Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

Agnieszka Chrabąszcz

Podprzestrzenie w grassmannianach kombinatorycznych

Praca magisterska napisana
pod kierunkiem
dr. hab. Krzysztofa Prażmowskiego, prof. UwB

Białystok 2009

Składam serdeczne podziękowania
dr. Mariuszowi Żynelowi
za opiekę nade mną przy
przygotowaniu tej pracy.

Agnieszka Chrabąszcz

Spis treści

Wstęp

W pracy [3] badane są tak zwane podprzestrzenie odcinkowe w przestrzeniach pęków (grassmannianach rzutowych). Nazwa tych podprzestrzeni bierze się stąd, że są one wyznaczone przez odcinki wyjściowej kraty podprzestrzeni przestrzeni wektorowej (lub rzutowej). Dowodzi się w tej pracy, że podprzestrzenie odcinkowe i tylko takie, z dokładnością do zanurzenia, są przestrzeniami pęków.

W pracy [1] dowodzi się między innymi, że w wyniku zanurzenia jednego grassamannianu kombinatorycznego w drugim otrzymujemy odcinkową podstrukturę baerowską.

Z kolei w pracy [2] znajduje się charakteryzacja podprzestrzeni odcinkowych w przestrzeniach pęków oparta na pojęciu mocnych podprzestrzeni i ich własnościach.

Zasadniczym celem postawionym w mojej pracy jest znalezienie charakteryzacji odcinków w grassmannianach kombinatorycznych analogicznej do tej z [2]. Dzięki tej charakteryzacji możliwy będzie dowód twierdzenia 3.14 analogicznego do twierdzenia (2.5) z [1] tylko bez założenia skończoności grassmannianów kombinatorycznych.

W rozdziale 1 wprowadzam podstawowe terminy i zależności, między innymi definiuję: częściową przestrzeń prostych, przestrzeń Gamma, podprzestrzeń Grassmanna oraz podstrukturę baerowską. Przytaczam tutaj również interesujące mnie wyniki z [2].

W rodziale 2 pojawia się pełna definicja grassmannianu kombinatorycznego i sprawdzam czy jest on częściową przestrzenią prostych. Analizuję założenia, przy których można uzyskać trywialne grassmanniany kombinatoryczne. Następnie dowodzę niektóre własności: lemat none-or-two, szukam podkonfiguracji Veblena oraz podstruktur baerowskich. W twierdzeniu 2.4 dowodzę, że w grassmannianach kombinatorycznych są możliwe dwa typy klik: gwiazdy i układy. Kończąc ten rozdział przytaczam definicję zanurzenia i w 2.20 cytuję twierdzenie 2.5 z pracy [1] M. Prażmowskiej.

Rozdział 3 zawiera zasadnicze wyniki mojej pracy. Zaczynam od przedstawienia klik grassmannianów kombinatorycznych w postaci odcinków (lematy 3.1 i 3.2). Następnie badam przekroje dwóch różnych maksymalnych klik (stwierdzenia 3.3 i 3.4), na czym oparta jest dalsza charakteryzacja odcinków. W definicji 3.6 wprowadzam pojęcie podstruktury Grassmanna. Przykładem takiej podstruktury w grassmannianie kombinatorycznym jest odcinek (stwierdzenie 3.7). Jeden z dwóch najważniejszych wyników mojej pracy, czyli charakteryzacja odcinków jako podstruktur Grassmanna jest w twierdzeniu 3.12, które dowodzę w serii lematów 3.8 – 3.11. Drugi istotny wynik, czyli uogólnienie twierdzenia M. Prażmowskiej z [1] dowodzę w twierdzeniu 3.14.

Rozdział 1

Podstawowe pojęcia

Zanim wgłębimy się w główny temat tej pracy, należałoby zwrócić uwagę na kilka istotnych pojęć, z których w dalszym rozumowaniu będziemy korzystać. Bardzo ważnym terminem, wręcz niezbędnym do naszego rozważania jest definicja częściowej przestrzeni prostych.

