Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

Anna Bienias

Pary modularne w teorii krat i geometrii

Praca magisterska napisana pod kierunkiem
prof. Krzysztofa Prażmowskiego

Białystok 2009

Spis treści

Wstęp

„Matematyka jest alfabetem, za pomocą którego Bóg opisał wszechświat.”
Galileusz

Teoria krat wyrosła z algebry na początku ubiegłego wieku jako uniwersalny język do wygodnego formułowania wielu bardzo ogólnych faktów. Od początku próbowano zastosować ją do opisu geometrii rzutowej i afinicznej. Pierwsza pełna teorio-kratowa charakteryzacja skończenie wymiarowej geometrii afinicznej pochodzi z lat trzydziestych od Birkhoffa. Później podejmowane były próby znalezienia takiej charakteryzacji dla dowolnie wymiarowej geometrii afinicznej, głównie przez Wilcoxa w [8]. W latach pięćdziesiątych dokonał tego Sasaki w [6]. W **rozdziale pierwszym** zdefiniuję podstawowe pojęcia takie jak: przestrzeń afiniczna, przestrzeń rzutowa, krata, krata modularna i półmodularna. **Drugi rozdział** poświęcę parom modularnym oraz dualnym parom modularnym. Podam ich podstawowe własności. Ważnym twierdzeniem będzie twierdzenie 2.9 charakteryzujące pary modularne w dowolnej kracie (por. [7, Rozdz. 2]). Następnie **trzeci rozdział** poświęcę relacji równoległości w ujęciu czysto kratowym. Istotnym wynikiem tutaj będzie charakteryzacja równoległości w terminach pary niemodularnej. W **czwartym rodziale** zajmę się najważniejszymi kratami geometrii, czyli kratą podprzestrzeni przestrzeni rzutowej oraz kratą podprzestrzeni przestrzeni afinicznej. Dla kraty rzutowej przytoczę charakteryzację kratową z [4], natomiast w analitycznej kracie afinicznej zdefiniuję niesymetryczną równoległość i scharakteryzuję ja najpierw w terminach translacji (stwierdzenie 4.11), w języku geometrycznym (twierdzenie 4.12) i na koniec w terminach abstrakcyjnej teorii krat (twierdzenie 4.13). W **rozdziale piątym** skonstruuję kratę która będzie półmodularna w sesie Wilcoxa. Podana konstrukcja geometrycznie będzie odpowiadać konstrukcji przestrzeni afinicznej poprzez usunięcie z przestrzeni rzutowej pewnej hiperpłaszczyzny. Konstrukcja ta posłuży do wykazania, że krata afiniczna jest słabo modularna (stwierdzenie 5.6 i wniosek 5.10), co geometrycznie oznacza, że wiązka podprzestrzeni przez ustalony punkt w przestrzeni afinicznej jest przestrzenią rzutową. **Ostatnie dwa rozdziały** będą wiązać teorię krat z geometrią. W twierdzeniu 7.1 podam warunki charakteryzujące kratę modularną, natomiast twierdzenie 7.10 w pełni charakteryzuje skończenie wymiarową przestrzeń afiniczną. Na koniec, w twierdzeniu 7.11 zacytuję z [6] charakteryzację dowolnie wymiarowej przestrzeni afinicznej.

Rozdział 1

Pojęcia podstawowe

1.1 Przestrzeń afiniczna i rzutowa

Definicja 1.1. Niech S będzie niepustym zbiorem i $\mathcal{L} \subseteq 2^S$. Elementy zbioru S nazywamy *punktami*, natomiast elementy zbioru $\mathcal{L}$ nazywamy *prostymi.* Strukturę $\langle S, \mathcal{L} \rangle$ nazywamy *częściową przestrzenią prostych* , gdy spełnione są następujące warunki:

(i) $\mathcal{L} \neq \emptyset$.

(ii) na każdej prostej leżą przynajmniej dwa punkty tzn., jeśli $k \in \mathcal{L}$, to $\mid k \mid \geqslant 2$,

(iii) dwie różne proste mają co najwyżej jeden punkt wspólny tzn., jeśli $k_1, k_2 \in \mathcal{L}$ i $\mid k_1 \cap k_2 \mid \geqslant 2$, to $k_1 = k_2$,

Jeżeli $a, b \in S$ są takimi punktami, że istnieje prosta $k \in \mathcal{L}$ na której one leżą, tzn. $a, b \in k$ wówczas mówimy krótko, że punkty a, b są *współliniowe.* Jeśli dodatkowo $a \neq b$, to prosta k jest wyznaczona jednoznacznie (wynika to z warunku (i) w 1.1 i oznaczamy ją $\overline{ab}$. Dualnie, jeśli $k, l \in \mathcal{L}$ są takimi prostymi, że istnieje ich punkt wspólny $a \in S$, tzn., $a \in k \cap l$, to mówimy, że proste k, l *przecinają się.*

Definicja 1.2. Strukturę $\langle S, \mathcal{L} \rangle$ nazywamy *przestrzenią prostych*, gdy jest częściową przestrzenią prostych oraz spełniony jest następujący warunek:

(iv) każde dwa punkty są współliniowe, tzn. dla każdych $a, b \in S$ istnieje $k \in \mathcal{L}$ takie, że $a, b \in k$.

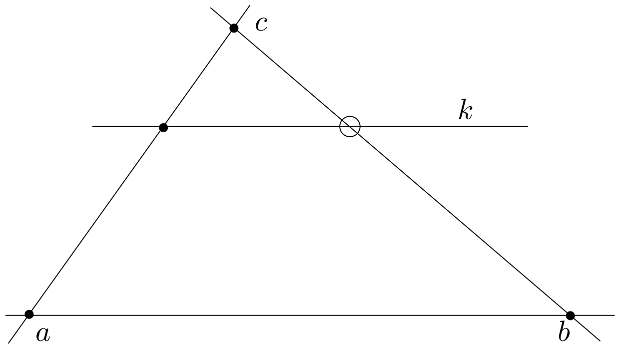
Definicja 1.3. Niech $\langle S, \mathcal{L} \rangle$ będzie częściową przestrzenią prostych i niech $\parallel \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ będzie binarną relacją na zbiorze prostych $\mathcal{L}$. Relację $\parallel$ nazywamy relacją *równoległości*, gdy spełnione są następujące warunki:

(i) $\parallel$ jest relacją równoważności,

(ii) przez każdy punkt możemy przeprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej, tzn., dla każdego $a \in S$ i $k \in \mathcal{L}$ istnieje dokładnie jedna prosta $l \in \mathcal{L}$ taka, że $a \in l$ i $l \| k$.

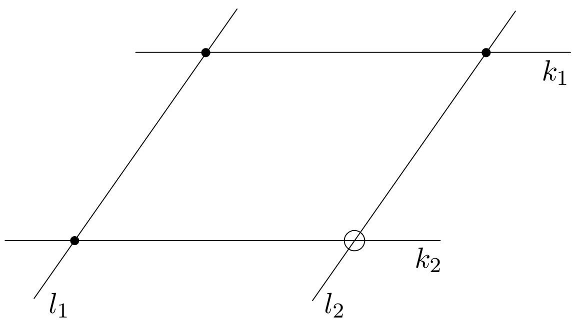
Relacja równoległości dzieli zbiór prostych na klasy abstrakcji, które nazywamy *kierunkami*. Warunek (ii) w powyższej definicji to pełny postulat Euklidesa dotyczący równoległości. Czasem osłabia się go żądając, że istnieje co najwyżej jedna odpowiednia prosta.

Definicja 1.4. Afiniczny warunek Veblena (AVC).
Niech $a, b, c \in S$ tworzą niezdegenerowany trójkąt tzn., a, b, c są niewspółliniowe, ale parami współliniowe. Jeśli prosta $k \in \mathcal{L}$ przecina bok $\overline{ac}$ i $k \| \overline{ab}$ to k przecina bok $\overline{bc}$ (rys. 1.1).



Rysunek 1.1: Afiniczny warunek Veblena (AVC).

Definicja 1.5. Warunek uzupełniania do równoległoboku (PC).
Niech $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathcal{L}$. Jeśli prosta k_2 przecina proste l_1 i l_2, prosta l_2 przecina proste k_1 i k_2 oraz $k_1 \| k_2$ i $l_1 \| l_2$ to k_2 przecina l_2 (rys. 1.2).



Rysunek 1.2: Warunek uzupełniania do równoległoboku (PC).

Definicja 1.6. Strukturę $\langle S, \mathcal{L}, \| \rangle$ nazywamy *przestrzenią afiniczną*, gdy jest przestrzenią prostych wraz z relacją równoległości, oraz gdy spełnione są warunki: (AVC) i (PC).

Definicja 1.7. Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, \| \rangle$ będzie przestrzenią afiniczną. *Podprzestrzenią* przestrzeni $\mathfrak{A}$ nazywamy zbiór $X \subseteq S$ spełniający warunki:

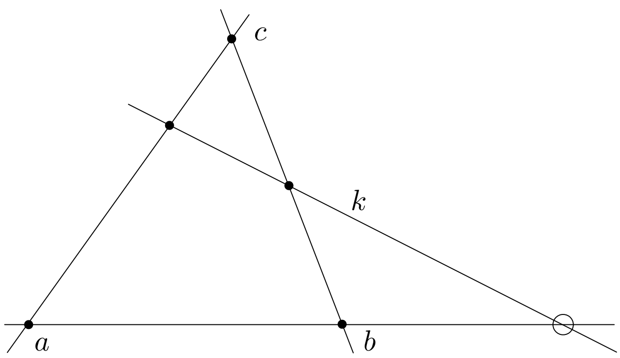
(i) X jest zamknięty ze względu na prowadzenie prostych tzn., dla dowolnej prostej $k \in \mathcal{L}$ jeśli $| k \cap X | \geqslant 2$, to $k \subseteq X$,

(ii) X jest zamknięty ze względu na prowadzenie prostych równoległych tzn., jeśli $k, l \in \mathcal{L}$, $k \subseteq X$, $k \parallel l$ oraz $l \cap X \neq \emptyset$ to $l \subseteq X$.

Warunek (i) w powyższej definicji stanowi definicję podprzestrzeni w dowolnej częściowej przestrzeni prostych.

Definicja 1.8. Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, \| \rangle$ będzie przestrzenią afiniczną. Podprzestrzeń $H \subseteq S$ nazywamy *hiperpłaszczyzną* w $\mathfrak{A}$, gdy dla dowolnej prostej $k \in \mathcal{L}$ mamy: albo $k \subseteq H$ albo w H istnieje prosta l taka, że $k \parallel l$ albo k przecina H w punkcie.

Definicja 1.9. Rzutowy warunek Veblena (PVC).
Jeżeli prosta $k \in \mathcal{L}$ przecina dwa boki trójkąta w dokładnie dwóch różnych punktach, to przecina też trzeci bok tego trójkąta, gdzie trójkąt rozumiemy jako trzy parami różne, parami przecinające się i niewspółpękowe proste (rys. 1.3)



Rysunek 1.3: Rzutowy warunek Veblena (PVC).

Definicja 1.10. Strukturę $\mathfrak{P} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ nazywamy *przestrzenią rzutową* gdy:

(i) $\mathfrak{P}$ jest przestrzenią prostych,

(ii) na każdej prostej leżą przynajmniej trzy różne punkty,

(iii) $\mathfrak{P}$ spełnia rzutowy warunek Veblena.

Definicja 1.11. Niech $\mathfrak{P} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ będzie przestrzenią rzutową. Podprzestrzeń $H \subseteq S$ nazywamy *hiperpłaszczyzną* w $\mathfrak{P}$, gdy dla dowolnej prostej $k \in \mathcal{L}$ mamy: albo $k \subseteq H$ albo k przecina H w punkcie.

1.2 Kraty

Definicja 1.12. Niech P będzie niepustym zbiorem i niech $\leqslant \subseteq P \times P$ będzie binarną relacją na zbiorze P. Rozważmy następujące własności relacji $\leqslant$. Niech $a, b, c \in P$, wówczas

(i) $a \leqslant a$, *(zwrotność)*

(ii) jeśli $a \leqslant b$ i $b \leqslant a$, to $a = b$, *(antysymetryczność)*

(iii) jeśli $a \leqslant b$ i $b \leqslant c$, to $a \leqslant c$, *(przechodniość)*

(iv) $a \leqslant b$ lub $b \leqslant a$. *(liniowość)*

Strukturę $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant \rangle$, w której relacja $\leqslant$ spełnia warunki (i), (ii) i (iii) nazywamy zbiorem częściowo uporządkowanym *(posetem)*. Jeśli ponadto relacja $\leqslant$ spełnia warunek (iv), to poset $\mathcal{P}$ nazywamy *łańcuchem*.

Definicja 1.13. Poset $\mathcal{P}$ nazywamy *kratą*, jeśli dla dowolnych $a, b \in P$ istnieją kresy $\sup\{a, b\}$ oraz $\inf\{a, b\}$, czyli odpowiednio: najmniejsze spośród górnych ograniczeń zbioru $\{a, b\}$ i największe spośród ograniczeń dolnych zbioru $\{a, b\}$. W dalszej części pracy będziemy używać następujących oznaczeń:

$$\sup\{a, b\} \overset{ozn}{=} a \vee b, \qquad \inf\{a, b\} \overset{ozn}{=} a \wedge b.$$

Kratę zdefiniowaną jako poset czyli zbiór $\langle P, \leqslant \rangle$ można traktować jako strukturę algebraiczną $\langle \mathcal{P}, \vee, \wedge \rangle$ czyli zbiór i dwie operacje binarne na nim: operacja kresu górnego i kresu dolnego, obie idempotentne, łączne, i przemienne. Oba podejścia są równoważne tzn., krata jako algebra jest definiowalna w kracie jako poset i na odwrót [5, Roz. 1]. Tak więc dalej poprzez kratę mamy na myśli jednocześnie poset i odpowiednią algebrę. Dla uproszczenia kratę utożsamiamy ze zbiorem jej elementów, co nie powinno prowadzić do nieporozumień.
Przez L będziemy oznaczać dowolną kratę, jeśli nie jest napisane inaczej.

Definicja 1.14. Niepusty podzbiór K kraty L nazywamy *podkratą*, gdy K jast domknięty ze względu na operacje $\vee$ i $\wedge$, tzn jeśli $a, b \in K$ to $a \vee b \in K$ oraz $a \wedge b \in K$.

Podkrata X kraty L z operacjami $\vee, \wedge$ z wyjściowej kraty L obciętymi do X (z porządkiem $\leqslant$ w L obciętym do $X \times X$) jest kratą.

Definicja 1.15. Niech $a, b \in L$ takie, że $a \leqslant b$. Wtedy zbiór postaci:

$$[a, b] := \{x \in L : a \leqslant x \leqslant b\}$$

nazywamy *odcinkiem* kraty L.

Lemat 1.16. *W dowolnej kracie L dla $a, b \in L$ odcinek $[a, b]$ jest podkratą.*

Dowód. Niech L będzie kratą. Weźmy dowolne $x, y \in [a, b]$. Pokażemy, że $x \wedge y \in [a, b]$ oraz $x \vee y \in [a, b]$.
Z 1.15 mamy $a \leqslant x \leqslant b$ i $a \leqslant y \leqslant b$. Więc a jest ograniczeniem dolnym x i y. Podobnie b jest ograniczeniem górnym x i y. Zatem

$$a \leqslant x \wedge y \text{ oraz } x \wedge y \leqslant b. \tag{1.1}$$

Mamy też

$$a \leqslant x \vee y \text{ oraz } x \vee y \leqslant b. \tag{1.2}$$

Zatem z (1.1) mamy $x \wedge y \in [a, b]$, a z (1.2) mamy $x \vee y \in [a, b]$. Więc $[a, b]$ jest podkratą kraty L. □

Definicja 1.17. Podkratę I w kracie L nazywamy *ideałem*, gdy dla każdego $a \in I$ oraz $x \in L$ mamy $a \wedge x \in I$.

Definicja 1.18. Niech $a \in L$. Wtedy zbiór postaci:

$$(a] := \{x \in L : x \leqslant a\}$$

nazywamy *ideałem głównym.*

Definicja 1.19. Filtr w kracie definiuje się dualnie do ideału, tzn. podkrata F karty L jest *filtrem*, gdy dla każdego $a \in F$ oraz $x \in L$ mamy $a \vee x \in F$.

Definicja 1.20. Niech $a \in L$. Wtedy zbiór postaci:

$$[a) := \{x \in L : a \leqslant x\}$$

nazywamy *filtrem głównym.*

Definicja 1.21. Poset $\mathcal{P}$ nazywamy *ograniczonym z góry*, gdy zawiera element największy 1, to znaczy dla każdego $a \in P$ mamy $a \leqslant 1$. Poset $\mathcal{P}$ nazywamy *ograniczonym z dołu*, gdy zawiera element najmniejszy 0, to znaczy dla każdego $a \in P$ mamy $0 \leqslant a$. Jeśli poset $\mathcal{P}$ posiada 0 i 1, to nazywamy go ograniczonym.

Definicja 1.22. W kracie ograniczonej L element a jest *dopełnieniem* elementu b wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a \wedge b = 0 \qquad \text{oraz} \qquad a \vee b = 1.$$

Zauważmy, że aby w ogóle mówić o dopełnieniach w kracie L to musi ona zawierać 0 i 1, także założenie, że L jest ograniczona jest tutaj jak najbardziej uzasadnione.

Definicja 1.23. Rozważmy odcinek $[a, b]$ w dowolnej kracie L oraz dwa elementy $x, y \in [a, b]$. Mówimy, że element y jest *względnym dopełnieniem* elementu x w odcinku $[a, b]$, gdy

$$x \wedge y = a \qquad \text{oraz} \qquad x \vee y = b.$$

Definicja 1.24. Mówimy, że krata L jest *modularna*, gdy dla dowolnych elementów $a, b, c \in L$ spełniony jest warunek

$$\text{jeśli} \quad a \leqslant b, \quad \text{to} \quad a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b. \tag{M}$$

Lemat 1.25. *W ograniczonej kracie modularnej, jeśli element posiada dopełnienie, to posiada również względne dopełnienie w każdym odcinku, do którego należy.*

DOWÓD. Niech z będzie dopełnieniem elementu x i niech $[a, b]$ będzie takim odcinkiem, że $x \in [a, b]$. Rozważmy $y = a \vee (z \wedge b)$. Zauważmy, że $y \in [a, b]$. Ponieważ krata jest modularna, to mamy

$$\begin{aligned} x \wedge y = x \wedge \big(a \vee (z \wedge b)\big) &= x \wedge (a \vee z) \wedge b = \\ &= \big(a \vee (z \wedge x)\big) \wedge b = (a \vee 0) \wedge b = a \wedge b = a. \end{aligned}$$

Analogicznie można pokazać, że $x \vee y = b$. □

Definicja 1.26. Niech L będzie kratą oraz $a, b \in L$. Mówimy, że a *poprzedza* b i piszemy $a \prec b$, gdy spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli} \quad c \in L \quad \text{i} \quad a \leqslant c \leqslant b, \quad \text{to} \quad c = a \quad \text{lub} \quad c = b. \tag{1.3}$$

Ponadto $a \preceq b$ oznacza, że $a \prec b$ lub $a = b$.

