. Oznacza to, że

$$Z_2 \subseteq\!\parallel U_2 = U_1 \sqcap Y' \subseteq Y_1,$$

co jest sprzeczne z 2.5.

Gdyby $\dim U_2 = k+1$, to $U_2 = U_1 \ovee L$. Stąd $U_1 \subseteq U_1 \ovee L \subseteq\parallel Y_2$. Oznacza to, że $Z_1 \subseteq\parallel U_1 \subseteq\parallel Y_2$, co znowu przeczy 2.5.

W związku z tym $\dim U_2 = k$.

Pęk G typu pw\pw, l\pw, pr\pw, l\pr, pr\pr.

Zauważmy, że niezależnie od typy pęku G, mamy

$$U_1 \subseteq U_1 \sqcup Z_2 \subseteq U_1 \ovee L.$$

Zatem zgodnie z (3.19)

$$k \leqslant \dim(U_1 \sqcup Z_2) \leqslant k+1.$$

Gdyby $\dim(U_1 \sqcup Z_2) = k$ to $U_1 \sqcup Z_2 = U_1$ i stąd $Z_2 \subseteq U_1 \subseteq Y_1$, co przeczy 2.4. Otrzymaliśmy w ten sposób

$$U_1 \sqcup Z_2 = U_1 \ovee L.$$

Stąd, na mocy twierdzenia 4.1 z pracy [8], jedynym punktem z $\mathcal{X}_2$ współpękowym z U_1 jest

$$U_2 = (U_1 \sqcup Z_2) \sqcap Y_2 = (U_1 \ovee L) \sqcap Y_2.$$

Pozostało do wykazania, że we wszystkich rozważanych typach wafli $U_1 /\!\!/_L U_2$. Zauważmy, że

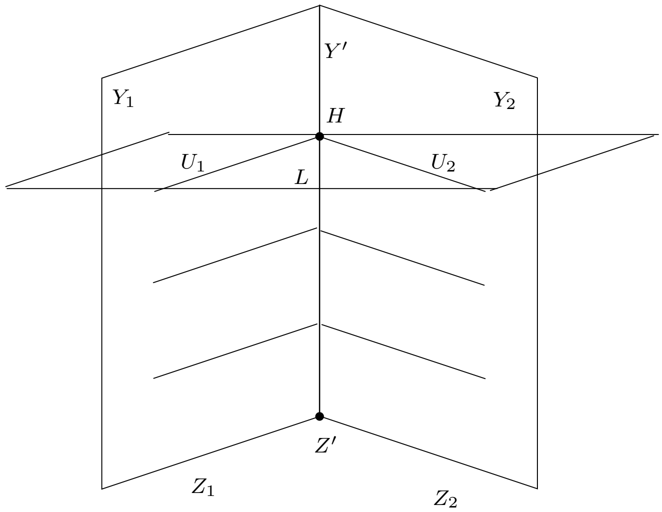
$$U_1 \subseteq U_1 \ovee L, \quad \text{i} \quad U_2 = (U_1 \ovee L) \sqcap Y_2 \subseteq U_1 \ovee L$$

zatem $U_1 \sqcup U_2 \subseteq U_1 \ovee L$. Punkty U_1, U_2 są współpękowe więc $\dim(U_1 \sqcup U_2) = k+1$. Stąd i z (3.19) otrzymujemy $U_1 \sqcup U_2 = U_1 \ovee L$.

Z 1.17(3) $L \subseteq\parallel U_1 \ovee L$, więc $L \subseteq\parallel U_1 \sqcup U_2$. Gdyby $L \subseteq\parallel U_i$, to $L \subseteq\parallel Y_i$ bo $U_i \subseteq Y_i$ dla $i = 1, 2$. Otrzymujemy sprzeczność z naszymi założeniami. Zatem $L \not\subseteq\parallel U_i$ i na mocy 3.12 $U_1 /\!\!/_L U_2$, co kończy dowód.