1.1 Przestrzeń prostych

Definicja 1.1. Niech S będzie niepustym zbiorem oraz niech $\mathcal{L} \subseteq 2^S$. Elementy S nazywamy punktami, natomiast elementy $\mathcal{L}$ nazywamy prostymi. Strukturę $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ nazywamy *częściową przestrzenią prostych* wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i) $\mathcal{L} \neq \emptyset$,

(ii) jeśli $k, l \subseteq \mathcal{L}$ oraz $|k \cap l| \geqslant 2$, to $k = l$,

(iii) jeśli $k \subseteq \mathcal{L}$, to $|k| \geqslant 2$.

Niech $S = \{a, b, c\}$ ($|S| = 3$) i $\mathcal{L} = \{k, l\}$, gdzie $k = \{a, b\}$, $l = \{a, c\}$, czyli bierzemy strukturę z trzema punktami a, b, c i dwiema prostymi k, l. Na każdej prostej są po dwa punkty. Proste k, l mają jeden punkt wspólny a. Ta konkretna struktura $\langle S, \mathcal{L} \rangle$ jest przykładem częściowej przestrzeni prostych.

Od teraz przez $\mathfrak{A}$ będziemy oznaczać częściową przestrzeń prostych o zbiorze punktów S i zbiorze prostych $\mathcal{L}$. Mówimy, że dwa punkty są *współliniowe* (połączalne), gdy leżą na jednej prostej. Dodatkowo dla punktów $a, b \in S$, piszemy $a \sim b$, gdy a i b są współliniowe. Jeśli mamy przypadek, że $a \neq b$, to prostą przez a i b zapisujemy przez $\overline{a, b}$. Dwie proste *przecinają się*, gdy posiadają wspólny punkt.

Definicja 1.2. Jeśli każde dwa punkty częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{A}$ są współliniowe, wtedy $\mathfrak{A}$ nazywana jest *przestrzenią prostych*.

Definicja 1.3. Niech $X \subseteq S$. Mówimy, że X jest *podprzestrzenią* częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej prostej $k \in \mathcal{L}$ takiej, że $|k \cap X| \geqslant 2$ mamy $k \subseteq X$.

Czasem mówimy krótko, że podzbiór X jest domknięty na prowadzenie prostych mając na myśli warunek z powyższej definicji.

Definicja 1.4. Podzbiór $X \subset S$ w częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{A}$, w którym każde dwa punkty są współliniowe nazywamy *kliką*.

Klika X jest *maksymalna*, gdy nie istnieje klika większa od niej, to znaczy, gdy dla dowolnej kliki Y takiej, że $X \subseteq Y$ mamy $X = Y$. Jeżeli X jest kliką maksymalną oraz a jest punktem takim,że $a \notin X$, to zbiór $X \cup \{a\}$ nie jest kliką.

Definicja 1.5. *Sympleks* to klika, gdzie żadne trzy punkty nie leżą na jednej prostej.

W przestrzeniach, w których pojęcie wymiaru podprzestrzeni ma sens, zazwyczaj przyjjmuje się, że najmniejsza podprzestrzeń zawierająca sympleks n-elementowy jest wymiaru $n - 1$. Krótko mówi się, że sympleks n-elementowy wyznacza (rozpina) podprzestrzeń $(n - 1)$-wymiarową.

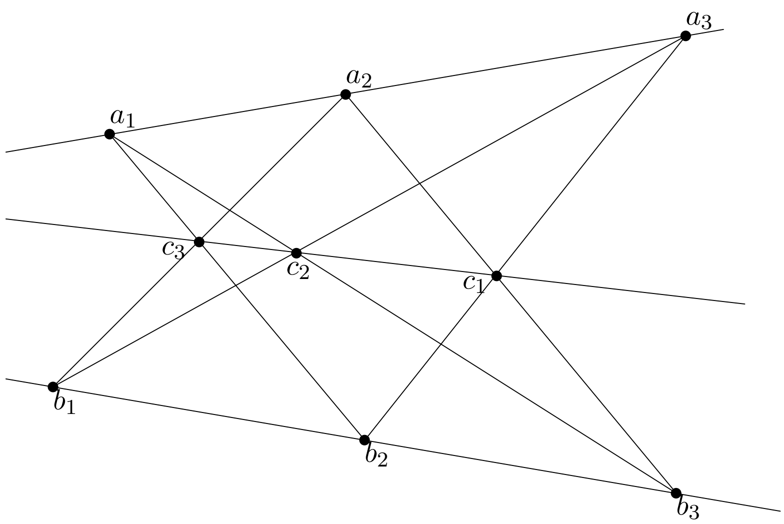
Definicja 1.6. Podprzestrzeń X przestrzeni $\mathfrak{A}$ jest *mocna* wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa jej punkty są współliniowe.