Definicja 1.27. Krata L jest *półmodularna z góry*, gdy dla dowolnych elementów $a, b, c \in L$ spełniony jest warunek

$$\text{jeśli} \quad a \prec b, \quad \text{to} \quad a \vee c \preceq b \vee c. \tag{UCC}$$

Kratę, która jest *półmodularna z góry* będziemy nazywać *półmodularną*.

Definicja 1.28. Krata L jest *półmodularna z dołu*, gdy dla dowolnych elementów $a, b, c \in L$ spełniony jest warunek

$$\text{jeśli} \quad a \prec b, \quad \text{to} \quad a \wedge c \preceq b \wedge c. \tag{LCC}$$

Twierdzenie 1.29 (K. Bienias [2])**.** *Krata L jest* półmodularna *wttw., gdy dla dowolnych elementów $a, b \in L$*

$$\textit{jeśli} \quad a \wedge b \prec b, \quad \textit{to} \quad a \prec a \vee b. \tag{Sm}$$

Definicja 1.30. Mówimy, że krata L jest *dualnie półmodularna*, gdy dla dowolnych elementów $a, b \in L$:

$$\text{jeśli} \quad b \prec a \vee b, \quad \text{to} \quad a \vee b \prec a. \tag{Sm^*}$$

Definicja 1.31. Krata L spełnia *warunek Birkhoffa*, gdy dla dowolnych elementów $a, b \in L$

$$\text{jeśli} \quad a \wedge b \prec a, b, \quad \text{to} \quad a, b \prec a \vee b. \tag{Bi}$$

Definicja 1.32. Krata L spełnia *dualny warunek Birkhoffa*, gdy dla dowolnych elementów $a, b \in L$

$$\text{jeśli} \quad a, b \prec a \vee b, \quad \text{to} \quad a \wedge b \prec a, b. \tag{Bi^*}$$

Definicja 1.33. Niech L będzie kratą ograniczoną z dołu i niech $p \in L$. Powiemy, że p jest *atomem* gdy spełniony jest następujący warunek $0 \prec p$.

Definicja 1.34. Krata L jest *atomowa*, gdy jest ograniczona z dołu oraz dla $a \in L \setminus \{0\}$ istnieje atom $p \in P$ taki, że $p \leqslant a$.

Definicja 1.35. Krata L ograniczona z dołu jest *atomistyczna*, gdy każdy jej element różny od 0 da się wyrazić jako kres górny atomów.

Definicja 1.36. Niech L będzie kratą z 0. L spełnia *warunek atomowego pokrywania*, gdy dla dowolnego $a \in L$

$$\text{jeśli} \quad p \quad \text{jest atomem} \quad \text{oraz} \quad a \wedge p = 0, \quad \text{to} \quad a \prec a \vee p \tag{C}$$

Definicja 1.37. Niech L będzie kratą z 0, która jest atomowa lub atomistyczna. L spełnia *warunek wymiany Steintz'a-Mac Lane'a*, gdy dla $a \in L$ i atomów $p, q \in L$:

$$\text{jeśli} \quad a \wedge p = 0 \quad \text{i} \quad p \leqslant a \vee q, \quad \text{to} \quad q \leqslant a \vee p. \tag{EP}$$

Twierdzenie 1.38 (K. Bienias [2])**.** *Jeśli krata spełnia* (M) *to spełnia również* (Sm), (Sm*), (Bi*), (Bi), (EP), (C).

Definicja 1.39. Niech L będzie kratą ograniczoną z dołu i niech $a \in L$. Wtedy długość najdłuższego, skończonego, maksymalnego łańcucha C w odcinku $[0, a]$, czyli liczbę $|C| - 1$, będziemy nazywać *wysokością* elementu a w kracie L. Jeśli taki łańcuch nie istnieje to będziemy przyjmować, ze wysokość jest nieskończona.

Twierdzenie 1.40 (G. Grätzer [5])**.** *Niech L będzie kratą skończonej wysokości. Jeśli krata jest półmodularna, to każde dwa maksymalne łańcuchy w L są tej samej długości.*

Rozdział 2

Pary modularne

2.1 Podstawowe własności par modularnych

Niech L będzie dowolną kratą.

Definicja 2.1. Parę uporządkowaną elementów (a, b) w kracie L nazywa się *parą modularną*, co zapisuje się $a \mathrm{M} b$, gdy spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli} \quad x \in L \quad \text{i} \quad x \leqslant b, \quad \text{to} \quad x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b. \tag{2.1}$$

Lemat 2.2. *W dowolnej kracie L dla $x, a, b \in L$*

$$\textit{jeśli} \quad x \leqslant b \quad \textit{to} \quad x \vee (a \wedge b) \leqslant (x \vee a) \wedge b.$$

Dowód. Załóżmy, że $x \leqslant b$. Wiemy, że:

$$x \leqslant x \vee a, \tag{2.2}$$

oraz

$$x \leqslant x \vee b. \tag{2.3}$$

Z (2.2) i (2.3) mamy, że

$$x \leqslant (x \vee a) \wedge (x \vee b). \tag{2.4}$$

Wiemy, że:

$$a \wedge b \leqslant a \leqslant x \vee a, \tag{2.5}$$

oraz

$$a \wedge b \leqslant b \leqslant x \vee b. \tag{2.6}$$

Zatem z (2.5) i (2.6) mamy:

$$a \wedge b \leqslant (x \vee a) \wedge (x \vee b). \tag{2.7}$$

Z (2.4) i (2.7) mamy:

$$x \vee (a \wedge b) \leqslant (x \vee a) \wedge (x \vee b). \tag{2.8}$$

Z założenia $x \leqslant b$ mamy

$$x \vee b = b. \tag{2.9}$$

Zatem z (2.8) i (2.9) otrzymujemy żądaną nierówność $x \vee (a \wedge b) \leqslant (x \vee a) \wedge b$.
□

Tak więc w definicji 2.1 znak równości możemy zastąpić nierównością, gdyż nierówność $\leqslant$ prawdziwa jest w każdej kracie.

Bezpośrednio z określenia modularności i pary modularnej wynika następujący związek.

Fakt 2.3. *W kracie modularnej L relacja* M *jest totalna, tzn. dla każdych dwóch elementów $a, b \in L$ mamy $a \,\mathrm{M}\, b$.*

Definicja 2.4. Para elementów (a, b) w kracie L *nie tworzy pary modularnej*, co zapisuje się $a \,\bar{\mathrm{M}}\, b$, gdy spełnia następujący warunek:

$$\text{istnieje} \quad x \in L \quad \text{taki, że} \quad x < b, \quad \text{oraz} \quad x \vee (a \wedge b) \neq (x \vee a) \wedge b. \tag{2.10}$$

Zanotujmy teraz kilka elementarnych własności par modularnych.

Lemat 2.5. *Niech $a, b \in L$. Jeśli $a \leqslant b$ lub $b \leqslant a$, to $a \,\mathrm{M}\, b$.*

DOWÓD. Rozważmy najpierw przypadek, gdy $a \leqslant b$. Weźmy $x \leqslant b$. Wtedy

$$x \vee (a \wedge b) = x \vee a = (x \vee a) \wedge b$$

ponieważ $x \vee a \leqslant b$.
Teraz załóżmy $b \leqslant a$. Weźmy $x \leqslant b$. Stąd $x \leqslant a$. Wtedy

$$x \vee (a \wedge b) = x \vee b = b = a \wedge b = (x \vee a) \wedge b.$$

□

Natychmiastowym wnioskiem z udowodnionego lematu jest:

Wniosek 2.6. *W kracie ograniczonej L dla $a \in L$ zachodzi:*

(i) $0 \,\mathrm{M}\, a$,

(ii) $a \,\mathrm{M}\, 0$,

(iii) $a \,\mathrm{M}\, a$,

(iv) $a \,\mathrm{M}\, 1$,

(v) $1 \,\mathrm{M}\, a$.

Lemat 2.7. *Jeśli $a \in L$ i p jest atomem w L to $a \,\mathrm{M}\, p$.*

DOWÓD. Weźmy $x \leqslant p$. Wtedy $x = p$ lub $x = 0$.
Jeśli $x = p$ to

$$x \vee (a \wedge p) = p \vee (a \wedge p) = p = (p \vee a) \wedge p = (x \vee a) \wedge p.$$

Jeśli $x = 0$ to

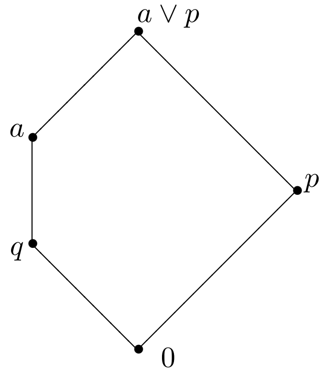
$$x \vee (a \wedge p) = 0 \vee (a \wedge p) = p \wedge a = (0 \vee a) \wedge p = (x \vee a) \wedge p.$$

□

Jeśli a i p są takie jak w lemacie 2.7 to nie musi zachodzić $p \mathrm{M} a$. Popatrzmy na następującą kratę generowaną przez pięć elementów $\{0, p, q, a, a \vee p\}$ spełniającą warunki: $q < a, a \vee p = q \vee p, a \wedge p = q \wedge p = 0$. Jest to krata N_5 zwana kratą pięciokąta (rys. 2.1.1). Element p jest w niej atomem ale z elementem a nie tworzą pary modularnej $p \mathrm{M} a$ bo:

$$q \vee (p \wedge a) = q \neq a = (q \vee p) \wedge a,$$

co dowodzi, że relacja M nie jest symetryczna.



Rysunek 2.1.1: Para niemodularna $p \bar{\mathrm{M}} a$, gdzie p jest atomem.

Definicja 2.8. Kratę L, w której relacja M jest symetryczna, czyli M spełnia warunek

$$\text{jeśli} \quad a, b \in L \quad \text{i} \quad a \mathrm{M} b, \quad \text{to} \quad b \mathrm{M} a \tag{Ms}$$

nazywamy kratą *M-symetryczną*.

Twierdzenie 2.9. *Niech $a, b \in L$. Wówczas $a \mathrm{M} b$ wttw., gdy krata L nie zawiera takiego pięciokąta: $\{a \wedge b, a, x, y, a \vee x = a \vee y\}$, że $x < y \leqslant b$, (rys.* 2.1.2*).*

DOWÓD. " $\Rightarrow$ " Załóżmy, że $a \mathrm{M} b$. Przypuśćmy, że L zawiera odpowiedni pięciokąt. Weźmy $x \leqslant b$. Wtedy:

$$x \vee (a \wedge b) = x,$$

oraz

$$(x \vee a) \wedge b = y.$$

Zgodnie z 2.1 powinno być $x = y$ bo $a \mathrm{M} b$, ale z założenia $x \neq y$ i otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem krata L nie zawiera takiego pięciokąta.
" $\Leftarrow$ " Zakładamy, że krata L nie zawiera takiego pięciokąta i przypuśćmy, że $a \bar{\mathrm{M}} b$. Zatem zgodnie z 2.4 istnieje t takie, że $t < b$ oraz $t \vee (a \wedge b) \neq (t \vee a) \wedge b$.

Niech

$$x := t \vee (a \wedge b) \quad \text{oraz} \quad y := (t \vee a) \wedge b.$$

Zatem $x \neq y$. Zauważmy, że $x \leqslant y$ bo tak jest w każdej kracie na mocy lematu 2.2. Stąd mamy

$$x \wedge a \leqslant y \wedge a = (t \vee a) \wedge b \wedge a = a \wedge b. \tag{2.11}$$

Ponadto z określenia x mamy $a \wedge b \leqslant x$ skąd otrzymujemy

$$a \wedge b = a \wedge b \wedge a \leqslant x \wedge a.$$

Zatem z (2.11)

$$x \wedge a = a \wedge b. \tag{2.12}$$

Podstawiając odpowiednio za y otrzymujemy

$$y \wedge a = (t \vee a) \wedge b \wedge a = a \wedge b. \tag{2.13}$$

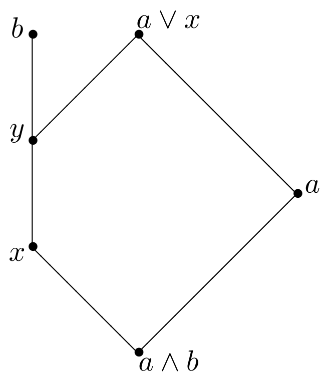
Podsumowując (2.12) i (2.13) mamy

$$x \wedge a = x \wedge a = a \wedge b. \tag{2.14}$$

Rozumując dualnie wykażemy, że

$$x \vee a = y \vee a = t \vee a. \tag{2.15}$$

W ten sposób elementy $\{a \wedge b, a, x, y, a \vee x\}$ tworzą pięciokąt, którego istnienie wykluczyliśmy na początku. Zatem nasze przypuszczenie, że $a \bar{\mathrm{M}} b$ jest fałszywe i ostatecznie $a \mathrm{M} b$. $\square$



Rysunek 2.1.2: Para niemodularna $a \bar{\mathrm{M}} b$.

Lemat 2.10. *Niech L będzie dowolną kratą. Jeśli $a, b \in [c, d]$ oraz $a \mathrm{M} b$ w odcinku $[c, d]$ to $a \mathrm{M} b$ w całej kracie L.*

DOWÓD. Załóżmy, że $a, b \in [c, d]$ oraz $a \mathrm{M} b$ w odcinku $[c, d]$. Niech $x \in L$ taki, że $x \leqslant b$. Wiemy, że $c \leqslant b$, bo $b \in [c, d]$. Zatem $x \vee c \leqslant b$. Stąd $c \leqslant x \vee c \leqslant b \leqslant d$, a więc $x \vee c \in [c, d]$. Z założenia, że $a \mathrm{M} b$ w odcinku $[c, d]$ oraz z nierówności $x \vee c \leqslant b$ mamy

$$(x \vee c) \vee (a \wedge b) = (x \vee c \vee a) \wedge b. \tag{2.16}$$

Lewa strona tej równości:

$$(x \vee c) \vee (a \wedge b) = x \vee [c \vee (a \wedge b)] = x \vee (a \wedge b). \tag{2.17}$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że $a \wedge b \in [c, d]$ więc $c \leqslant a \wedge b$, bo z 1.16 odcinek jest podkratą.
Prawa strona równości (2.16):

$$(x \vee c \vee a) \wedge b = (x \vee a) \wedge b \tag{2.18}$$

Tutaj równość wynika z faktu, że $c \leqslant a$. Ostatecznie z (2.16), (2.17) oraz (2.18) mamy $a \mathrm{M} b$ w całej kracie L, co kończy dowód.

□

W powyższym lemacie w szczególności możemy wziąć $c = a \wedge b$ oraz $d = a \vee b$. Zatem, aby sprawdzić, czy elementy a, b tworzą parę modularną w kracie L wystaczy sprawdzić, czy tworzą parę modularną w możliwie najmniejszym odcinku $[a \wedge b, a \vee b]$.

2.2 Dualne pary modularne

Definicja 2.11. Niech $a, b \in L$. Wtedy uporządkowana para elementów a, b tworzy *dualną parę modularną*, co zapiszemy $a \mathrm{M}^* b$, gdy dla dowolnego $x \in L$ mamy:

$$\text{jeśli} \quad b \leqslant x \quad \text{to} \quad x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee b.$$

Lemat 2.12. *Niech $a, b, c \in L$. Wtedy:*

$$a \mathrm{M} b \quad \textit{dla wszystkich} \quad b \in L \quad \Longleftrightarrow \quad a \mathrm{M}^* c \quad \textit{dla wszystkich} \quad c \in L.$$

DOWÓD. Niech $a \in L$. Wtedy $a \mathrm{M} b$ dla wszystkich $b \in L$ oznacza, że równość $x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b$ zachodzi dla wszystkich par (x, b) takich, że $x \leqslant b$. Natomiast $a \mathrm{M}^* x$ dla wszystkich $x \in L$ oznacza, że równość $b \wedge (a \vee x) = (b \wedge a) \vee x$ zachodzi dla wszystkich par (x, b) takich, że $x \leqslant b$. Stąd otrzymujemy żądaną równoważność. □

Lemat 2.13. *Niech $a, b \in L$. Wtedy:*

(i) *Jeśli* $a \wedge b \prec b$ *to* $a \mathrm{M} b$.

(ii) *Jeśli* $b \prec a \vee b$ *to* $a \mathrm{M}^* b$.

(iii) *Jeśli* $a \prec a \vee b$ *i* $a \mathrm{M} b$ *to* $a \wedge b \prec b$.

(iv) *Jeśli* $a \wedge b \prec a$ *i* $a \mathrm{M}^* b$ *to* $b \prec a \wedge b$.

DOWÓD. (i) Załóżmy, że $a \wedge b \prec b$. Na mocy lematu 2.10 wystarczy pokazać, że $a \mathrm{M} b$ w odcinku $[a \wedge b, a \vee b]$. Zatem niech $a \wedge b \leqslant x \leqslant b$. Stąd i założenia mamy albo $x = a \wedge b$ albo $x = b$.
Jeśli $x = a \wedge b$ to $x \vee (a \wedge b) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b) = a \wedge b$ oraz $(x \vee a) \wedge b = ((a \wedge b) \vee a) \wedge b = a \wedge b$. Zatem mamy $a \mathrm{M} b$, co kończy dowód w tym przypadku.
Jeśli $x = b$ to $x \vee (a \wedge b) = b \vee (a \wedge b) = b$ oraz $(x \vee a) \wedge b = (b \vee a) \wedge b = b$. Zatem mamy $a \mathrm{M} b$, co kończy dowód.
(ii) Dowód przebiega dualnie do (i).
(iii) Załóżmy, że $a \prec a \vee b$ oraz $a \mathrm{M} b$. Przypuśćmy, że $a \wedge b = b$. Wtedy mamy $b \leqslant a$. Stąd też wynika $a \vee b = a$, co jest sprzeczne z założeniem $a \prec a \vee b$. Zatem $a \wedge b < b$. Weźmy $c \in L$ takie, że

$$a \wedge b \leqslant c \leqslant b. \tag{2.19}$$

Z założenia $a \mathrm{M} b$ i definicji pary modularnej mamy

$$c = c \vee (a \wedge b) = (c \vee a) \wedge b. \tag{2.20}$$

Z (2.19) mamy $a \leqslant c \vee a \leqslant b \vee a$. Stąd i z założenia mamy albo $a = c \vee a$ albo $c \vee a = b \vee a$.
Jeśli $c \vee a = a$ to z (2.20) mamy też $c = (c \vee a) \wedge b = a \wedge b$.
Jeśli $c \vee a = b \vee a$ to z (2.20) $c = (c \vee a) \wedge b = b$.
Stąd i z (2.19) mamy $a \wedge b \prec b$.
(iv) Dowód przebiega dualnie do (iii). □

Lemat 2.14. *Niech* L *będzie kratą ograniczoną z dołu. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *W kracie* L *spełniony jest warunek* (C).