□

Przykład 3.17. Do przykładu rozważmy dwie różne przecinające się w prostej Y' płaszczyzny Y_1, Y_2. Weźmy także dwie proste $Z_1, Z_2 \neq Y'$, które są zawarte odpowiednio w Y_1 i Y_2. Niech prosta $L \subseteq\parallel Z_1 \sqcup Z_2 = Z''$, ale nie będzie równoległa do prostej Z_1 ani do Z_2. Określimy teraz odwzorowanie f przyporządkowujące prostym równoległym do Z_1 i leżącym w płaszczyźnie Y_1 proste równoległe do Z_2 leżące na Y_2.



Rysunek 3.9

Weźmy dowolną prostą $U_1 \parallel Z_1$ leżącą w Y_1. Ponieważ prosta L nie jest równoległa do Z_1, więc możemy poprowadzić prostą L' równoległą do L i przecinającą U_1 w punkcie. Proste L' i U_1 są sąsiednie więc ich kres górny będzie płaszczyzną, która przetnie płaszczyznę Y_2 w prostej U_2. Prosta U_2 będzie równoległa do prostej Z_2 ponieważ jest zawarta równolegle w $(U_1 \sqcup L') \sqcap Y_2$, a z równości wymiarów wynika równoległość.

Zauważmy, że prosta Z_1 i proste leżące w Y_1 równoległe do Z_1 tworzą k-odcinek $\mathcal{X}_1 = [Z_1, Y_1]^*_k$ w grassmannianie afinicznym $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, gdzie $k = 1$. W taki sam sposób otrzymujemy drugi k-odcinek $\mathcal{X}_2 = [Z_2, Y]^*_k$. Ponieważ Z_1, Z_2 są współpękowe, tak jak płaszczyzny Y_1, Y_2 to odcinki $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ tworzą wafel typu pw*pw. Odwzorowanie f jest uogólnionym rzutem równoległym z odcinka $\mathcal{X}_1$ na odcinek $\mathcal{X}_2$.

Innym sposobem wyznaczenia obrazu U_1 jest rozpięcie pęku $\mathbf{p}(H, U_1 \circledvee L)$, gdzie H to punkt przecięcia prostej U_1 z Y' i przecięcie go z odcinkiem $\mathcal{X}_2$.

3.2.4 Pęk typu l\s, pr\s

Stwierdzenie 3.18. *Niech G będzie pękiem k-odcinków typu* l\s, pr\s *w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathsf{G}$ i niech L będzie prostą taką, że $L \subseteq\!\parallel Z''$ i $L \not\trianglelefteq\!\parallel Z_1, Z_2$. Wówczas jeśli $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$, to*

$$U_2 = \mathbf{p}^*(U_1, U_1 \circledvee L) \cap \mathcal{X}_2$$

jest jedynym takim punktem $\mathcal{X}_2$ współpękowym z U_1, że $U_1 /\!\!/_L U_2$.

Dowód. W tych typach pęków $\mathcal{X}_i = [Z_i, Y]_k$ dla $i = 1, 2$. Zaczniemy od wykazania, że

$$Z_1 \circledvee L = Z''. \tag{3.20}$$

Z założenia mamy $L \not\subseteq\parallel Z_1$, więc na mocy 1.18 dostajemy $\dim Z_1 \ovee L = \dim Z_1 + 1 = \dim Z''$. Ponieważ $Z_1 \subseteq Z''$ oraz $L \subseteq\parallel Z''$, więc z 1.17(8) uzyskujemy $Z_1 \ovee L \subseteq Z''$, co daje prawdziwość (3.20).

Niech $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$. Przypuśćmy, że $L \subseteq\parallel U_1$. Skoro tak, to z inkluzji $Z_1 \subseteq U_1$ na mocy 1.17(8) mamy $Z_1 \ovee L \subseteq U_1$. Z uwagi na 3.20 otrzymujemy $Z_2 \subseteq Z'' \subseteq U_1$, co oznacza, że $U_1 \in \mathcal{X}_2$, a założyliśmy że $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$. Tak, więc

$$L \not\subseteq\parallel U_1. \tag{3.21}$$

Na podstawie 1.19 para $U_1, U_1 \ovee L$ wyznacza pęk równoległych

$$p = \mathbf{p}^*(U_1, U_1 \ovee L).$$

Na pewno $U_1 \in p$. Teraz zauważmy, że $|p \cap \mathcal{X}_2| \leqslant 1$, bo w przeciwnym wypadku mielibyśmy $p \subseteq \mathcal{X}_2$ i tym samym $U_1 \in \mathcal{X}_2$, co znowu przeczy założeniu, że $U_1 \in \mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}'$.