Mocna podprzestrzeń, to podprzestrzeń, która jest kliką.

Definicja 1.7. Mówimy, że podzbiór X zbioru S jest *spójny*, jeśli dla dowolnych różnych punktów $a, b \in X$ istnieje łamana zawarta w X łącząca a z b. Przez łamaną rozumiemy ciąg punktów takich, że dwa kolejne punkty w tym ciągu są współliniowe, formalnie: istnieją punkty $c_0, \ldots, c_r \in X$ takie, że $c_0 = a$, $c_r = b$ oraz $c_{i-1} \sim c_i$ dla $i = 1, \ldots, r$.

Definicja 1.8. Mówimy, że częściowa przestrzeń prostych $\mathfrak{A}$ jest *przestrzenią gamma*, czyli spełnia *aksjomat Shulta*, albo aksjomat zwany *none-one-or-all*, gdy dla dowolnego punktu a i prostej l jeśli punkt a jest połączalny z dwoma różnymi punktami prostej l, to jest połączalny ze wszystkimi punktami prostej l.

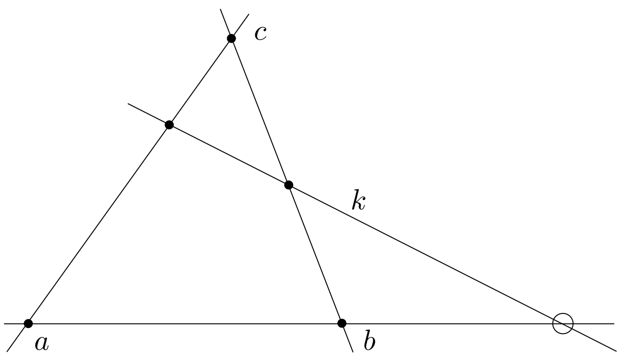
Mówimy, że trzy punkty a, b, c tworzą *trójkąt*, gdy są parami różne, parami współliniowe i nie leżą na jednej prostej; inaczej mówiąc, gdy a, b, c są 3-elementowym sympleksem. Punkty a, b, c nazywamy *wierzchołkami* trójkąta. Czasem mówimy też, że trzy proste k, l, m tworzą trójkąt, gdy są parami różne, parami się przecinają i nie są współpękowe (tzn., nie ma takiego punktu, w którym one wszystkie przecinają się). Proste k, l, m nazywamy *bokami* trójkąta.



Rysunek 1.1: Rzutowy warunek Pappusa.

Definicja 1.9. Mówimy, że częściowa przestrzeń prostych $\mathfrak{A}$ spełnia *warunek Pappusa*, gdy punkty przecięcia przeciwległych boków sześciokąta wpisanego w dwie proste leżą na jednej prostej (rys. 1.1).

Definicja 1.10. Mówimy, że częściowa przestrzeń prostych $\mathfrak{A}$ spełnia *rzutowy warunek Veblena* (PVC), gdy prosta przecinająca dwa boki dowolnego trójkąta w $\mathfrak{A}$ w dwóch różnych punktach przecina również trzeci bok tego trójkąta (rys. 1.2).



Rysunek 1.2: Rzutowy warunek Veblena (PVC).

Definicja 1.11. Strukturę $\mathfrak{B} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ nazywamy *przestrzenią rzutową*, gdy: $\mathfrak{B}$ jest przestrzenią prostych, na każdej prostej leżą przynajmniej trzy punkty oraz $\mathfrak{B}$ spełnia rzutowy warunek Veblena.