(ii) *Jeśli* p *jest atomem w kracie* L *to* $p \mathrm{M} x$ *dla wszystkich* $x \in L$.

(iii) *Jeśli* p *jest atomem w kracie* L *to* $p \mathrm{M}^* x$ *dla wszystkich* $x \in L$.

DOWÓD. Równoważność warunków (ii) i (iii) wynika z 2.12.
"(i) $\Rightarrow$ (iii)" Weźmy p będące atomem i dowolny $x \in L$. Pokażemy, że $p \mathrm{M}^* x$.
Rozważmy $x \wedge p$. Mamy dwie możliwości albo $x \wedge p = p$ albo $x \wedge p = 0$.
Jeśli zachodzi pierwszy przypadek to mamy $p \leqslant x$. Zatem na mocy twierdzenia dualnego do 2.5 mamy $p \mathrm{M}^* x$.
Jeśli zachodzi druga możliwość to na mocy (C) mamy $x \prec p \vee x$. Stąd na mocy

2.13(ii) mamy $p \, \mathrm{M}^* \, x$, co należało pokazać.
"(iii) $\Rightarrow$ (i)" Weźmy p będące atomem w L i $a \in L$ takie, że $a \wedge p = 0$. Stąd mamy $p \wedge a \prec p$. Z założeń mamy $p \, \mathrm{M}^* \, a$. Na mocy lematu 2.13(iv) otrzymujemy $a \prec p \vee a$, co należało pokazać.

$\square$

Rozdział 3

Równoległość

W pracy badamy związki teorii krat z geometrią afiniczną tak, że naturalne jest poświęcenie nieco uwagi relacji równoległości. Przedstawimy tutaj dwie relacje równoległości w ujęciu czysto kratowym.

Poza atomami, czyli elementami wysokości jeden, dosyć często będziemy potrzebować elementy wysokości dwa. Dla wygody będziemy je nazywać prostymi, co zgodne jest z intuicją.

Definicja 3.1. Niech L będzie kratą ograniczoną z dołu. Dla $a, b \in L$ takich, że $a, b \neq 0$ zdefiniujmy:

$$a <\mid b \iff a \wedge b = 0 \quad \text{i} \quad b \prec a \vee b, \tag{3.1}$$

$$a \leqslant\mid b \iff a <\mid b \quad \text{lub} \quad a \leqslant b, \tag{3.2}$$

$$a \parallel_L b \iff (a, b \prec a \vee b \quad \text{i} \quad a \wedge b = 0) \quad \text{lub} \quad a = b. \tag{3.3}$$

Zauważmy, że $a <\mid b$ w (3.1) geometrycznie należy rozumieć jako a równoległe niesymetrycznie do b, tzn. tak jak prosta a może być równoległa do płaszczyzny b. Niesymetrycznie, bo po pierwsze wymiary są różne. Po drugie, o ile a i b są rozłączne, co zakłada się w (3.1), to zauważmy, że a i b rozpinają podprzestrzeń 3-wymiarową, w której b jest hiperpłaszczyzną.

Relacja $\leqslant\mid$ jest zwrotnym odpowiednikiem $<\mid$ i wprowadzamy ją bo intuicyjnie równoległość jest zwrotna.

Formalna definicja (3.3) relacji $\parallel_L$ może wyglądać nieczytelnie na pierwszy rzut oka. Jej znaczenie wyjaśnia następujący lemat.

Lemat 3.2. *Niech L będzie kratą ograniczoną z dołu. Wtedy dla dowolnych $a, b \in L$ takich, że $a, b \neq 0$ mamy:*

$$a \leqslant\mid b \quad i \quad b \leqslant\mid a \iff a \parallel_L b.$$

Dowód. Gdy $a = b$ dowód jest zakończony. Załóżmy zatem $a \neq b$.

" $\Rightarrow$ " Niech $a \leqslant\mid b$ oraz $b \leqslant\mid a$. Z definicji 3.1 (3.1) mamy $a \wedge b = 0$, $b \prec a \vee b$, oraz $a \prec b \vee a$. Stąd i definicji 3.1 (3.3) mamy $a \parallel_L b$.

" $\Leftarrow$ " Niech $a \parallel_L b$. Wtedy $a \wedge b = 0$ oraz $a, b \prec a \vee b$, czyli na mocy definicji 3.1 (3.1) mamy $a <\mid b$ oraz $b <\mid a$. □

Wniosek 3.3. *Niech L będzie kratą ograniczoną z dołu. Wtedy dla dowolnych $a, b \in L$ takich, że $a \neq b$ oraz $a, b \neq 0$ mamy:*

$$a <\mid b \quad i \quad b <\mid a \quad \Longleftrightarrow \quad a \parallel_L b.$$

Tak więc $\parallel_L$ to symetryczna równoległość. Porównywane elementy muszą mieć tę samą wysokość w kracie, albo geometrycznie ten sam wymiar. Dalej dowodzimy kilka przydatnych własności wprowadzonych relacji. Wszystko dzieje się tutaj w kratach, ale intuicje geometryczne są czytelne.

Lemat 3.4. *Jeśli krata L spełnia* (C) *to dla $a \in L$ i atomu $p \in L$ zachodzi $p \leqslant\mid a$.*

Dowód. Niech $p \in L$ będzie atomem oraz $a \in L$. Możliwe są tylko dwa przypadki $a \wedge p = 0$ oraz $a \wedge p \neq 0$.
Jeśli $a \wedge p = 0$ to z warunku (C) mamy $a \prec a \vee p$, a więc $p <\mid a$.
Jeśli $a \wedge p \neq 0$ to mamy $a \leqslant p$, a więc $p \leqslant\mid a$, co kończy dowód. □

Lemat 3.5. *Niech L będzie kratą ograniczoną z dołu, dla dowolnych $a, b, c \in L$ jeśli $a \leqslant\mid b$ oraz $0 < c \leqslant a$, to $c \vee b = a \vee b$.*

Dowód. Niech $a \leqslant\mid b$ oraz

$$0 < c \leqslant a. \tag{3.4}$$

Jeśli $a \leqslant b$ to z (3.4) również $c \leqslant b$. Wówczas $c \vee b = b = a \vee b$.
Załóżmy więc na podstawie (3.2) że $a <\mid b$. Ponieważ $c \wedge b \leqslant a \wedge b = 0$, więc $c \nleqslant b$. Stąd

$$b < b \vee c. \tag{3.5}$$

Dalej z (3.4) oraz (3.5) mamy $b < c \vee b \leqslant a \vee b$, ale z (3.1) mamy $b \prec a \vee b$. Tak więc $c \vee b = a \vee b$, co kończy dowód. □

Z powyższego lematu oraz z definicji 3.1 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.6. *Niech L będzie kratą ograniczoną z dołu, dla dowolnych $a, b, c \in L$ jeśli $a \leqslant\mid b$ oraz $0 < c \leqslant a$, to $c \leqslant\mid b$.*

Lemat 3.7. *Niech L będzie kratą ograniczoną z dołu, $a, b, c \in L$ oraz $a <\mid b$. Jeśli $0 < c \leqslant a$ i c nie jest atomem to $b \,\bar{\mathrm{M}}\, c$.*

Dowód. Niech $a <\mid b$, $0 < c \leqslant a$ oraz c nie jest atomem. Zatem istnieje $p \in L$ takie, że $0 < p < c$. Z 3.5 mamy $p \vee b = a \vee b$ oraz $c \vee b = a \vee b$. Stąd

$$(p \vee b) \wedge c = (c \vee b) \wedge c = c. \tag{3.6}$$

Ponadto $b \wedge c = 0$ ponieważ $b \wedge a = 0$ z (3.1). Stąd

$$p \vee (b \wedge c) = p \vee 0 = p. \tag{3.7}$$

Wiemy, że $p \neq c$. Zatem na mocy definicji pary niemodularnej z (3.6) i (3.7) dostajemy $b \,\bar{\mathrm{M}}\, c$. □

Lemat 3.8. *Niech L będzie kratą atomistyczną, skończonej wysokości spełniającą warunek* (C) *oraz niech $l, a \in L$, gdzie l jest elementem wysokości dwa (l jest prostą). Wówczas $l <| a$ wttw., gdy $a \bar{\mathrm{M}} l$.*

Dowód. " $\Rightarrow$ " Załóżmy, że $l <| a$. Wtedy z lematu 3.7 mamy $a \bar{\mathrm{M}} l$ co należało pokazać.

" $\Leftarrow$ " Załóżmy, że $a \bar{\mathrm{M}} l$. Wtedy istnieje

$$c \leqslant l \tag{3.8}$$

takie, że

$$c \vee (a \wedge l) < (c \vee a) \wedge l. \tag{3.9}$$

Element c może mieć wysokość zero, jeden lub dwa, tzn. $c = 0$, c jest atomem lub $c = l$. Oba skrajne przypadki nie są możliwe z uwagi na (3.9), więc c jest atomem. Ponieważ z (3.9)

$$c \leqslant c \vee (a \wedge l) < (c \vee a) \wedge l \leqslant l,$$

więc $c = c \vee (a \wedge l)$ oraz $(c \vee a) \wedge l = l$. Stąd odpowiednio

$$a \wedge l \leqslant c \qquad \text{oraz} \qquad l \leqslant c \vee a. \tag{3.10}$$

Gdyby $a \wedge l \neq 0$ to $a \wedge l = c$ bo c jest atomem. Wówczas z (3.10)

$$l \leqslant c \vee a = (a \wedge l) \vee a = a.$$

Stąd $l = a \wedge l = c$ i dostajemy sprzeczność. Dlatego też $a \wedge l = 0$. Stąd $a \wedge c = 0$ bo $c \leqslant l$. Z warunku (C) mamy

$$a \prec a \vee c. \tag{3.11}$$

Z drugiej nierówności w (3.10) mamy $a \vee l \leqslant a \vee c$. Z uwagi na (3.8) dostajemy $a \vee l = a \vee c$. W ostateczności z (3.11) $a \prec a \vee l$, co oznacza $l <| a$ z definicji 3.1. □

Stwierdzenie 3.9. *Niech L będzie kratą atomową spełniającą warunek* (C) *i niech $a, b \in L$ będą niezerowe. Wtedy:*

(i) *$a <| b$ wttw., gdy $a \wedge b = 0$ i istnieje atom $p \in L$ taki, że $p \leqslant a$ oraz $p \vee b = a \vee b$,*

(ii) *$a \parallel_L b$ wttw., gdy albo $a = b$ albo $a \wedge b = 0$ i istnieją atomy $p, q \in L$ takie, że $p \leqslant a$, $q \leqslant b$ i $a \vee q = b \vee p$.*

Dowód. (i) " $\Rightarrow$ " Załóżmy, że $a <| b$. Krata jest atomowa więc istnieje atom $p \in L$ taki, że $p \leqslant a$. Z założenia oraz lematu 3.5 dostajemy $p \vee b = a \vee b$.

" $\Leftarrow$ " Załóżmy, że istnieje atom $p \in L$ taki, że $p \leqslant a$ oraz $p \vee b = a \vee b$. Stąd mamy $p \wedge b \leqslant a \wedge b = 0$, więc z warunku (C) mamy $b \prec b \vee p$. Zatem $a <| b$ na mocy definicji 3.1 (3.1).

(ii) W przypadku gdy $a = b$ dowód zakończony. Załóżmy zatem $a \neq b$.

" $\Rightarrow$ " Załóżmy, że $a \parallel_L b$. Z lematu 3.2 mamy $a <| b$ i $b <| a$. Zatem z (i) zastosowanego dwa razy istnieją atomy $p, q \in L$ takie, że $p \leqslant a$, $q \leqslant b$ oraz $a \vee q = a \vee b = b \vee p$.

" $\Leftarrow$ " Załóżmy, że $a \wedge b = 0$ oraz istnieją atomy $p, q \in L$ takie, że $p \leqslant a$, $q \leqslant b$ i $a \vee q = b \vee p$. Zatem mamy $b \leqslant a \vee q$, a więc $a \vee b \leqslant a \vee q \leqslant a \vee b$. Stąd $a \vee q = a \vee b$. Podobnie $b \vee p = a \vee b$, co kończy dowód na mocy (i). $\square$

Lemat 3.10. *Niech L będzie kratą ograniczoną z dołu spełniającą warunek (C). Wtedy dla dowolnych $a, b, c \in L$ jeśli $a <| b$, $b \leqslant c$ oraz $a \wedge c = 0$ to $a <| c$.*

Dowód. Załóżmy, że $a <| b$, $b \leqslant c$ oraz $a \wedge c = 0$. Ze stwierdzenia 3.9(i) istnieje atom $p \leqslant a$ taki, że

$$p \vee b = a \vee b. \tag{3.12}$$

Ponadto $p \wedge c = 0$ bo $a \wedge c = 0$. Zatem z warunku (C) mamy

$$c \prec p \vee c. \tag{3.13}$$

Z tego, że $p \leqslant a$ mamy

$$p \vee c \leqslant a \vee c \tag{3.14}$$

Z założenia $b \leqslant c$ i z (3.12) mamy

$$a \leqslant a \vee b = p \vee b \leqslant p \vee c$$

Stąd

$$a \vee c \leqslant p \vee c \tag{3.15}$$

Z (3.14) i (3.15) dostajemy $p \vee c = a \vee c$ i z (3.13) ostatecznie $c \prec a \vee c$. $\square$

Twierdzenie 3.11. *Niech L będzie kratą atomistyczną, skończonej wysokości spełniającą warunek (C) i niech $a, b \in L$ takie, że $a, b \neq 0$. Wówczas $a \leqslant| b$ wttw., gdy zachodzi jeden z poniższych warunków:*

(i) *$a \wedge b = 0$ oraz $b \,\bar{\mathrm{M}}\, l$ dla każdej prostej $l \leqslant a$, albo*

(ii) *$a \leqslant b$.*

Dowód. Niech $a, b \in L$ takie, że $a, b \neq 0$.

" $\Rightarrow$ " Załóżmy, że $a \leqslant| b$. Z definicji 3.1 mamy albo $a <| b$, albo $a \leqslant b$. Rozważmy obie sytuacje.

W pierwszym przypadku $a \wedge b = 0$ i $b \prec a \vee b$ ponownie z 3.1. Weźmy dowolną prostą (element wysokości 2) $l \leqslant a$. Z 3.7 mamy $b \,\bar{\mathrm{M}}\, l$. W ten sposób otrzymaliśmy (i).

W drugim przypadku, gdy $a \leqslant b$, mamy natychmiast (ii).

" $\Leftarrow$ " Gdy zachodzi (ii) to dowód jest zakończony z uwagi na 3.1. Załóżmy więc, że zachodzi (i). Trzeba pokazać, że $a <\!| \, b$. Z (i) mamy $a \wedge b = 0$, więc z 3.1 wystarczy wykazać

$$b \prec a \vee b.$$

Przypuśćmy, że tak nie jest. Ponieważ zawsze $b \leqslant a \vee b$, więc nawet

$$b < a \vee b$$

bo gdyby $b = a \vee b$, to $a \leqslant b$ i wtedy $a = a \wedge b = 0$, co jest niemożliwe z uwagi na założenie, że $a \neq 0$. W tej sytuacji różnica wysokości b i $a \vee b$ jest co najmniej 2, więc musi istnieć co najmniej prosta $l \leqslant a$ taka, że $b \vee l$ jest o dwa poziomy nad b. Z (i) mamy $b \,\bar{\mathrm{M}}\, l$. Stąd i z 3.8 dostajemy $l <\!| \, b$, co z kolei oznacza, że w szczególności $b \prec b \vee l$ na mocy 3.1. Mamy sprzeczność bo $b \vee l$ miało być znacznie wyżej od b. $\square$

Rozdział 4

Kraty geometryczne

Krata geometryczna według [1] to M-symetryczna (spełniająca (Ms)) krata kompaktowo atomistyczna. Termin *kompaktowo atomistyczna* oznacza kratę, która jest zupełna, atomistyczna i algebraiczna. Krata L jest z kolei *algebraiczna*, gdy dla atomu $p \in L$ i dowolnego, niekoniecznie skończonego zbioru indeksów I, jeśli $p \leqslant \bigvee\{a_i \in L \colon i \in I\}$, to można wybrać taki skończony podzbiór $J \subseteq I$, że $p \leqslant \bigvee\{a_i \in L \colon i \in J\}$. Nazwa wywodzi się z faktu, że każda krata podalgebr ustalonej algebry posiada tę własność i każda krata algebraiczna jest izomorficzna z pewną kratą podalgebr. Sytuacja mocno się upraszcza w przypadku krat skończonej wysokości. Według [3] krata skończonej wysokości jest geometryczna, gdy jest półmodularna i atomistyczna. Zauważmy, że (por. [2]) w kracie skończonej wysokości warunki (Ms), czyli symetria relacji M oraz (UCC), czyli półmodularność, są równoważne.

Najlepiej zbadane są kraty geometryczne związane z klasycznymi geometriami: rzutową i afiniczną. Ich najbardziej podstawowym własnościom poświęcimy ten rozdział. W kolejnych rozdziałach skupimy się na dalszych własnościach krat afinicznych.

4.1 Krata rzutowa

Pojęcie przestrzeni rzutowej wprowadziliśmy w 1.10. Mówimy, że krata L jest *rzutowa*, gdy istnieje przestrzeń rzutowa $\mathfrak{P}$ taka, że L jest izomorficzna z kratą $L(\mathfrak{P})$ wszystkich podprzestrzeni przestrzeni $\mathfrak{P}$ z relacją inkluzji jako relacją częściowego porządku.