Powstaje pytanie, czy $p \cap \mathcal{X}_2 \neq \emptyset$? W tym celu rozważmy

$$U_2 := Z_2 * U_1.$$

Z 1.15(1) $Z_2 \subseteq Z_2 * U_1$, natomiast z 1.15(4) $\dim U_2 = \dim U_1 = k$. Ponieważ $Z_2, U_1 \subseteq Y$, więc także $Z_2 * U_1 \subseteq Y$. Oznacza to, że $U_2 \in \mathcal{X}_2$. Pokażemy, że U_2 leży w pęku p. Z 1.15(2)

$$U_1 \parallel Z_2 * U_1 = U_2. \tag{3.22}$$

Ponieważ $U_1 \subseteq U_1 \ovee L$, oraz z 3.20 mamy

$$Z_2 \subseteq Z'' = Z_1 \ovee L \subseteq U_1 \ovee L$$

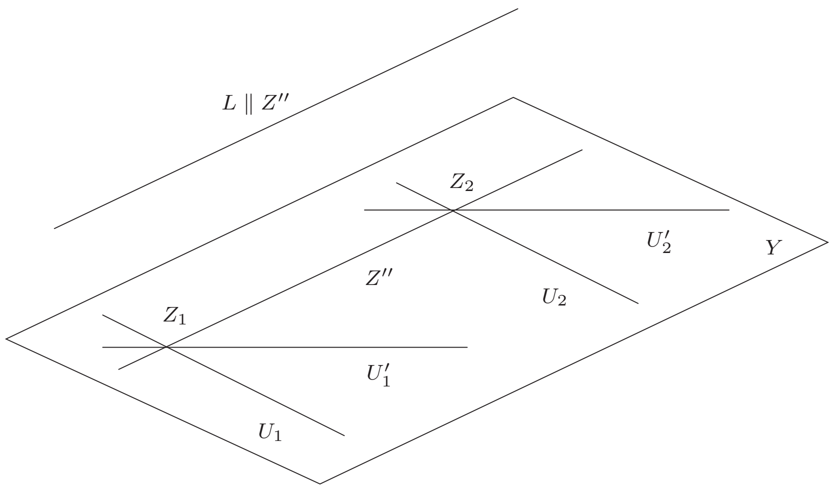
więc $U_2 \subseteq U_1 \ovee L$. Tym samym otrzymujemy że $U_2 \in p$. Ponieważ $|p \cap \mathcal{X}_2| \leqslant 1$ i $U_2 \in p \cap \mathcal{X}_2$, więc

$$p \cap \mathcal{X}_2 = \{U_2\} = \{Z_2 * U_1\}.$$

Ponieważ U_1, U_2 rozpinają pęk p więc $U_1 \sqcup U_2 = U_1 \ovee L$. Zatem $L \subseteq\parallel U_1 \sqcup U_2$. Ponadto z (3.20) i (3.22) mamy $L \not\subseteq\parallel U_i$ dla $i = 1, 2$. Możemy więc skorzystać z 3.12, co daje $U_1 /\!\!/_L U_2$. W ten sposób dowód jest zakończony. □

Przykład 3.19. Rozważmy płaszczyznę Y i leżące na niej dwa różne punkty Z_1 i Z_2. Weźmy jeszcze prostą $L \parallel Z''$. Określimy teraz odwzorowanie f przyporządkowujące prostym z pęku przez Z_1, proste z pęku przez Z_2. Weźmy prostą U_1 przechodzącą przez punkt Z_1, ale nie przechodzącą przez Z_2. Rozważmy pęk równoległych $\mathbf{p}^*(U_1, U_1 \ovee L)$. Znajdują się w nim wszystkie proste leżące w $Y = U_1 \ovee L$ i równoległe do U_1, w tym dokładnie jedna taka, oznaczmy ją U_2, przechodząca przez Z_2. Prostą U_2 będziemy traktować jako obraz U_1 przy f.