Krata rzutowa L jest zawsze ograniczona, z dołu przez zbiór pusty, a z góry przez całą przestrzeń, które przypomnijmy są szczególnymi podprzestrzeniami $\mathfrak{P}$. Przekrój dowolnej liczby podprzestrzeni przestrzeni rzutowej jest zawsze podprzestrzenią rzutową. Operacja przekroju zbiorów $\cap$ w kracie rzutowej L jest kresem dolnym tak, że można powiedzieć, że w L istnieje kres dolny dowolnego, w tym także nieskończonego, zbioru X elementów L, tzn.

$$\bigwedge X = \bigcap X.$$

Z teorii krat wiemy, że jeśli w posecie istnieją kresy dolne dowolnych podzbiorów elementów to jest on kratą *zupełną*, tzn. istnieją również kresy górne dowolnych podzbiorów. Kresem górnym zbioru X podprzestrzeni przestrzeni rzutowej $\mathfrak{P}$ jest najmniejsza podprzestrzeń zawierająca wszystkie podprzestrzenie z X, czyli

$$\bigvee X = \bigcap\{y \in L\colon x \subseteq y \text{ dla wszystkich } x \in X\}.$$

Zajmiemy się teraz szczególnym przypadkiem kraty rzutowej. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad niekoniecznie przemiennym ciałem F. Przez $\mathrm{Sub}(V)$ oznaczamy rodzinę wszystkich podprzestrzeni przestrzeni V, natomiast poprzez $\mathrm{Sub}_k(V)$ rodzinę wszystkich podprzestrzeni k-wymiarowych w V. Struktura

$$P(V) = \langle \mathrm{Sub}_1(V), \mathrm{Sub}_2(V), \subseteq\rangle$$

jest (dezarguesowską) przestrzenią rzutową. Związana z nią krata rzutowa to poset

$$LP(V) = \langle \mathrm{Sub}(V), \subseteq\rangle$$

lub równoważna algebra

$$LP(V) = \langle \mathrm{Sub}(V), \cap, +\rangle,$$

gdzie kres górny $+$ jest sumą algebraiczną podprzestrzeni wektorowych i dla $U, W \in \mathrm{Sub}(V)$ mamy

$$U + W = \{u + w\colon u \in U, w \in W\} \tag{4.1}$$

Stwierdzenie 4.1. *Jeśli* $T, W \in \mathrm{Sub}(V)$*, to* $T \mathrm{M} W$.

DOWÓD. Weźmy $U, W, T \in \mathrm{Sub}(V)$.
Pokażemy, że

$$\textit{jeśli} \quad U \subseteq W, \quad \textit{to} \quad U + (T \cap W) = (U + T) \cap W.$$

Załóżmy, że $U \subseteq W$.

" $\subseteq$ " Weźmy $x \in U + (T \cap W)$. Jest on postaci $x = y + z$, gdzie $y \in U, z \in T \cap W$. Czyli $y \in U, z \in T, z \in W$. Czy $x \in U + T$? Tak, bo $y \in U$ oraz $z \in T$. Czy $x \in W$? Skoro $y \in U$ oraz z założenia $U \subseteq W$, to $y \in W$. Wiemy, że $z \in W$. Więc $y + z = x \in W$. Ostatecznie $x \in (U + T) \cap W$.

" $\supseteq$ " Weźmy $x \in (U+T) \cap W$. Więc $x \in U+T$ i $x \in W$. Zatem $x = y+z$, gdzie $y \in U$ i $z \in T$. Czy $x \in U + (T \cap W)$? Czy $x = a+b$, dla pewnych $a \in U$ i $b \in T \cap W$? Można wziąć $a = y$. Wystarczy pokazać, że $z \in T \cap W$ czyli, że $z \in W$ (bo $z \in T$ już mamy). Z równania $x = y + z$ mamy, że $z = x - y$. Skoro $x \in W$ oraz $y \in W$ (bo $y \in U$ i $U \subseteq W$), to $x - y = z \in W$. Czyli $z \in T \cap W$. Można wziąć $b = z$. Ostatecznie $x \in U + (T \cap W)$. $\square$

Tak więc relacja M jest totalna w kracie $LP(V)$, co oznacza, że ta krata jest modularna. Ta własność przysługuje nie tylko kratom rzutowym związanym z przestrzeniami dezarguesowskimi.

Twierdzenie 4.2 (Frink [4]). *Każda krata rzutowa jest zupełna, atomistyczna, modularna z dopełnieniami.*

Do pełnej teorio-kratowej charakteryzacji przestrzeni rzutowych brakuje jeszcze następującego twierdzenia.

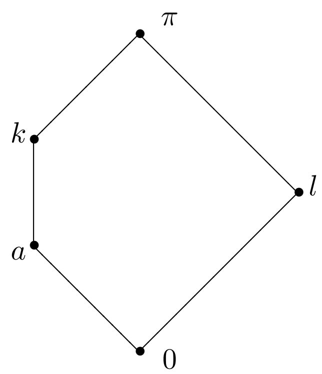
Twierdzenie 4.3 (Frink [4]). *Każdą kratę modularną z dopełnieniami można w jednoznaczny sposób zanurzyć w kracie podprzestrzeni produktu prostego płaszczyzn rzutowych i nierozkładalnych przestrzeni rzutowych wymiaru co najmniej 3.*

Modularność, czyli totalność relacji M oznacza, że w kracie rzutowej niewiele ciekawego można uzyskać stosując pojęcie pary modularnej. Dlatego dalej zajmiemy się wyłącznie kratami afinicznymi, choć nieuniknione są odwołania do geometrii rzutowej.

4.2 Krata afiniczna

Pojęcie przestrzeni afinicznej wprowadziliśmy w 1.6 . Mówimy, że krata L jest *afiniczna*, gdy istnieje taka przestrzeń afiniczna $\mathfrak{A}$, że L jest izomorficzna z kratą $L(\mathfrak{A})$ wszystkich podprzestrzeni przestrzeni $\mathfrak{A}$ z relacją inkluzji $\subseteq$ jako relacją częściowego porządku.

Każda krata afiniczna jest zawsze ograniczona i zupełna, co dowodzi się analogicznie jak dla kraty rzutowej. W odróżnieniu jednak od krat rzutowych, kraty afiniczne nie są modularne. Biorąc dwie różne proste równoległe k i l, płaszczyznę π przez nie rozpiętą oraz punkt a na prostej k uzyskamy podkratę pięciokąta jak na rys. 4.2.1.



Rysunek 4.2.1

Definicja 4.4. Niech L będzie dowolną kratą i $a, b \in L$.
Mówimy że a i b posiadają *wspólny poprzednik* jeśli istnieje $c \in L$ takie, że $c \prec a, b$.
Mówimy że a i b posiadają *wspólny następnik* jeśli istnieje $c \in L$ takie, że $a, b \prec c$.

Lemat 4.5. *Niech L będzie dowolną kratą, $a, b, c, d, \in L$ oraz $a \neq b$ wtedy:*

(i) Jeśli $c \prec a, b$ to $c = a \wedge b$,

(ii) Jeśli $a, b \prec d$ to $d = a \vee b$.

Dowód. (i) Skoro $c \prec a, b$, to $c \subseteq a, b$, ale też $a \wedge b \subseteq a, b$. Ponadto $c \subseteq a \wedge b \subseteq a, b$. Z założenia mamy, że $c \prec a, b$, zatem albo $a \wedge b = c$, albo $a \wedge b = a = b$ co jest sprzeczne z założeniem bo $a \neq b$, zatem $a \wedge b = c$.

(ii) Ponieważ $a, b \subseteq d$ oraz $a \vee b \subseteq d$, to mamy $a, b \subseteq a \vee b \subseteq d$, a ponieważ $a, b \prec d$, to musiałoby być $a = b = a \vee b$. Ale z założenia mamy, że $a \neq b$, zatem $a \vee b = d$. □

Z 4.5 wynika, że w definicji 4.4 dla różnych a, b wspólny poprzednik, jeśli go posiadają, to $a \wedge b$, natomiast wspólny następnik, o ile taki jest, to $a \vee b$.

Fakt 4.6. *W kracie półmodularnej, jeśli dwa różne elementy posiadają wspólny poprzednik, to posiadają wspólny następnik.*

Dowód. Implikacja występująca w tym twierdzeniu to warunek Birkhoffa (Bi). Na podstawie [2] wiemy, że (UCC) jest równoważne (Sm), skąd z kolei wynika (Bi). □

W kracie afinicznej, która jest kratą półmodularną (co udowodnimy później w 5.10) jeśli dwie różne proste przecinają się to rozpinają płaszczyznę. Punkt przecięcia jest wspólnym poprzednikiem tych prostych, a płaszczyzna następnikiem. Ogólniej, jeśli dwie podprzestrzenie tego samego wymiaru kroją się w podprzestrzeni kowymiaru 1, to są podprzestrzeniami kowymiaru 1 w przestrzeni przez nie rozpiętej.

Stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe bo na płaszczyźnie afinicznej mogą być różne proste równoległe, a więc rozłączne.

Krata afiniczna jest półmodularna, a nawet można powiedzieć więcej, ale tym zajmiemy się później w rozdziale 5.

Fakt 4.7. *W kracie modularnej dwa różne elementy posiadają wspólny poprzednik wttw, gdy posiadają wspólny następnik.*

Dowód. " $\Rightarrow$ " Krata modularna spełnia (UCC) (por. [2]), zatem a mocy 4.6 dostajemy tezę.

" $\Leftarrow$ " Krata modularna spełnia też warunek (LCC) (por. [2]), który jest równoważny warunkowi (Sm^*), natomiast (Sm^*) implikuje (Bi^*) co daje tezę. □

W kracie rzutowej dwie różne proste leżące na jednej płaszczyźnie zawsze przecinają się i na odwrót, przecinające się różne proste rozpinają płaszczyznę. Analogicznie jest dla dowolnych dwóch różnych podprzestrzeni tego samego wymiaru.

Zajmiemy się teraz specyficzną kratą afiniczną. Niech nadal V będzie przestrzenią wektorową i niech

$$\mathcal{H}(V) = \{a + U : a \in V, U \in \mathrm{Sub}(V)\} \cup \{\emptyset\}$$

będzie rodziną wszystkich warstw w V uzupełnioną o zbiór pusty, bo zbiór pusty nie jest formalnie warstwą w V. Analogicznie niech

$$\mathcal{H}_k(V) = \{a + U : a \in V, U \in \mathrm{Sub}_k(V)\}$$

będzie rodziną wszystkich k-wymiarowych warstw w V.

Przypomnijmy, że warstwa względem podprzestrzeni U to klasa abstrakcji relacji $\approx_U$ określonej dla $a, b \in V$ następująco

$$a \approx_U b :\iff a - b \in U.$$

Z geometrii wiemy, że struktura

$$A(V) = \langle \mathcal{H}_0(V), \mathcal{H}_1(V), \| \rangle,$$

gdzie $\| \subseteq \mathcal{H}_1(V) \times \mathcal{H}_1(V)$ jest relacją równoległości prostych określoną dla $a, b, u, w \in V$ następująco

$$a + \langle u \rangle \parallel b + \langle w \rangle :\iff \langle u \rangle = \langle w \rangle. \tag{4.2}$$

jest (dezarguesowską) przestrzenią afiniczną. Związana z nią krata afiniczna to poset

$$LA(V) = \langle \mathcal{H}(V), \subseteq \rangle$$

lub równoważna algebra

$$LA(V) = \langle \mathcal{H}(V), \cap, \sqcup \rangle,$$

gdzie kres górny warstw $A = a + U, B = b + W \in \mathcal{H}(V)$ określony jest następująco (por. [2])

$$A \sqcup B = a + \langle U, W, a - b \rangle. \tag{4.3}$$

Definicję relacji równoległości (4.2) można w naturalny sposób uogólnić dla pary dowolnych warstw $a + U, b + W \in \mathcal{H}(V)$

$$a + U \parallel b + W :\iff U = W. \tag{4.4}$$

Pokażemy teraz, że ta ogólna, symetryczna równoległość $\|$ dla warstw jest tym samym co równoległość $\|_L$ określona w języku krat w 3.1.

Twierdzenie 4.8. *Niech $A, B \in \mathcal{H}(V)$. Wówczas*

$$A \parallel_L B \quad \textit{wttw., gdy} \quad A \parallel B.$$

Dowód. Niech $A = a + U, B = b + W \in \mathcal{H}(V)$. Możemy przyjąć , że $A \neq B$, gdyż dla $A = B$ mamy $A \parallel_L B$ zgodnie z (3.3) w 3.1 oraz jednocześnie $U = W$.

" $\Rightarrow$ " Zauważmy, że

$$A \sqcup B = a + \langle U, W, a - b\rangle$$

z (4.3). Na mocy (3.3) w 3.1 $A \sqcup B$ jest następnikiem A i B. Stąd $\dim(A) = \dim(B) =: k$ oraz $\dim(A \sqcup B) = k+1$. Zatem musi zajść jeden z następujących przypadków:

(1) $\dim(U) = \dim(W) = k$ i $a - b \notin U, W$. W tym przypadku $U = W$ i teza jest natychmiastowa.

(2) $\dim(U \cap W) = k - 1$ i $a - b \in U$. Wówczas jeśli weźmiemy $x = b + (a - b)$, to z jednej strony $x \in b + U = B$, z drugiej natomiast $x = a \in A$. Zatem $x \in A \cap B$ co przeczy założeniu, że $A \parallel_L B$ i $A \neq B$, czyli w szczególności $A \cap B = \emptyset$.

(3) $\dim(U \cap W) = k - 1$ i $a - b \in W$. Uzyskujemy sprzeczność tak samo jak w powyższym punkcie.

" $\Leftarrow$ " Teraz, przy założeniu, że $U = W$ mamy pokazać, że $A \parallel_L B$, co zgodnie z definicją (3.3) w 3.1, oznacza że $A \cap B = \emptyset$ i $A, B \prec A \sqcup B$. Przypuśćmy, że istnieje $x \in A \cap B$. Mamy wówczas $x = a + u_1 = b + u_2$, dla pewnych $u_1, u_2 \in U$. Stąd $a - b = u_2 - u_1 \in U$, co znaczy, że a i b przystają do siebie względem U i wyznaczają tę samą klasę abstrakcji (warstwę) względem U. Zatem $A = B$, co przeczy przyjętemu na wstępie założeniu, że $A \neq B$. Musi więc być $A \cap B = \emptyset$. Ponadto zauważmy, że $A \sqcup B = a + \langle U, a - b\rangle$. Ponieważ $a - b \notin U$, to $A \sqcup B$ musi być następnikiem A i B ze względu na wymiary. □

Relacja $\parallel$ tak jak została wprowadzona w (4.2) dla prostych, a później uogólniona w (4.4) na warstwy, czyli podprzestrzenie afiniczne jest symetryczna. Inaczej mówiąc równoległe w tym sensie mogą być tylko podprzestrzenie tego samego wymiaru. Mamy tutaj sytuację analogiczną do 3.1. Często bowiem mówimy, że jakaś prosta jest równoległa do płaszczyzny. Intuicyjnie jest to jasne i poniższa definicja formalizuje to pojęcie w modelu analitycznym.

Definicja 4.9. Dla $A, B \in \mathcal{H}(V)$ takich, że $A = a + U, B = b + W$ powiemy, że A jest *równoległe* (niesymetrycznie) do B, co zapiszemy $A \subseteq\parallel B$, gdy $U \subseteq W$. Przyjmujemy, że $\emptyset \subseteq\parallel B$, dla dowolnego $B \in \mathcal{H}(V)$ (w szczególności dla $B = \emptyset$).

Wymiar warstw liczymy względem podprzestrzeni kierunkowej, to znaczy $\dim(a+U) = \dim(U)$, więc w 4.9 mamy $\dim(A) \leqslant \dim(B)$. Zanotujmy jeszcze jedną ważną obserwację wiążącą równoległość symetryczną i niesymetryczną.

Wniosek 4.10. *Dla $A, B \in \mathcal{H}(V)$ mamy $A \subseteq\parallel B$ i $B \subseteq\parallel A$ wttw., gdy $A \parallel B$.*

Relacja $\subseteq\parallel$ jest ściśle związana z translacjami i czasem przy pomocy translacji się ją definiuje. Mówi o tym następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 4.11. *Niech $A, B \in \mathcal{H}(V)$. Wówczas $A \subseteq\parallel B$ wttw., gdy istnieje translacja f taka, że $f(A) \subseteq B$.*

DOWÓD. " $\Rightarrow$ " Załóżmy, że $A \subseteq\parallel B$. W przypadku gdy $A = \emptyset$ to $f(\emptyset) = \emptyset \subseteq B$. Gdy $A \neq \emptyset$, to na mocy 4.9 musi być $B \neq \emptyset$. Niech wówczas $A = a + U$ oraz $B = b + W$ dla pewnych $U, W \in \mathrm{Sub}(V)$. Z definicji 4.9 mamy $U \subseteq W$. Niech f będzie taką translacją, że

$$f(a) = b.$$

Pokażemy, że $f(A) \subseteq B$. Mamy

$$f(A) = f(a) + U = b + U \subseteq b + W = B.$$

Pierwsza równość wynika z faktu, że translacja to dylatacja, czyli zachowuje kierunki. To znaczy, że $k = a + \langle u \rangle$ jest prostą to $f(k) \parallel k$. Stąd $f(k) = f(a) + \langle u \rangle$. Ogólnie dla $A = a + U$ mamy $f(A) \parallel A$, a stąd zgodnie z (4.4) wynika żądana równość. Druga równość wynika z określenia f, natomiast zawieranie wynika z faktu, że $U \subseteq W$. Zatem $f(A) \subseteq B$, co należało pokazać.

" $\Leftarrow$ " Niech f będzie translacją taką, że $f(A) \subseteq B$. Jeśli $A = \emptyset$ to z 4.9 $\emptyset \subseteq B$. Gdy $A \neq \emptyset$ to musi być $B \neq \emptyset$. Możemy teraz przyjąć, że $A = a + U$ oraz $B = b + W$ dla pewnych $U, W \in \mathrm{Sub}(V)$. Pokażemy, że $U \subseteq W$. Kolejno z własności dylatacji oraz z założenia mamy

$$f(a) + U = f(A) \subseteq B = b + W. \tag{4.5}$$

Weźmy $x \in f(a) + U$, a więc jednocześnie $x \in B$. Stąd $f(a) + U = x + U$ oraz $B = x + W$. Z (4.5) mamy $x + U \subseteq x + W$. Zatem $U \subseteq W$, co należało pokazać. □

Twierdzenie 4.12. *Niech $A, B \in \mathcal{H}(V)$ będą co najmniej prostymi. Wówczas $A \subseteq\parallel B$ wttw., gdy dla dowolnej prostej $k \subseteq A$ istnieje prosta $l \subseteq B$ taka, że $k \parallel l$.*

DOWÓD. Niech $A = a + U$ oraz $B = b + W$ będą co najmniej prostymi dla pewnych $U, W \in \mathrm{Sub}(V)$.

" $\Rightarrow$ " Załóżmy, że $A \subseteq\parallel B$ czyli z definicji 4.9 mamy $U \subseteq W$. Z 4.11 istnieje translacja f taka, że $f(A) \subseteq B$. Weźmy dowolną prostą $k \subseteq A$. Wtedy

$f(k) \subseteq B$. Stąd i z 4.11 mamy $k \subseteq\parallel B$. Niech $l := f(k)$. Wiemy, że $l \subseteq B$ oraz, że $k \parallel f(k)$, czyli $k \parallel l$.

" $\Leftarrow$ " Niech k będzie dowolną prostą taką, że $k \subseteq A$. Z założenia mamy prostą l taką, że $l \subseteq B$ oraz $k \parallel l$. Dobieramy teraz translację f tak aby $f(k) = l$ (wystarczy zadać f na reprezentantach warstw k i l bo mają one taki sam kierunek).

Niech $a \in A$. Weźmy prostą $m \subseteq A$ przez a przecinającą k to znaczy taką, że $a \in m$ oraz $m \cap k = \{x\}$. Niech $u := f(x)$. Wówczas $f(m) \cap l = \{u\}$ i stąd $u \in B$. Sprawdzimy, czy $f(m) \subseteq B$? Z założenia istnieje prosta $n \subseteq B$ taka, że $n \parallel m$. Ponieważ f jest dylatacją to $f(m) \parallel m \parallel n$. Mamy $u \in f(m) \parallel n \subseteq B$ i $u \in B$. Ponieważ B jest podprzestrzenią przestrzeni afinicznej $A(V)$, więc na mocy 1.7 mamy $f(m) \subseteq B$. Stąd $f(a) \in B$ i z dowolności wyboru a mamy $f(A) \subseteq B$. Na mocy 4.11 otrzymujemy $A \subseteq\parallel B$. □

Relacja $\subseteq\parallel$ została wprowadzona czysto analitycznie. Twierdzenie 4.12 charakteryzuje ją w języku elementarnym, wręcz syntetycznym.

Twierdzenie 4.13. *Niech $A, B \in \mathcal{H}(V)$ takie, że $A, B \neq \emptyset$. Wówczas*

$$A \leqslant\mid B \quad \text{wttw., gdy} \quad A \subseteq\parallel B.$$

Dowód. Niech $A = a + U$ oraz $B = b + W$ dla pewnych $U, W \in \mathrm{Sub}(V)$.
" $\Rightarrow$ " Załóżmy, że $A \leqslant\mid B$. Zgodnie z 3.1 mamy albo $A \subseteq B$ i ta część dowodu jest zakończona z uwagi na 4.9, albo $A \cap B = \emptyset$ oraz $B \prec A \sqcup B$. Ostatni związek oznacza, że

$$\dim(B) + 1 = \dim(A \sqcup B). \tag{4.6}$$

Przypomnijmy, że

$$A \sqcup B = a + \langle U, W, a - b\rangle \tag{4.7}$$

zatem

$$\dim(W) + 1 = \dim(\langle U, W, a - b\rangle). \tag{4.8}$$

Jeśli $a - b \in W$, to rozważmy $x = b + (a - b)$. Z jednej strony $x \in b + W = B$, a z drugiej $x = a \in A$, co daje $x \in A \cap B = \emptyset$ i mamy sprzeczność. Jeśli natomiast $a - b \notin W$, to musi być

$$U \subseteq \langle W, a - b\rangle = W \oplus \langle a - b\rangle \tag{4.9}$$

bo wówczas $\langle W, a - b\rangle = \langle U, W, a - b\rangle$ z uwagi na ograniczenia wymiarowe (4.8). Weźmy $u \in U$. Z (4.9)

$$u = \alpha w + \beta(a - b)$$

dla pewnego $w \in W$ oraz $\alpha, \beta \in F$. Gdy $\beta = 0$, to natychmiast $u = \alpha w \in W$. Gdy natomiast $\beta \neq 0$, to mamy $\frac{1}{\beta}u = \frac{\alpha}{\beta}w + (a - b)$, skąd

$$A = b + U \ni b + \frac{1}{\beta}u = a + \frac{\alpha}{\beta}w \in a + W = B.$$

Sprzeczność z $A \cap B = \emptyset$. Tak więc pozostaje $u \in W$, co z dowolności wyboru u oznacza, że $U \subseteq W$. Z 4.9 dostajemy $A \subseteq\parallel B$.

" $\Leftarrow$ " Teraz na mocy 4.9 zakładamy, że $U \subseteq W$. Mamy pokazać, że albo $A \subseteq B$, albo $A \cap B = \emptyset$ i jednocześnie $B \prec A \sqcup B$.

Jeśli $A \cap B \neq \emptyset$, to biorąc $x \in A \cap B$ mamy $A = x + U$ oraz $B = x + W$, co z uwagi na założenie $U \subseteq W$ daje $A \subseteq B$.

Rozważmy teraz przypadek, gdy $A \cap B = \emptyset$. Z założenia $U \subseteq W$ dostajemy

$$A \sqcup B = a + \langle U, W, a - b\rangle = a + \langle W, a - b\rangle. \tag{4.10}$$

Wystarczy sprawdzić, czy $a - b \notin W$ dlatego, że jeśli tak to otrzymamy

$$\dim(B) + 1 = \dim(W) + 1 = \dim(\langle W, a - b\rangle) = \dim(A \sqcup B),$$

co daje, że $B \prec A \sqcup B$. Tak więc przypuśćmy, że tak nie jest, czyli $a - b \in W$. Podobnie jak poprzednio dla $x = b+(a-b)$ mamy $x \in b+W = B$ i jednocześnie $x = a \in A$, co daje $x \in A \cap B = \emptyset$ i mamy sprzeczność. W ten sposób dowód jest zakończony. □

Twierdzenie 4.13 pokazuje równoważność definicji kratowej 3.1 niesymetrycznej równoległości i definicji analitycznej 4.9. Z 4.13 oraz 3.11 wynika natychmiast

Wniosek 4.14. *Niech $A, B \in \mathcal{H}(V)$ takie, że $A, B \neq \emptyset$. Wówczas $A \subseteq\parallel B$ wttw., gdy zachodzi jeden z poniższych warunków*

(i) $A \subseteq B$, *albo*

(ii) $A \cap B = 0$ *oraz* $B \,\bar{\mathrm{M}}\, k$ *dla każdej prostej* $k \subseteq A$.

Rozdział 5

Półmodularność w sensie Wilcoxa

5.1 Słaba modularność

Niech L będzie dowolną kratą.

Definicja 5.1. Niech $a, b \in L$. Powiemy, że a, b są *równoległe w sensie Wilcoxa*, co zapiszemy $a \parallel_W b$, gdy

$$a \wedge b = 0 \quad \text{oraz} \quad a \, \bar{\mathrm{M}} \, b.$$

Definicja 5.2. Niech $a, b \in L$. Powiemy, że a, b są *niezależne w sensie Wilcoxa*, co zapiszemy $a \perp_W b$, gdy

$$a \wedge b = 0 \quad \text{oraz} \quad a \, \mathrm{M} \, b.$$

W dalszej części rozważać będziemy trzy następujące warunki dla $a, b \in L$:

$$\text{jeśli} \quad a \perp_W b \quad \text{to} \quad b \, \mathrm{M} \, a, \tag{W1}$$

$$\text{jeśli} \quad a \wedge b \neq 0 \quad \text{to} \quad a \, \mathrm{M} \, b, \tag{W2}$$

$$\text{jeśli} \quad a \, \mathrm{M} \, b \quad \text{to} \quad b \, \mathrm{M} \, a. \tag{Ms}$$

Twierdzenie 5.3. *Jeśli krata spełnia warunki* (W1) *i* (W2) *to spełnia* (Ms).

Dowód. Niech L będzie dowolną kratą spełniającą (W1) i (W2) i niech $a, b \in L$. Załóżmy, że $a \, \mathrm{M} \, b$.
Rozważmy dwa przypadki: $a \wedge b = 0$ oraz $a \wedge b \neq 0$. Jeśli zachodzi pierwszy przypadek to wtedy na mocy założenia, definicji 5.2 oraz warunku (W1) mamy $b \, \mathrm{M} \, a$, co w tym przypadku kończy dowód. Jeśli zachodzi drugi przypadek to mamy również, że $b \wedge a \neq 0$. Na mocy warunku (W2) mamy $b \, \mathrm{M} \, a$, co kończy dowód. □

W kratach znanych z geometrii w warunkach (W1) i (W2) implikacje w drugą stronę nie zachodzą.

Przykład 5.4. Weźmy kratę pięciokąta (rys.2.1.1). Wtedy $a \mathrm{M} p$ oraz $a \wedge p = 0$ ale jak pokazaliśmy wcześniej $p \,\overline{\mathrm{M}}\, a$. Jest to przykład kraty w której w warunku (W1) implikacja w drugą stronę nie zachodzi.

Przykład 5.5. Weźmy przestrzeń rzutową wymiaru $\geqslant 3$. Jak wcześniej pokazaliśmy w 4.1 jest ona modularna, więc każde dwa elementy w tej przestrzeni tworzą parę modularną. Biorąc za a i b dwie proste skośne mamy spełnione, że $a \wedge b = \emptyset$. Stąd a, b nie powinny tworzyć pary modularnej, ale jest to przestrzeń rzutowa, w której każde dwa elementy tworzą parę modularną.
Weźmy teraz przestrzeń afiniczną wymiaru $\geqslant 2$. Wtedy za a wystarczy wziąć prostą, natomiast za b punkt poza tą prostą. Punkt b jest atomem więc na mocy 2.7 a, b tworzą parę modularną, ale $a \wedge b = \emptyset$. Są to przykłady pokazujące, że w warunku (W2) implikacja w druga stronę też nie zachodzi.

Przyjęliśmy, że krata półmodularna to taka, która spełnia warunek (UCC). Część autorów (por. [8]) przyjmuje warunek (Ms) jako definicję półmodularności. W przypadku krat skończonej wysokości oba te warunki są równoważne, ale w ogólności zachodzi tylko implikacja (Ms) $\Rightarrow$ (UCC). Dowód i kontrprzykład są podane w pracy [2]. Tak więc mamy następujące związki:

$$(\mathsf{W1}) \quad i \quad (\mathsf{W2}) \quad \Rightarrow \quad (\mathsf{Ms}) \quad \Rightarrow \quad (\mathsf{UCC}).$$

Kratę która spełnia warunki (W1) i (W2) będziemy nazywać półmodularną w sensie Wilcoxa.

Kratę L ograniczoną z dołu, w której dla dowolnego elementu $a > 0$ filtr główny $[a)$ jest podkratą modularną nazywamy *słabo modularną* (ang. weakly modular por. [7, str. 42]).

Stwierdzenie 5.6. *Krata jest słabo modularna wttw., gdy spełnia* (W2).

DOWÓD. " $\Rightarrow$ " Załóżmy, że krata L jest słabo modularna. Niech $a, b \in L$ takie, że $a \wedge b \neq 0$. Zatem istnieje $p \in L$ takie, że $p \leqslant a \wedge b$. Stąd $p \leqslant a, b$, a więc $a, b \in [p)$. Filtr główny jest podkratą modularną w L z założenia. W podkracie modularnej każde dwa elementy tworzą parę modularną. Stąd mamy, że $a \mathrm{M} b$. Pokazaliśmy, że L spełnia (W2).
" $\Leftarrow$ " Teraz zakładamy, że krata spełnia (W2). Weźmy dowolny element $p \in L$ taki, ze $p > 0$. Oznaczmy wyznaczony przez niego filtr główny $X = [p)$. Niech $a, b \in X$. Ponieważ $p \leqslant a, b$ więc $a \wedge b \neq 0$. Na mocy (W2) mamy $a \mathrm{M} b$. Z dowolności wyboru a i b pokazaliśmy, że relacja M w podkracie X jest totalna, a co za tym idzie X jest podkratą modularną. Ostatecznie krata L jest słabo modularna. □

Z geometrycznego punktu widzenia interesować nas będzie szczególna wersja tego twierdzenia, którą dowiedziemy później w 5.12, a która w zasadzie jest dobrze znanym faktem z geometrii.

5.2 Redukt afiniczny

Niech $\langle K, \oplus, \otimes \rangle$ będzie kratą modularną z dopełnieniami i niech $S \subseteq K$ będzie zbiorem spełniającym następujące warunki:

(S1) jeśli $a, b \in S$ *to* $a \oplus b \in S$,

(S2) jeśli $a \in S$, $b \in K$ *i* $0 < b \leqslant a$ *to* $b \in S$,

(S3) $0 \notin S$.

Zbiór spełniający warunki (S1) i (S2) jest ideałem z wyrzuconym zerem w kracie K. Teraz weźmy

$$L := K \setminus S.$$

Dla $a, b \in L$, określamy operacje $+, \cdot$ następująco:

$$a + b := a \oplus b,$$

$$a \cdot b := \begin{cases} a \otimes b & \text{jeśli} \quad a \otimes b \in L, \\ 0, & \text{jeśli} \quad a \otimes b \in S. \end{cases}$$

Pokażemy, że zbiór L z powyżej zdefiniowanymi operacjami $+, \cdot$ jest kratą. Weźmy $a, b \in L$. Pokażemy, że $a + b$ kresem górnym w L oraz, że $a \cdot b$ jest kresem dolnym w L .
Aby pokazać że $a + b$ jest najmniejszym z górnych ograniczeń w L wystarczy udowodnić, że jeśli $a, b \in L$ to $a + b \in L$. Jeśli $a = 0$ to $a + b = 0 \oplus b = b$. Stąd $a + b \in L$. Przypuśćmy, że $a \neq 0$ i $a + b \in S$. Wtedy $0 < a \leqslant a + b$. Z warunku (S2) mamy, że $a \in S$. Sprzeczność bo $a \in L$. Zatem pokazaliśmy, że $a + b$ jest najmniejszym z górnych ograniczeń.
Pokażemy teraz, że $a \cdot b$ jest największym z dolnych ograniczeń w L. Oczywiste jest z określenia operacji $\cdot$, że $a \cdot b \leqslant a, b$, oraz $a \cdot b \in L$. Przypuśćmy, że $c \in L$ i $c \leqslant a, b$. Wtedy $c \leqslant a \otimes b$, bo $a \otimes b$ jest największym ograniczeniem dolnym a i b w K. Jeśli $a \otimes b \in L$ to $a \cdot b = a \otimes b$, a więc $c \leqslant a \cdot b$, co kończy ten dowód. Jeśli $a \otimes b \in S$ to zgodnie z (S2) albo $c = 0$ albo $c \in S$. W pierwszym wypadku mamy $c + 0 \leqslant 0 = a \cdot b$ i dowód jest zakończony. Drugi przypadek jest niemożliwy bo $c \in L$ i $L \cap S = \emptyset$. Zatem $a \cdot b$ jest największym z dolnych ograniczeń.

Lemat 5.7. *Dla dowolnych $a, b \in L$ mamy*

$$a \parallel_W b \Longleftrightarrow a \otimes b \in S. \tag{5.1}$$

DOWÓD. " $\Rightarrow$ " Zakładamy, że $a \parallel_W b$. Zgodnie z definicją 5.1 to oznacza, że $a \cdot b = 0$ i $a \bar{\text{M}}\, b$ w kracie L. Przypuśćmy, że $a \otimes b \notin S$. Czyli $a \otimes b \in L$. Stąd i z założenia razem mamy, że

$$a \otimes b = a \cdot b = 0. \tag{5.2}$$

Weźmy $x \in L$ takie, że $x \leqslant b$. Rozważmy dwa przypadki: $x = 0$ oraz $x \neq 0$.
Jeśli $x = 0$ to:

$$a \cdot b = (x + a) \cdot b,$$

oraz

$$a \cdot b = x + (a \cdot b).$$

Stąd mamy następującą równość $(x + a) \cdot b = x + (a \cdot b)$, a więc a M b zgodnie z definicją relacji M.
Jeśli $x \neq 0$ to:

$$0 < x \leqslant (x + a) \cdot b$$

bo jednocześnie $x \leqslant x + a$ i $x \leqslant b$. Stąd i z określenia operacji $\cdot$ mamy:

$$(x + a) \cdot b = (x + a) \otimes b = (x \oplus a) \otimes b = x \oplus (a \otimes b) = x + (a \cdot b).$$

Druga równość wynika z określenia $+$, trzecia z modularności kraty K, a ostatnia z (5.2) Tak więc a M b zgodnie z definicją relacji M. Zatem sprzeczność bo a $\bar{\mathrm{M}}$ b z założenia. Musi być zatem $a \otimes b \in S$.

" $\Leftarrow$ " Załóżmy, że $a \otimes b \in S$. Wówczas z określenia operacji $\cdot$ mamy

$$a \cdot b = 0. \tag{5.3}$$

Przypuśćmy, że a M b. Weźmy dopełnienie x elementu $a \otimes b$ względem odcinka $[0, b]$ w kracie K. Wtedy:

$$(a \otimes b) \oplus x = b \tag{5.4}$$

oraz

$$(a \otimes b) \otimes x = 0. \tag{5.5}$$

Jeśli $x \in S$ to również $b \in S$ jako wynik operacji $\oplus$ na elementach z S na mocy (S1). Sprzeczność bo $b \in L$, zatem $x \notin S$. Stąd po uwzględnieniu (5.4) dostaniemy:

$$x + a = x \oplus a = x \oplus (a \otimes b) \oplus a = b \oplus a = b + a. \tag{5.6}$$

Wiemy, że $x \leqslant b$ oraz a M b. Z definicji relacji M mamy $(x + a) \cdot b = x + (a \cdot b)$. Zatem z (5.3) i (5.6) mamy $b = x$. Stąd

$$a \otimes b = a \otimes b \otimes b = a \otimes b \otimes x = 0$$

bo x jest dopełnieniem $a \otimes b$ w odcinku $[0, b]$ tzn. zachodzi (5.5). Sprzeczność bo $a \otimes b \in S$ a $0 \notin S$ z (S3). Zatem a $\bar{\mathrm{M}}$ b, czyli $a \parallel_W b$ zgodnie z 5.1. $\square$

Lemat 5.8. *Dla dowolnych $a, b \in L$ mamy*

$$a \perp_W b \Longleftrightarrow a \otimes b = 0. \tag{5.7}$$

Dowód. " $\Rightarrow$ " Załóżmy, że $a \perp_W b$. Z definicji 5.2 mamy, że $a \cdot b = 0$ oraz a M b. Czyli $a \nparallel_W b$ na mocy 5.1. Z lematu 5.7 mamy $a \otimes b \notin S$. Zatem $a \otimes b \in L$. Stąd i z określenia operacji $\cdot$ mamy $a \otimes b = a \cdot b = 0$.
" $\Leftarrow$ " Załóżmy, że $a \otimes b = 0$. Zatem $a \otimes b \in L$ bo $0 \notin S$ na mocy (S3). Stąd i z określenia operacji $\cdot$ mamy $a \cdot b = a \otimes b = 0$. Wiemy, że $a \otimes b \notin S$. Zatem $a \nparallel_W b$ zgodnie z 5.7. Na mocy definicji 5.1 musi być a M b. Zatem $a \perp_W b$ z definicji 5.2. □

Twierdzenie 5.9. *Krata L spełnia* (W1) *i* (W2)*.*

Dowód. Niech $a, b \in L$.
Załóżmy, że $a \cdot b = 0$ i a M b. Zgodnie z definicją 5.2 jest to równoważne $a \perp_W b$. Z lematu 5.8 otrzymujemy, że $a \otimes b = 0$. Operacja $\otimes$ jest przemienna więc $a \otimes b = b \otimes a$, co daje $b \otimes a = 0$. Stąd $b \perp_W a$ ponownie z lematu 5.8. Z definicji 5.2 mamy, że b M a. W ten sposób dowiedliśmy (W1).