Zauważmy, że punkt Z_1, proste przechodzące przez przez Z_1 i płaszczyzna Y tworzą odcinek $\mathcal{X}_1 = [Z_1, Y]_k$ w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. W taki sam sposób otrzymujemy odcinek $\mathcal{X}_2 = [Z_2, Y_2]_k$. Ponieważ Z_1 i Z_2 to punkty leżące na płaszczyźnie, więc odcinki $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ tworzą pęk typu l\s w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Przekształcenie f jest uogólnionym rzutem równoległym z $\mathcal{X}_1$ na $\mathcal{X}_2$.



Rysunek 3.10

Definicja 3.20. Niech G będzie pękiem odcinków w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ odcinkami w G i L prostą w $\mathfrak{A}$. Jeśli odwzorowanie $\underset{\mathcal{X}_2}{\overset{\mathcal{X}_1}{\updownarrow}}{}_{\parallel L}$ określone warunkiem

$$\underset{\mathcal{X}_2}{\overset{\mathcal{X}_1}{\updownarrow}}{}_{\parallel L}(U_1) = U_2 \text{ wtw., gdy } U_1 \mathbin{/\!\!/_L} U_2. \tag{3.23}$$

jest bijekcją, to nazywamy je *uogólnionym rzutem równoległym o kierunku L.*

Podsumowaniem tego rozdziału będą dwa poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 3.21. *Możliwe rodzaje rzutów dla pęków k-odcinków właściwych w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ zostały zebrane w tabeli 3.1*

$\xi \backslash \eta$	pw	pr	s
pw	rzut równoległy 3.16	$\times$	rzut środkowy 3.4
pr	rzut równoległy 3.16	rzut równoległy 3.16	rzut śr. 3.5 i równ. 3.18
l	rzut równoległy 3.16	rzut równoległy 3.16	rzut śr. 3.5 i równ. 3.18
s	rzut śr. 3.4 i równ. 3.14	$\times$	$\times$
0	rzut równoległy 3.13	rzut śr. 3.6 i równ. 3.13	$\times$

Tabela 3.1: Rodzaje rzutów w pękach k-odcinków właściwych w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Szczegółowe opisy rzutów znajdują się w twierdzeniach o podanych numerach.

Twierdzenie 3.22. *Możliwe rodzaje rzutów dla pęków k-odcinków równoległych w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$ zostały zebrane w tabeli 3.2*

$\xi\backslash^*\eta$	pw	pr	s
pw	rzut równoległy 3.16	$\times$	rzut środkowy 3.7
s	rzut równoległy 3.14	rzut śr. 3.9 i równ. 3.14	$\times$

Tabela 3.2: Rodzaje rzutów w pękach k-odcinków równoległych w $\mathbf{P}_k(\mathfrak{A})$. Szczegółowe opisy rzutów znajdują się w twierdzeniach o podanych numerach.

Bibliografia

[1] Bennet M. K., *Affine and projective geometry*, Wiley-Interscience 1995.

[2] Kordos M., *Podstawy geometrii rzutowej i rzutowo-metrycznej*, PWN 1984.

[3] Oryszczyszyn H. and Prażmowski K., *On projections in projective spaces*, Demonstratio Math. XXXI, 1 (1998), 193-202.

[4] Oryszczyszyn H. and Prażmowski K., *On projections in projective spaces*, Demonstratio Math. XXXI, 4 (1998), 825-833.

[5] Prażmowski K. and Radziszewski K., *Projections and projective collineations in semiaffine line spaces*, Rend.Sem.Mat.Messina VI(1999), 33-52.

[6] Prażmowski K. and Żynel M., *General projections in spaces of pencils*, Mimeographed.

[7] Tallini G., *Partial line spaces and algebraic varieties*, Symp. Math. (28), 1986, 203–217.

[8] Żynel J., *Rzutowania w kracie podprzestrzeni przestrzeni afinicznej*, Praca magisterska.

[9] Żynel M., *Rzutowania w kracie podprzestrzeni przestrzeni wektorowej*, Rozprawa doktorska.