Załóżmy teraz, że $a \cdot b \neq 0$. Z określenia $\cdot$ mamy więc

$$a \cdot b = a \otimes b. \tag{5.8}$$

Weźmy $x \in L$ taki, że $x \leqslant b$. Wtedy $0 < a \cdot b \leqslant (x+a) \cdot b$, a więc $(x+a) \otimes b \in L$. Stąd i z modularnośći kraty K mamy

$$(x + a) \cdot b = (x \oplus a) \otimes b = x \oplus (a \otimes b) = x + (a \cdot b).$$

Zatem a M b zgodnie z definicją M, co dowodzi prawdziwości (W2). □

Pokazaliśmy zatem, że L jest kratą półmodularną w sensie Wilcoxa. Podkreślmy, że w przypadku krat nieskończonej wysokości jest to istotnie mocna własność, mocniejsza niż symetria relacji M i mocniejsza niż standardowo rozumiana półmodularność.

Niech $\mathfrak{P} = \langle P, \mathcal{L} \rangle$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią rzutową jak zdefiniowano w 1.10. Ustalmy w $\mathfrak{P}$ hiperpłaszczyznę $H \subseteq P$. Dalej rozważamy kratę K wszystkich podprzestrzeni przestrzeni $\mathfrak{P}$. Zauważmy, że zerem kraty K jest zbiór pusty $\emptyset$, natomiast jedynką jest zbiór P wszystkich punktów $\mathfrak{P}$. Tak jak pokazaliśmy wcześniej w 4.1 krata K jest modularna. Ustalona hiperłpaszczyzna H jest koatomem w kracie K, tzn. jest bezpośrednim poprzednikiem P, co geometrycznie można wyrazić mówiąc, że H jest podprzestrzenią kowymiaru 1 albo maksymalną właściwą podprzestrzenią w $\mathfrak{P}$. Przez S oznaczmy zbiór wszystkich podprzestrzeni przestrzeni $\mathfrak{P}$ leżących w H różnych od $\emptyset$. Formalnie

$$S := \{x \in K : x \subseteq H \text{ i } x \neq \emptyset\}.$$

Zauważmy, że tak określony zbiór S spełnia warunki (S1), (S2) i (S3). Weźmy bowiem $a, b \in S$. Wtedy z określenia zbioru S mamy $a \subseteq H$ oraz $b \subseteq H$. Kres górny a i b też zawiera się w H ponieważ jest to przekrój wszystkich podprzestrzeni które zawierają a, b. Zatem pokazaliśmy, że S spełnia warunek (S1). Niech teraz $a \in S$, $b \in K$ oraz $0 < b \leqslant a$. Wtedy $a \subseteq H$, ale też $b \subseteq a \subseteq H$. Zatem $b \in S$. Czyli warunek (S2) też jest spełniony. Z określenia zbioru S mamy $0 \notin S$. Zatem spełniony jest również warunek (S3). Zgodnie w wcześniej przedstawioną konstrukcją otrzymujemy kratę Wilcoxa $L := K \setminus S$.

Z drugiej strony wiemy, że usuwając z przestrzeni rzutowej $\mathfrak{P}$ hiperpłaszczyznę H otrzymujemy przestrzeń afiniczną $\mathfrak{A} = \langle P', \mathcal{L}', \|_H \rangle$, gdzie

$$P' = P \setminus H, \qquad \mathcal{L}' = \{k \setminus H : k \in \mathcal{L} \text{ i } k \nsubseteq H\}$$

natomiast relacja równoległości $\|_H$ jest relacją $\|_W$ na prostych $\mathcal{L}'$, co za chwilę uzasadnimy.

Hiperpłaszczyznę H nazywa się *horyzontem* przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$. Zgodnie z definicją hiperpłaszczyzny w przestrzeni rzutowej, dla prostej $k \in \mathcal{L}$ zbiór $k \cap H$ jest jednoelementowy, gdy $k \nsubseteq H$. Tak więc każda prosta afiniczna $l \in \mathcal{L}'$ powstaje z prostej rzutowej poprzez usunięcie dokładnie jednego punktu oznaczanego l^∞ i nazywanego *punktem niewłaściwym* lub *punktem w nieskończoności*. Na odwrót, każdą prostą afiniczną $l \in \mathcal{L}'$ możemy uzupełnić punktem niewłaściwym l^∞ i odzyskać prostą rzutową $\overline{l} = l \cup \{l^\infty\} \in \mathcal{L}$. Relację $\|_H$ równoległości prostych w przestrzeni $\mathfrak{A}$ definiuje się następująco. Jeśli $l_1, l_2 \in \mathcal{L}'$, to

$$l_1 \parallel l_2 :\Longleftrightarrow l_1^\infty = l_2^\infty.$$

Zauważmy, że dla prostych afinicznych $l_1, l_2 \in \mathcal{L}'$ odpowiadające im proste rzutowe $\overline{l_1}, \overline{l_2} \in \mathcal{L}$ są elementami kraty L. Zgodnie z 5.7 $\overline{l_1} \|_W \overline{l_2}$ wttw., gdy proste $\overline{l_1}, \overline{l_2}$ przecinają się niepusto na horyzoncie H, co z kolei oznacza, że $l_1^\infty = l_2^\infty$, bo jak już wiemy $\mid \overline{l_i} \cap H \mid = 1$. Zatem

$$l_1 \|_H l_2 \Longleftrightarrow \overline{l_1} \|_W \overline{l_2}.$$

5.3 Domknięcie rzutowe

Możliwa jest również operacja odwrotna, to znaczy zanurzenie przestrzeni afinicznej w przestrzeń rzutową. Klasy abstrakcji relacji równoległości na prostych, czyli kierunki, dają nowe punkty, punkty niewłaściwe, którymi uzupełniamy proste afiniczne, tzn. do każdej prostej afinicznej dokładamy jej kierunek jako nowy punkt. W ten sposób równoległe proste afiniczne po uzupełnieniu do rzutowych przecinają się w dodanym punkcie niewłaściwym. Analogicznie, klasy abstrakcji relacji równoległości na podprzestrzeniach afinicznych (ustalonego wymiaru) dają kierunki - horyzonty tych podprzestrzeni. Przedstawiona konstrukcja nazywa się domknięciem rzutowym. Podsumowując, każdą przestrzeń afiniczną można jednoznacznie zanurzyć w jej domknięciu rzutowym i poprzez redukcję afiniczną powrócić do wyjściowej przestrzeni afinicznej.

Wniosek 5.10. *Krata afiniczna spełnia* (W1) *i* (W2) *czyli jest półmodularna w sensie Wilcoxa.*

Stąd i z 5.6 natychmiast wynika

Wniosek 5.11. *Jeśli p jest atomem w kracie afinicznej to filtr główny $[p)$ jest podkratą modularną.*

Powyższy fakt został, przynajmniej częściowo, wykazany stosując teorię krat. Na gruncie geometrii możemy uzyskać nieco nawet mocniejszy wynik Otóż z geometrii wiemy, że jeśli w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ ustalimy dowolny punkt i weźmiemy wszystkie proste i płaszczyzny przez ten punkt, to dostaniemy przestrzeń rzutową $\mathfrak{P}$, której będą one odpowiednio punktami i prostymi. Co więcej podprzestrzenie afiniczne przez ten punkt będą o jeden wymiar mniejszymi podprzestrzeniami $\mathfrak{P}$. W ten sposób odpowiedni filtr jest podkratą rzutową i dlatego mamy mocniejszy wynik bo jak wiemy z 4.1 krata podprzestrzeni przestrzeni rzutowej jest modularna.

Inaczej, ustalenie dowolnego punktu a w przestrzeni afinicznej $\mathfrak{A}$ odpowiada ustaleniu początku układu współrzędnych i przy odpowiednich założeniach (twierdzenie Desargues'a) pozwala skoordynatyzować $\mathfrak{A}$ i uzyskać w ten sposób przestrzeń wektorową V. Podprzestrzenie $\mathfrak{A}$ przechodzące przez a będą wówczas podprzestrzeniami kierunkowymi (podprzestrzeniami V) pozostałych podprzestrzeni $\mathfrak{A}$ (warstw V). Podprzestrzenie przestrzeni wektorowej tworzą kratę modularną.

Wniosek 5.12. *Jeśli p jest atomem w kracie afinicznej to filtr główny $[p)$ jest podkratą rzutową i w konsekwencji jest podkratą modularną.*

Na przykładach 5.11 i 5.12 widać jak może być stosowana teoria krat w geometrii i na ile jej stosowanie pomaga rozstrzygać zagadnienia geometryczne. Dalej zobaczymy kolejne związki między teorią krat a geometrią.

Rozdział 6

Własności kraty afinicznej

Definicja 6.1. Mówimy, że atomy $a_1, a_2, ...a_n$ w kracie L są *niezależne* gdy

$$(a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_k) \wedge a_{k+1} = 0 \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant k < n.$$

Niech $a_1, a_2, ...a_n \in L$. Wtedy dla każdego k takiego, że $1 \leqslant k < n$, na mocy 2.7 zachodzi

$$(a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_k) \ \mathrm{M} \ a_{k+1}.$$

Zatem

$$a_1, a_2, ...a_n \quad \text{są niezależne} \quad \Longleftrightarrow \quad (a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_k) \perp_W a_{k+1}, \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant k < n.$$

Rozważmy następujący warunek:

Niech p, q, r będą niezależnymi atomami w kracie L.
Wtedy istnieje dokładnie jeden element l taki, że

$$p < l < p \vee q \vee r \quad \text{oraz} \quad l \wedge (q \vee r) = 0. \qquad (\alpha)$$

Lemat 6.2. *Krata afiniczna spełnia warunek* (α).

Dowód. Weźmy p, q, r bądące parami różnymi niewspółliniowymi punktami w kracie afinicznej L. Wtedy $q \vee r$ będzie prostą. Z definicji równoległości 1.3 dla prostej $q \vee r$ istnieje dokładnie jedna prosta l przechodząca przez punkt p tzn. $p < l$ taka, że $l \parallel q \vee r$. Wtedy l jest naszą szukaną prostą. Punkty p, q, r rozpinają płaszczyznę w której leży prosta l. Stąd $l < p \vee q \vee r$. Zatem $p < l < p \vee q \vee r$. Prosta l jest równoległa do prostej $q \vee r$. Stąd $l \wedge (q \vee r) = 0$, co należało pokazać. □

Definicja 6.3. Niech L będzie kratą ograniczoną z dołu. Powiemy, że krata L jest *mocno płaszczyznowa* (ang. strongly planar) jeśli spełniony jest następujący warunek: dla $a \in L$

jeśli p, q, r są atomami, $p \leqslant q \vee a$ oraz $r \leqslant a$
to istnieje atom $s \in L$ taki, że

$$p \leqslant q \vee r \vee s \quad \text{i} \quad s \leqslant a. \qquad (\mathsf{SP})$$

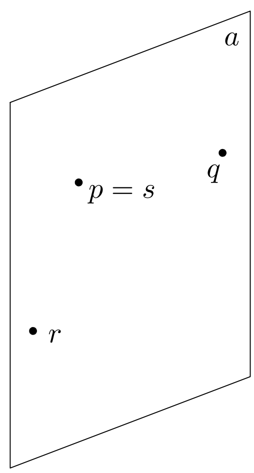
Twierdzenie 6.4. *Krata afiniczna jest mocno płaszczyznowa.*

Dowód. Niech L będzie kratą afiniczną i niech $a \in L$. Weźmy $p, q, r \in L$ będące punktami takimi, że $p \leqslant q \vee a$ i $r \leqslant a$.

Niech a będzie punktem. Wtedy mamy dwie możliwości albo $a = q$ albo $a \neq q$. Gdy $a = q$ to z założeń mamy $p \leqslant q \vee a = q$. Stąd $p \leqslant q \vee r \vee s$, co należało pokazać. Jeśli $a \neq q$ to $q \vee a$ jest prostą. Z założenia punkt p leży na prostej $q \vee a$. Wiemy, że a, r są punktami oraz $r \leqslant a$. Zatem $r = a$. Za s w takim razie wystarczy wziąć punkt na prostej $q \vee a$. Wtedy $q \vee r \vee s = q \vee a$. Stąd i z założenia $p \leqslant q \vee a$ mamy $p \leqslant q \vee r \vee s$, co kończy dowód.

Niech a będzie prostą. Wtedy należy rozpatrzeć dwa przypadki: gdy $q \leqslant a$ oraz gdy $q \nleqslant a$.
Załóżmy, że $q \leqslant a$. Wtedy $q \vee a = a$ jest prostą i dalsze rozumowanie jest takie jak w przypadku gdy a jest punktem.
Teraz załóżmy, że $q \nleqslant a$. Wtedy $q \vee a$ jest płaszczyzną. Z założenia punkt p leży na $q \vee a$, a punkt r leży na prostej a. Stąd $q \vee r$ jest prostą. Za s wystarczy wziąć punkt leżący w płaszczyźnie $q \vee a$ ale poza prostą $q \vee r$. Wtedy punkty p, q, r albo leżą na jednej prostej i wtedy $p \leqslant q \vee r \vee s$ albo rozpinają płaszczyznę $q \vee r \vee s$ na której leży punkt p, co należało pokazać.

Niech teraz a będzie co najmniej płaszczyzną. Rozważmy dwa przypadki: gdy $q \leqslant a$, oraz $q \nleqslant a$.

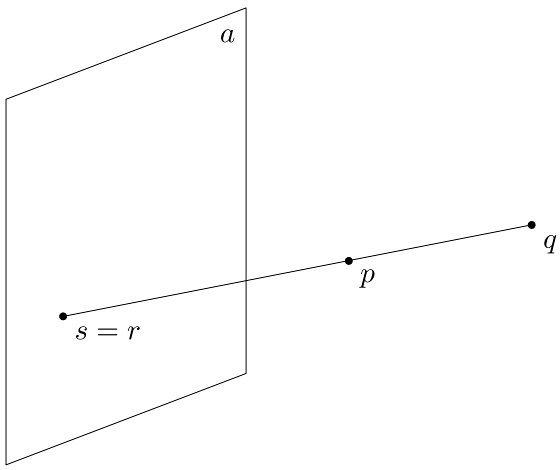


Rysunek 6.1

Najpierw załóżmy, że $q \leqslant a$ (rys. 6.1). Wtedy $a \vee q = a$. Stąd i z założeń mamy $p \leqslant a$. Za s wystarczy wziąć punkt p, co kończy dowód.

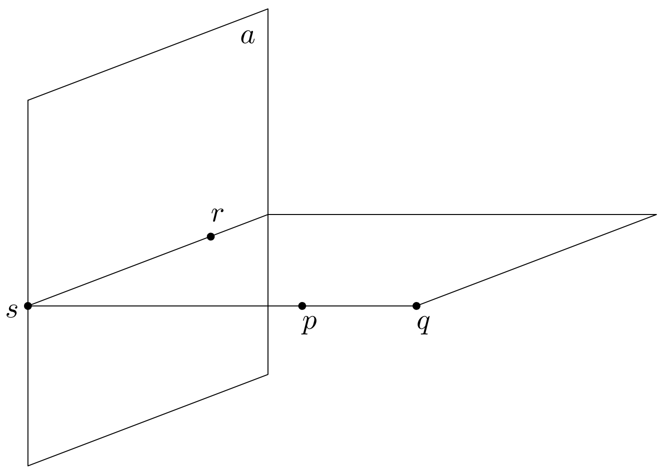
Teraz załóżmy, że $q \nleqslant a$. Wtedy a jest hiperpłaszczyzną w $a \vee q$. Rozpatrzmy dwa przypadki: gdy $p \leqslant a$ oraz $p \nleqslant a$. W pierwszym przypadku bierzemy $s = p$ i dowód jest zakończony. W drugim oba punkty p i q nie leżą na a. Gdy $p = q$, to za s bierzemy r, co kończy dowód. Gdy natomiast $p \neq q$, to $p \vee q$

jest prostą w $a \vee q$. Teraz mamy następujące możliwości: prosta $p \vee q$ przecina a lub nie.



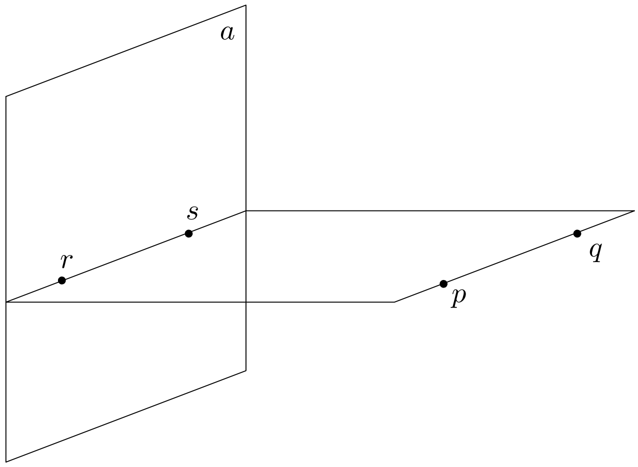
Rysunek 6.2

W przypadku, gdy prosta $p \vee q$ przecina a, powiedzmy w punkcie s, czyli $s \leqslant a$, to rozważamy dwie możliwości: $s = r$ lub $s \neq r$. Jeśli $s = r$ (rys. 6.2), to $q \vee r \vee s = q \vee r = q \vee p$. Zatem $p \leqslant q \vee r \vee s$ i dowód jest zakończony.



Rysunek 6.3

Jeśli $s \neq r$ (rys. 6.3), to mamy następującą równość: $q \vee s = p \vee q$. Wtedy $q \vee r \vee s = p \vee q \vee r$. Stąd $p \leqslant q \vee r \vee s$, co kończy dowód.



Rysunek 6.4

Teraz rozważmy przypadek, gdy prosta $p \vee q$ nie przecina a (rys 6.4). Ponieważ a jest hiperpłaszczyzną w $a \vee q$, więc z uwagi na 1.8 prosta $p \vee q$ jest równoległa do podprzestrzeni a, czyli istnieje punkt $s \leqslant a$ taki, że $r \vee s \parallel p \vee q$. Wtedy $\pi = (p \vee q) \vee (r \vee s)$ jest płaszczyzną rozpiętą przez dwie proste równoległe. Równie dobrze jednak $\pi = q \vee r \vee s$, czyli prosta $r \vee s$ plus punkt q poza nią. Zatem $p \leqslant \pi = q \vee r \vee s$, co kończy dowód w tym przypadku i kończy go zupełnie.

□

Widać tutaj zależność pomiędzy teorią krat a geometrią. Kratowa jest terminologia natomiast dowód jest geometryczny.

Rozdział 7

Charakteryzacje teorio-kratowe

7.1 Geometria rzutowa

Twierdzenie 7.1. *Niech L będzie kratą skończonej wysokości, atomistyczną spełniającą warunek* (C)*. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *L jest kratą modularną.*

(ii) *Jeśli $a \in L$, p, q są atomami w L takimi, że $p \leqslant q \vee a$, to istnieje atom $r \in L$ taki, że $r \leqslant a$ oraz $p \leqslant q \vee r$.*

(iii) *Jeśli p jest atomem w L, $a, b \in L$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz $p \leqslant a \vee b$ to istnieją atomy q, r w L takie, że $q \leqslant a$, $r \leqslant b$ oraz $p \leqslant q \vee r$.*

Dowód. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Załóżmy, że krata L jest modularna. Zatem spełnia też warunek (Sm) czyli dla $a, b \in L$

$$\text{jeśli} \quad a \wedge b \prec a \quad \text{to} \quad b \prec a \vee b.$$

Weźmy p, q będące atomami w L i $a \in L$ takie, że $p \leqslant q \vee a$. Możliwe są dwa przypadki $q \leqslant a$ oraz $q \nleq a$.

Załóżmy, że $q \leqslant a$. Wtedy $p \leqslant a$. Zatem za r wystarczy wziąć atom p. Mamy wtedy $p \leqslant q \vee r = q \vee p$ oraz $r = p \leqslant a$, co należało pokazać.

Teraz załóżmy, że $q \nleq a$. Rozpatrzmy dwa przypadki $p \leqslant a$ oraz $p \nleq a$. W pierwszym przypadku za r wystarczy wziąć atom p i dowód jest zakończony. Niech teraz $p \nleq a$. Gdy $p = q$ to znów $p = r$ kończy dowód. Załóżmy zatem, że $p \neq q$. Wiemy, że wysokość $(p \vee q) = 2$ oraz $p \vee q \nleq a$. Stąd wysokość $(a \wedge (p \vee q)) \leqslant 1$. Więc mamy dwie możliwości albo wysokość $a \wedge (p \vee q)$ wynosi 0 albo 1.
Jeśli wysokość $(a \wedge (p \vee q)) = 0$ to $a \wedge q = 0$ bo $a \wedge q \leqslant a \wedge (p \vee q)$. Zatem z warunku (C) mamy $a \prec a \vee q$. Ponieważ $p \leqslant p \vee a$ z założenia, więc $p \vee q \vee a = a \vee q$ i dalej $a \prec p \vee q \vee a$. Stąd ze stwierdzenia 1.38 i z (Sm*) za r wystarczy wziąć $(p \vee q) \wedge a$. Mamy bowiem $(p \vee q) \wedge a \leqslant a$ i z modularności

$$p \leqslant (q \vee a) \wedge (p \vee q) = q \vee (a \wedge ((p \vee q)) = q \vee r.$$

Jeśli $(a \wedge (p \vee q))$ jest atomem to weźmy $r = a \wedge (p \vee q)$. Wtedy $r \leqslant a$ i $r \leqslant p \vee q$. Podobnie jak w poprzednim akapicie z modularności $p \leqslant q \vee r$, co kończy dowód.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Weźmy $a, b \in L$ takie, że $a, b \neq 0$ oraz p będące atomem takim, że $p \leqslant a \vee b$. Krata jest atomistyczna, więc niech $b = r_1 \vee r_2 \vee ... \vee r_n$, gdzie $r_1, r_2, ..., r_n$ to atomy. Wtedy $p \leqslant a \vee b = r_1 \vee r_2 \vee ... \vee r_n \vee a$. Z (ii) istnieje atom q_1 taki, że $q_1 \leqslant r_2 \vee r_3 \vee ... \vee r_n \vee a$ i $p \leqslant r_1 \vee q_1$. Ponownie z (ii) istnieje atom q_2 taki, że $q_2 \leqslant r_3 \vee r_4 \vee ... \vee r_n \vee a$ i $q_1 \leqslant q_2 \vee r_2$. Analogicznie rozumując po n krokach z (ii) otrzymamy atom q_n taki, że $q_n \leqslant a$ oraz $q_{n-1} \leqslant r_n \vee q_n$. Weźmy zatem $q := q_n$. Wtedy $p \leqslant r_1 \vee q_1 \leqslant r_1 \vee r_2 \vee q_2 \leqslant ... \leqslant r_1 \vee r_2 \vee ... \vee r_n \vee q_n = b \vee q$. Z (ii) istnieje atom $r \leqslant b$ taki, że $p \leqslant q \vee r$, co należało pokazać.

"(iii) $\Rightarrow$ (i)" Niech $a, b \in L$. Pokażemy, że a M b. Weźmy $x \in L$ taki, że

$$x \leqslant b. \tag{7.1}$$

Należy sprawdzić równość $x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b$. Gdy $x = 0$ dowód jest zakończony. Załóżmy zatem $x \neq 0$. Wtedy mamy $0 < x$. Wiemy, że $x \leqslant x \vee a$. Z (7.1) mamy $0 < x \leqslant (x \vee a) \wedge b$. Stąd $0 < (x \vee a) \wedge b$. Niech p będzie dowolnym atomem takim, że

$$p \leqslant (x \vee a) \wedge b. \tag{7.2}$$

W szczególności $p \leqslant x \vee a$, więc z (iii) istnieją atomy q, r takie, że $q \leqslant x$ i $r \leqslant a$ oraz

$$p \leqslant q \vee r. \tag{7.3}$$

Z lematu 2.14(ii) mamy r M b. Wiemy, że $q \leqslant x \leqslant b$. Zatem z definicji pary modularnej mamy

$$p \leqslant (q \vee) r \wedge b = q \vee (r \wedge b) \leqslant x \vee (a \wedge b). \tag{7.4}$$

Pierwsza nierówność wynika z tego, że $p \leqslant b$ oraz z (7.3). Krata L jest atomistyczna więc $(x \vee a) \wedge b$ można wyrazić jako kres górny atomów $p_1, p_2, ...p_n$, tzn.

$$(x \vee a) \wedge b = p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n. \tag{7.5}$$

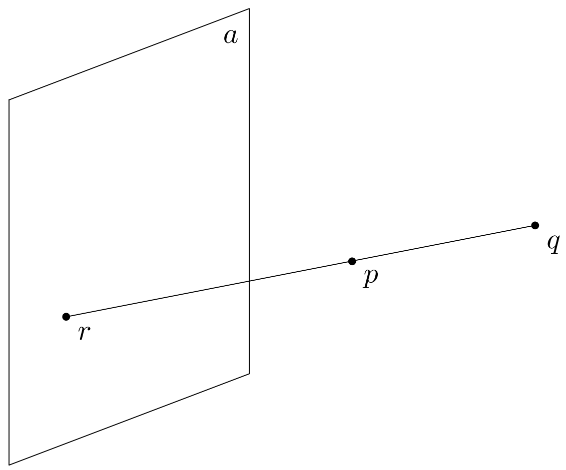
Z dowolności wyboru p w (7.2) za p mogę wziąć p_i, natomiast z (7.4) mamy $p_i \leqslant x \vee (a \wedge b)$. W takim razie z (7.5) mamy

$$(x \vee a) \wedge b \leqslant x \vee (a \wedge b), \tag{7.6}$$

Z lematu 2.2 oraz (7.6) mamy a M b co należało pokazać. □

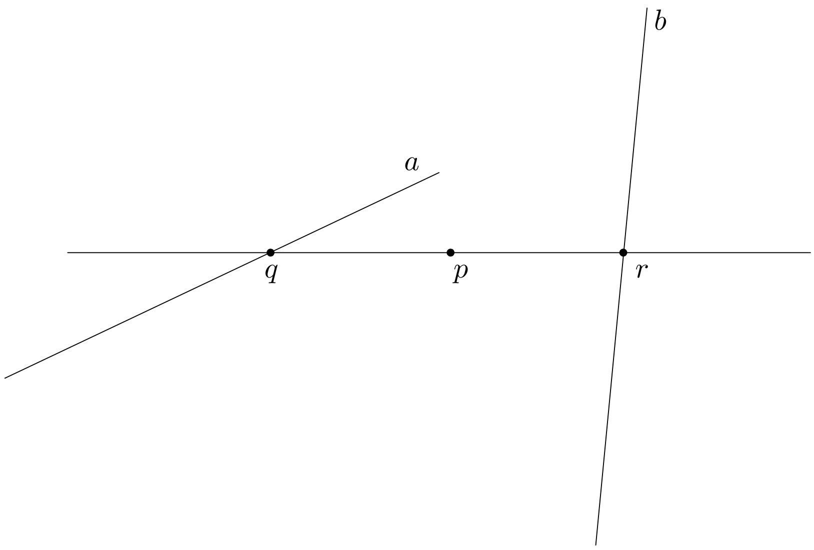
Powyższe twierdzenie mówi o dwóch ważnych faktach w geometrii. Mianowicie warunek (ii) można przetłumaczyć tak: każda prosta w przestrzeni rzutowej przecina hiperpłaszczyznę. Rolę przestrzeni pełni $a \vee q$. O ile $q \nleqslant a$

to hiperpłaszczyzną jest wówczas a bo q jest atomem. Prostą natomiast jest $p \vee q$ przy założeniu, że $p \neq q$. Ta sytuacja przedstawiona jest na rys. 7.1. W sytuacji, gdy $a \leqslant q$ prosta $p \vee q$ leży cała w a, tzn. $p \vee q \leqslant a$.



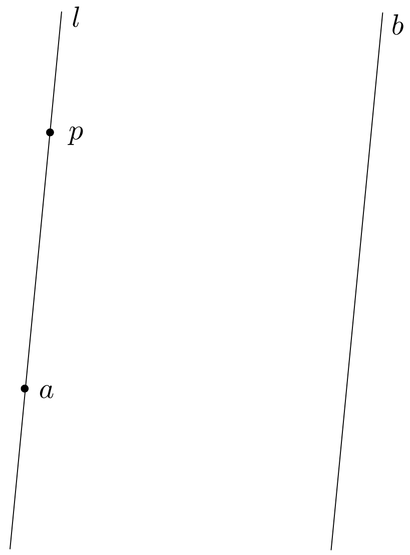
Rysunek 7.1

Warunek (iii) tego twierdzenia mówi z kolei, że jeśli punkt p w przestrzeni rzutowej leży w podprzestrzeni rozpiętej przez podprzestrzenie a i b to w a i w b można wybrać takie punkty, odpowiednio q i r, że p leży na prostej $q \vee r$ łączącej q i r (por. rys. 7.2). W książce [1] kraty spełniająca ten warunek nazywane są *bi-atomowymi* i jest cała seria prac autorki tej książki poświęcona takim właśnie kratom.



Rysunek 7.2

Zauważmy, że obie z opisywanych własności przysługują wyłącznie geometrii rzutowej. W przestrzeni afinicznej prosta może być równoległa do hiperpłaszczyzny i tym samym jest z nią rozłączna. Co do warunku (ii) rozważmy różne proste równoległe l i b oraz dwa różne punkty a i p na prostej l jak na rysunku 7.3. Proste l i b, ale również punkt a i prosta b (por. 3.5), rozpinają płaszczyznę $a \vee b$, na której to wszystko się dzieje. Punkt p leży na tej płaszczyźnie, ale nie istnieje prosta przez punkt a przecinająca prostą b, na której leżałby punkt p. Warunek (i) twierdzenia 7.1 jest warunkiem koniecznym na to, aby krata była rzutowa.



Rysunek 7.3

7.2 Geometria afiniczna

Lemat 7.2. *Niech L będzie kratą atomistyczną skończonej wysokości spełniającą warunek* (C) *i niech $a, b \in L$ takie, że $a < b$. Wtedy c jest atomem w $[a, b]$, wttw., gdy istnieje atom $p \in L$ taki, że $a \wedge p = 0$, $c = a \vee p$ oraz $p \leqslant b$.*

DOWÓD. " $\Leftarrow$ " Załóżmy, że istnieje atom $p \in L$ taki, że $p \leqslant b$,

$$a \wedge p = 0, \tag{7.7}$$

oraz

$$c = a \vee p \tag{7.8}$$

Wtedy z (7.7) oraz warunku (C) dostajemy $a \prec a \vee p$. Stąd i z (7.8) mamy $a \prec c$. Ponadto $c = a \vee p \leqslant b$, czyli c jest atomem w odcinku $[a, b]$.
" $\Rightarrow$ " Niech c będzie atomem w odcinku $[a, b]$. Zatem

$$c \leqslant b \tag{7.9}$$

oraz

$$a \prec c. \tag{7.10}$$

Zauważmy, że z (7.10) musi być $c \neq 0$. Krata L jest atomistyczna, więc istnieje w niej atom, powiedzmy p, taki że

$$p \leqslant c \tag{7.11}$$

oraz

$$p \nleqslant a. \tag{7.12}$$

Taki atom p o własności (7.12) istnieje bo w przeciwnym razie musiałoby być $c \leqslant a$ co z uwagi na (7.10) nie jest możliwe. Z (7.12) mamy $a \wedge p = 0$. Stąd, na mocy (C) otrzymujemy $a \prec a \vee p$. Ponadto z (7.10) oraz (7.11) dostajemy

$$a \prec a \vee p \leqslant c.$$

Ostatecznie z (7.10) musi być $c = a \vee p$. Z (7.11) i (7.9) mamy $p \leqslant b$, co kończy dowód. □

Dowiedzione wcześniej w 5.10, 6.2 i 6.4 własności kraty afinicznej możemy podsumować w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 7.3. *Niech L będzie kratą atomistyczną skończonej wysokości spełniającą warunek* (C). *Następujące warunki sa równoważne.*

(i) *Krata L jest słabo modularna.*

(ii) *Krata L spełnia* (W2).

(iii) *Dla dowolnego atomu $p \in L$ filtr $[p)$ jest podkratą modularną.*

(iv) *Krata L jest mocno płaszczyznowa(spełnia* (SP)*).*

Dowód. "(i) $\Leftrightarrow$ (ii)" Równoważność tych warunków wynika z 5.6
"(i) $\Rightarrow$ (iii)" Implikacja wynika z definicji słabej modularności.
" (iii) $\Rightarrow$ (i)" Niech $a > 0$ w kracie atomistycznej istnieje atom p taki, że $p < a$ czyli: $[a) \subseteq [p)$. Podkrata kraty modularnej jest modularna (por. [5]) co kończy dowód.
"(iii) $\Rightarrow$ (iv)" Niech $p, q, r \in L$ będą atomami takimi, że $r \leqslant a$ oraz

$$p \leqslant q \vee a. \tag{7.13}$$

Gdy $p = r$ lub $q = r$ to $p \leqslant a$. Wtedy $s = p$ kończy dowód.
Załóżmy, że $p \neq r$ oraz $q \neq r$. Wtedy $p \vee r$ i $q \vee r$ są to elementy wysokości dwa jako kres górny różnych atomów. Zatem są to atomy w filtrze $[r)$. Z (7.13) mamy $p \vee r \leqslant (q \vee r) \vee a$. Ponadto $p \vee r, q \vee r, a \in [r)$, gdzie $[r)$ jest podkratą modularną. Na mocy 7.1(ii) istnieje atom w $[r)$ powiedzmy x taki, że $p \vee r \leqslant (q \vee r) \vee x$ oraz $x \leqslant a$. Element x ma wysokość dwa w kracie L. Weźmy

atom s taki, że $x = r \vee s$. Wtedy $q \vee r \vee s = q \vee r \vee r \vee s = q \vee r \vee x \geqslant p \vee r \geqslant p$ oraz $s \leqslant r \vee s = x \leqslant a$, co kończy dowód.

"(iv) $\Rightarrow$ (iii)" Załóżmy, że krata L jest mocno płaszczyznowa. Niech p będzie atomem w L. Filtr $[p)$ jest podkratą w naszej kracie L. Pokażemy, że $[p)$ spełnia warunek (ii) w twierdzeniu 7.1. Niech zatem l i k będą atomami w $[p)$ i $l \leqslant k \vee a$, dla $a \in [p)$. Z lematu 7.2 istnieją atomy $q, r \in L$ takie, że $p \neq q$, $l = p \vee q$, $p \neq r$ i $k = p \vee r$. Wówczas $q \leqslant l \leqslant k \vee a = p \vee r \vee a = r \vee a$ i $p \leqslant a$. Z (SP) istnieje atom $s \in L$ taki, że

$$q \leqslant r \vee p \vee s \quad \text{i} \quad s \leqslant a. \tag{7.14}$$

Gdy $s \neq p$ to weźmy $d := p \vee s$. Zauważmy, że d to atom w $[p)$ taki, że $d \leqslant a$ oraz z (7.14)

$$l = p \vee q \leqslant r \vee q \vee s = k \vee d. \tag{7.15}$$

Gdy $s = p$ wtedy dla dowolnego atomu d w filtrze $[p)$ takiego, że $d \leqslant a$ z (7.14) mamy

$$l = p \vee q \leqslant r \vee p \vee s = r \vee p = k \leqslant k \vee d \tag{7.16}$$

Tak więc z (7.15) i (7.16) filtr $[p)$ spelnia *(ii)* w twierdzeniu 7.1, więc jest modularny. $\square$

Dowód twierdzenia 6.4 zrobiony został niezależnie, używając wyłącznie własności kraty afinicznej. Mając teraz mocne twierdzenie kratowe 7.3 można skorzystać z niego oraz 5.10 aby dowieść 6.4.

Niech L będzie kratą atomistyczną,

$$A(L) = \{p \in L : 0 \prec p\}$$

będzie zbiorem wszystkich punktów (atomów) w L i niech

$$P(L) = \{p \vee q : p, q \in A(L) \text{ i } p \neq q\}$$

będzie zbiorem prostych (elementów wysokości 2 w L). Załóżmy dodatkowo, że $P(L) \neq \emptyset$, czyli że w kracie L są przynajmniej dwa różne atomy. Niech dla $k, l \in P(L)$

$$k \parallel l \quad :\Longleftrightarrow \quad (k \wedge l = 0 \quad \text{oraz} \quad k \,\bar{\mathrm{M}}\, l) \quad \text{lub} \quad k = l. \tag{7.17}$$

Lemat 7.4. *Jeśli $k \in P(L)$, $p, q \in A(L)$, $p \neq q$ oraz $p, q \leqslant k$ to $k = p \vee q$.*

DOWÓD. Niech $k \in P(L)$, $p, q \in A(L)$, $p \neq q$, $p, q \leqslant k$. Wtedy $p \vee q \leqslant k$. Wiemy, że $p \vee q$ oraz k są wysokości dwa. Zatem $k = p \vee q$. $\square$

Powyższy lemat pozwala nam utożsamić prostą $k \in P(L)$ ze zbiorem punktów na niej tzn. z

$$k^* = \{p \in A(L) : p \leqslant k\}. \tag{7.18}$$

W ten sposób zbiór

$$P^*(L) = \{k^* : k \in P(L)\} \tag{7.19}$$

jest rodziną podzbiorów zbioru punktów $A(L)$.

Lemat 7.5 (K. Bienias [2])**.** *Jeśli krata L jest półmodularna w sensie Wilcoxa to spełnia również warunek* (C).

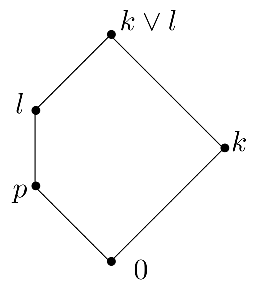
Twierdzenie 7.6. *Niech L będzie kratą, półmodularną w sensie Wilcoxa. Wtedy dla $k, l \in P(L)$:*

$$k \parallel l \quad \Longleftrightarrow \quad k \parallel_L l.$$

DOWÓD. W przypadku gdy $k = l$ dowód jest oczywisty. Niech $k \neq l$.

" $\Leftarrow$ " Załóżmy, że $k \wedge l = 0$ oraz $k, l \prec k \vee l$. Pokażemy, że $k \ \bar{\mathrm{M}}\ l$. Na mocy 2.9 powinien istnieć odpowiedni pięciokąt. Elementy k, l kraty L są wysokości dwa. Natomiast element $k \vee l$ jest elementem wysokości trzy. Ponieważ $l \in P(L)$, więc istnieją różne atomy p, q takie, że $l = p \vee q$. Stąd $p < l$. Należy jeszcze sprawdzić, czy zbiór $\{0, p, k, l, k \vee l\}$ jest domknięty na kresy. Czyli czy $p \wedge k = 0$ oraz $p \vee k = k \vee l$? Z założeń mamy $k \wedge l = 0$ oraz $p < l$. Stąd dostajemy $p \wedge k = 0$. Stąd, że $p < l$ mamy $p \vee k \leqslant l \vee k$. Wiemy, że $p \wedge k = 0$. Stąd, z 7.5 oraz warunku (C) otrzymujemy $k \prec p \vee k$. Zatem element $p \vee k$ jest wysokości trzy. Element $l \vee k$ również jest wysokości trzy. Stąd otrzymujemy $p \vee k = l \vee k$.

" $\Rightarrow$ " Załóżmy, że $k \wedge l = 0$ oraz $k \ \bar{\mathrm{M}}\ l$. Zatem z 2.9 pięciokąt $\{0, p, k, l, k \vee l\}$ gdzie $0 = p \wedge l = k \wedge l, p \vee l = k \vee l$ i $p < l$ (rys. 7.2.1) jest podkratą w L. Dlatego wiemy, że $p \wedge k = 0$. Stąd i z warunku (C) mamy $k \prec p \vee k = k \vee l$. Z symetrii relacji M mamy też $l \ \bar{\mathrm{M}}\ k$ (por. tw. 5.3). Analogicznie postępując otrzymamy $l \prec k \vee l$.



Rysunek 7.2.1: Para niemodularna $l \ \bar{\mathrm{M}}\ k$.

$\square$

Lemat 7.7. *Niech $k, l, m \in P(L)$. Jeśli $k \parallel l$ i $l \parallel m$ to $k \wedge m = 0$ lub $k = m$.*

DOWÓD. Gdy $k = m$ dowód jest zakończony. Załóżmy zatem $k \neq m$. Niech $k \parallel l$ i $l \parallel m$. Załóżmy nie wprost $k \wedge m \neq 0$. Zatem z rachunku wysokości istnieje atom p taki, że $p = k \wedge m$. Niech q, r będą atomami i niech $q < m$ oraz $r < k$. Zatem mamy $p < k < p \vee q \vee r$ oraz $p < m < p \vee q \vee r$. Stąd i z warunku (α) dostajemy $k = m$. Zatem nasze przypuszczenie było nieprawdziwe. Czyli $k \wedge m = 0$, co należało pokazać. □

Lemat 7.8. *W kracie L ograniczonej z dołu dla $a, b \in L$ jeśli $a, b \prec a \vee b$, to $a \parallel_L b$ lub $a \wedge b \neq 0$.*

DOWÓD. Niech $a, b \in L$ takie, że $a, b \prec a \vee b$. Zauważmy, że z założenia $a \neq b$ i $a \neq 0 \neq b$. Mamy dwie możliwości, albo $a \wedge b = 0$ i wówczas $a \parallel_L b$ zgodnie z 3.1 (3.3), albo $a \wedge b \neq 0$, co kończy dowód. □

Z 6.2 i 5.10 wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 7.9. *Krata afiniczna jest półmodularna w sensie Wilcoxa i spełnia warunek (α).*

Teraz udowodnimy twierdzenie odwrotne i uzyskamy pełną charakteryzację teorio-kratową geometrii afinicznej skończonego wymiaru.

Elementy wysokości jeden czyli atomy będziemy nazywać czasem punktami, elementy wysokości dwa będziemy nazywać prostymi, natomiast elementy wysokości trzy płaszczyznami.

Twierdzenie 7.10. *Niech L będzie kratą skończonej wysokości, półmodularną w sensie Wilcoxa oraz niech L spełnia warunek (α). Wtedy $\langle A(L), P(L), \parallel \rangle$ jest przestrzenią afiniczną.*

DOWÓD. Aby udowodnić powyższe twierdzenie należy sprawdzić poprawność czterech definicji. Zacznijmy od wykazania, że jest to przestrzeń prostych czyli od definicji 1.2.

(i) $P(L) \neq \emptyset$ zgodnie z założeniem, że w L są przynajmniej dwa atomy.

(ii) Niech $k, l \in P(L)$. Założenie $\mid k^* \cap l^* \mid \geqslant 2$ tłumaczy się, że dla k, l istnieją atomy $p, q \leqslant k, l$ takie, że $p \neq q$. Z lematu 7.4 mamy, że $p \vee q = k$ oraz $p \vee q = l$. Zatem $k = l$.

(iii) Niech $k \in P(L)$. Założenie $\mid k^* \mid \geqslant 2$ tutaj sprowadza się do pokazania, że pod k są dwa atomy. A to wynika wprost z określenia zbioru $P(L)$.

(iv) Niech $p, q \in A(L)$. Wtedy $p \vee q \in P(L)$. Zatem dla każdych dwóch punktów $p, q \in A(L)$ istnieje prosta k taka, że $p \vee q = k$. Stąd każde dwa punkty są współliniowe.

Przejdziemy teraz do sprawdzenia definicji równoległości. Zacznijmy od sprawdzenia, że $\parallel$ jest relacją równoważności. Niech $k, l, m \in P(L)$.

(i) Najpierw sprawdzimy zwrotność tej relacji, czyli czy $k \parallel k$? Z definicji równoległości 7.17 dla $k = k$ mamy $k \parallel k$.

(ii) Teraz sprawdzimy, że relacja ta jest symetryczna. Niech $k \parallel l$. Pokażemy, że $l \parallel k$. Z definicji relacji równoległości 7.17 mamy $k \wedge l = 0 \quad$ oraz $\quad k\ \bar{\mathrm{M}}\ l$. Stad też mamy $l \wedge k = 0$. Z symetrii relacji M wynika symetria relacji $\bar{\mathrm{M}}$, więc $l\ \bar{\mathrm{M}}\ k$. Zatem $l \parallel k$.

(iii) Niech $k \parallel l$ oraz $l \parallel m$. Pokażemy, że wtedy $k \parallel m$.
Gdy $k = l$ lub $l = m$ to dowód jest zakończony.
Załóżmy zatem $k \neq l$ oraz $l \neq m$. Z założeń oraz lematu 7.7 dostajemy, że $k \wedge m = 0$ lub $k = m$, ale a drugim przypadku dowód jest zakończony z wykazanej zwrotności $\parallel$. Ze stwierdzenia 3.9 wiemy, że $k \vee l$ oraz $l \vee m$ są płaszczyznami. Jak leży prosta m względem płaszczyzny $k \vee l$? Wiemy, że $l \leqslant (k \vee l) \wedge (l \vee m)$, czyli przekrój jest co najmniej wysokości dwa.
Rozważmy przypadek, gdy przekrój byłby wysokości trzy. Wtedy $k \vee l = l \vee m$. A to oznaczałoby, że k, l, m leżą na jednej płaszczyźnie. Proste k i m są rozłączne i skoro leżą na jednej płaszczyźnie to muszą być równoległe na mocy twierdzenia 7.6.
Teraz rozważmy przypadek, gdy $l = (k \vee l) \wedge (l \vee m)$. Oznaczmy $k \vee l = a$. Gdyby $a \wedge m \neq 0$ to istniałby atom p taki, że $p \leqslant a$ i $p \leqslant m$, ale $p \nleqslant l$ ponieważ $m \wedge l = 0$. Z jednej strony $p \vee l = a$ a ze stwierdzenia 3.9(i) $a = l \vee p = l \vee m$, co oznaczałoby, że $m \leqslant a$ a ten przypadek wykluczyliśmy. Zatem $a \wedge m = 0$. Z określenia prostej m istnieją różne atomy p, q takie, że $m = p \vee q$. Wiemy, że $m \parallel_L l$ oraz $l \leqslant a$. Stąd na mocy lematu 3.10 dostajemy $m <\!| \ a$. Weźmy $q \leqslant m$. Wtedy z lematu 3.5 $q \vee a = m \vee a$. Ponieważ $p \leqslant m$ to $p \leqslant a \vee q$. Na mocy 7.3 nasza krata jest mocno płaszczyznowa. Z (SP) dla $r \leqslant k$ istnieje atom $s \leqslant a$ taki, że $p \leqslant q \vee r \vee s$. Stąd $p \vee q \leqslant q \vee r \vee s$. Zatem

$$m \leqslant q \vee r \vee s. \tag{7.20}$$

Wiemy, że

$$(r \vee s) \wedge m = 0, \tag{7.21}$$

ponieważ $r \vee s \leqslant a$ oraz $a \wedge m = 0$. Gdyby $r = s$ to $m \leqslant q \vee r$. Stąd, że $r \leqslant a$ i $q \leqslant m$ i $a \wedge m = 0$ mamy $m = q \vee r$ bo m i $q \vee r$ są elementami wysokości dwa. Sprzeczność bo $r \nleqslant m$ gdyż $a \wedge m = 0$. Zatem $r \neq s$. Ponieważ mamy $q \wedge (r \vee s) = 0$ to $q \vee r \vee s$ jest płaszczyzną. Zatem z (7.20) $m \prec q \vee r \vee s$, $r \vee s \prec q \vee r \vee s$. Z (7.21) i twierdzenia 7.6

$$r \vee s \parallel m. \tag{7.22}$$

Ponadto $m \parallel l$. Z 7.7 Mamy zatem dwie możliwości albo $r \vee s = l$ albo $(r \vee s) \wedge l = 0$. Wiemy, że $r \leqslant k$ oraz $k \wedge l = 0$. Stąd pierwszy przypadek nie może zachodzić. Zatem mamy $(r \vee s) \wedge l = 0$, ale $r \vee s$ i l są to proste w jednej płaszczyźnie a. Tak więc na mocy twierdzenia 7.6

$$r \vee s \parallel l. \tag{7.23}$$

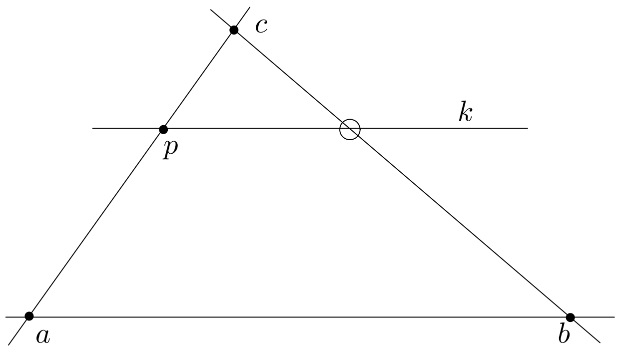
Wiemy, że $r \leqslant r \vee s$ i $r \leqslant a$ zatem z (α) $k = r \vee s$. Z (7.22) i (7.23) dostajemy $k \parallel m$, co należało pokazać.

Teraz pokażemy że do każdej prostej istnieje dokładnie jedna prosta równoległa przechodząca przez dany punkt.

1. (Euklides:) Niech $a \in A(L)$, $k \in P(L)$ oraz $a \nleqslant k$. Stąd i z określenia prostej w $P(L)$ mamy $k = p \vee q$. Zatem a, p, q są różnymi niezależnymi atomami. Z warunku (α) istnieje dokładnie jedno l takie, że $a < l < a \vee p \vee q$ oraz $l \wedge (p \vee q) = 0$. Zatem $a \leqslant l$ oraz $l \wedge k = 0$. Weźmy $x \leqslant k$. Wtedy $x \vee (k \wedge l) = x$ oraz $(x \vee k) \wedge l = k \wedge l = 0$. Stąd $k \, \bar{\mathrm{M}} \, l$. A zatem $k \parallel l$.

Teraz przejdźmy do pokazania, że L spełnia afiniczny warunek Veblena (AVC).

1. (AVC:) Niech $a, b, c \in A(L)$ tworzą niezdegenerowany trójkąt, tzn. a, b, c są niezależne. Niech prosta k przecina bok $a \vee c$ i niech $k \parallel a \vee b$ jak na rys. 7.1. Pokażemy, że k przecina bok $b \vee c$.



Rysunek 7.1:

W przypadku, gdy $k = a \vee b$ to $k \wedge (b \vee c) = b$, natomiast gdy $c \leqslant k$, to $k \wedge (b \vee c) = c$. Pozostaje więc do rozstrzygnięcia sytuacja, w której mamy punkt $p \leqslant k$ taki, że $a \neq p \neq c$. Na mocy 7.4 mamy

$$k = a \vee p = a \vee c. \tag{7.24}$$

Wiemy, że $k \parallel_L a \vee b$, zatem z definicji mamy $k <\!| \; a \vee b$. Mamy, że $k \wedge (a \vee b) = 0$ oraz $p \leqslant k$. Zatem z 3.9(i) otrzymujemy, że $a \vee b \vee k = a \vee b \vee p$. Zatem równość (7.24) oznacza, że

$$a \vee b \vee k = a \vee b \vee p = a \vee b \vee c.$$

Punkty a, b, c jako wierzchołki niezdegenerowanego trójkąta są niezależne, więc wszystko dzieje się na płaszczyźnie $a \vee b \vee c$. Stąd na mocy 7.8 i 7.6 albo $k \parallel b \vee c$, albo $k \wedge (b \vee c)$ jest punktem. Założmy że zachodzi pierwszy przypadek

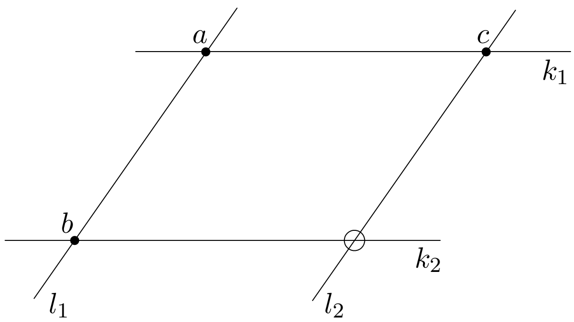
$$k \parallel b \vee c. \tag{7.25}$$

Z założenia mamy $a \vee b \parallel k$. Stad i z (7.25) oraz przechodniości relacji $\parallel$ mamy $a \vee b \parallel b \vee c$. Zatem z definicji $\parallel$ mamy $a \vee b \wedge (b \vee c) = 0$, ale $a \vee b \wedge (b \vee c) = b$. Sprzeczność. Zatem przypadek $k \parallel b \vee c$ jest niemożliwy. Czyli prosta k przecina bok trójkąta $b \vee c$ w punkcie, co należało pokazać.

Ostatnim warunkiem który należy sprawdzić jest warunek uzupełniania do równoległoboku (PC).

1. (PC:) Niech $k_1, k_2, l_1, l_2 \in P(L)$. Niech k_1 przecina l_1 i l_2, l_1 przecina k_1 i k_2 oraz $k_1 \parallel k_2$ i $l_1 \parallel l_2$. Pokażemy, że k_2 przecina l_2.

   Gdy $k_1 = k_2$ lub $l_1 = l_2$ to dowód jest zakończony. Zatem mamy trzy niezależne punkty a, b, c jak na rys. 7.2.



Rysunek 7.2:

Z 3.9(i) mamy $k_1 \vee k_2 = a \vee b \vee c$ oraz $l_1 \vee l_2 = a \vee b \vee c$. Stąd wszystko dzieje się na płaszczyźnie $a \vee b \vee c$. Zatem na mocy 7.8 i 7.6 albo $k_2 \parallel l_2$ albo $k_2 \wedge l_2$ jest punktem. Załóżmy, że

$$k_2 \parallel l_2. \tag{7.26}$$

Z założenia mamy, że $k_1 \parallel l_2$. Stąd i z (7.26) oraz przechodności relacji równoległości mamy $k_1 \parallel l_2$. Zatem z definicji relacji równoległości mamy $k_1 \wedge l_2 = 0$. Sprzeczność ponieważ k_1 przecina l_2. Stąd przypuszczenie, że $k_2 \parallel l_2$ było nieprawdziwe, zatem k_2 przecina l_2, co należało pokazać.

□

Z pracy [2] wynika, że przy skończonej wysokości półmodularność w sensie Wilcoxa jest równoważna półmodularności w każdym sensie. W sytuacji ogólnej, dla krat dowolnej wysokości, gdzie tej równoważności nie ma, zakłada się jednak półmodularność Wilcoxa. Pierwsza pełna teorio-kratowa charakteryzacja geometrii afinicznej jest w pracy [6], w której Sasaki dowodzi bardziej ogólne twierdzenie:

Twierdzenie 7.11 (U. Sasaki [6]). *Jeśli L jest kratą kompaktowo atomistyczną, półmodularną w sensie Wilcoxa i spełniającą warunek* (α)*, to* $\langle A(L), P(L), \| \rangle$ *jest przestrzenią afiniczną.*

Sasaki jednak używa innej aksjomatyki przestrzeni afinicznej choć równoważnej z naszą.

Skorowidz symboli

Bibliografia

[1] Bennett M.K., *Affine and projective geometry*, Wiley Interscience, 1995.

[2] Bienias K., *Kraty półmodularne w geometrii*, Praca magisterska, Uniwersytet w Białymstoku, 2009.

[3] Birkhoff G., *Lattice theory*, American Mathematical Society, Providence, 1967.

[4] Frink O., *Complemented modular lattices and projective spaces of infinite dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc, 60 (1946) 452-467.

[5] Grätzer G., *General lattice theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, 1978.

[6] Sasaki U., *Lattice theoretic characterization of an afine geometry of arbitrary dimension*, Hiroshima Math. J. Ser. A 16 (1952) 223-238.

[7] Stern M., *Semimodular lattices*, Cambridge University Press 1999.

[8] Wilcox L.R., *Modularity in the theory of lattices*, Ann. of Math. 40 (1939) 490-505.