1.2 Proste jako łańcuchy

Niech $\mathcal{K}$ będzie dowolnym niepustym zbiorem, S będzie zbiorem punktów oraz $\mathrm{I} \subseteq S \times \mathcal{K}$ będzie relacją incydencji. Fakt, że punkt $a \in S$ leży na prostej to znaczy, że incyduje z prostą $l \in \mathcal{K}$ zapisujemy $a \mathrel{\mathrm{I}} l$. Formalnie rozważamy strukturę incydencyjną $\langle S, \mathcal{K}, \mathrm{I}\rangle$. Można z niej odzyskać naszą strukturę $\langle S, \mathcal{L}\rangle$ wprowadzając pojęcie łańcucha.

Dla prostej $l \in \mathcal{K}$ *łańcuchem* wyznaczonym przez l jest zbiór punktów:

$$l^* = \{a \in S : a \mathrel{\mathrm{I}} l\}.$$

Wówczas $\mathcal{L} = \{l^* : l \in \mathcal{K}\}$ będzie naszą rodziną prostych, jako rodzina podzbiorów zbioru punktów. W zasadzie abstrakcyjną relację incydencji I zastępujemy w ten sposób naturalną relacją $\in$ zwykłego teoriomnogościowego należenia.

1.3 Przestrzeń Grassmanna

Przez V będziemy oznaczać przestrzeń wektorową. Piszemy $\mathrm{Sub}(U)$ jako zbiór wszystkich podprzestrzeni podprzestrzeni U z przestrzeni V, $\mathrm{Sub}_k(U)$ jako zbiór wszystkich k-podprzestrzeni z U oraz $\mathrm{Sup}_k(U)$ jako zbiór wszystkich k-podprzestrzeni z V, które zawierają U.

Definicja 1.12. Niech Z i Y będą podprzestarzeniami V. *Odcinkiem* o końcach Z, Y nazywamy zbiór wszystkich podprzestrzeni U takich, że $Z \subseteq U \subseteq Y$ i oznaczamy go $[Z, Y]$, w szczególności zbiór

$$[Z, Y]_k := \mathrm{Sup}_k(Z) \cap \mathrm{Sub}_k(Y)$$

nazywamy *k-odcinkiem.*

Przy powyższych oznaczeniach Z nazywamy *wierzchołkiem*, a Y nazywamy *podstawą* odcinka lub k-odcinka.

Definicja 1.13. Niech V będzie przestrzenią wektorową oraz k liczbą naturalną taką, że $0 < k < \dim V$. Jeśli B jest $(k+1)$-podprzestrzenią oraz H jest $(k-1)$-podprzestrzenią B, wtedy $\mathbf{p}(H, B) = [H, B]_k$ nazywamy *k-pękiem* o wierzchołku H i podstawie B. Przez $\mathcal{P}_k(V)$ oznaczamy rodzinę wszystkich k-pęków w przestrzeni V.

Definicja 1.14. Geometrię:

$$\mathfrak{P} = \mathbf{P}_k(V) = \langle \mathrm{Sub}_k(V), \mathcal{P}_k(V)\rangle$$

z k-podprzestrzeniami z przestrzeni V jako punktami wraz z k-pękami jako prostymi nazywamy *przestrzenią pęków*, albo *przestrzenią Grassmanna.*

Zauważmy, że dla $k = 1$ lub $k = \dim V - 1$ przestrzeń pęków $\mathfrak{P}$ jest przestrzenią rzutową. Dla $k \neq 1$ i $k \neq \dim V - 1$ przestrzeń pęków $\mathfrak{P}$ jest właściwą częściową przestrzenią prostych, czyli taką, w której istnieje para niewspółliniowych punktów.

Definicja 1.15. Elementy rodziny zbiorów

$$\mathcal{S}_k(V) := \Big\{[H, Y]_k : H \subseteq \mathrm{Sub}_{k-1}(V)\Big\}$$

nazywamy *gwiazdami*, natomiast elementy rodziny

$$\mathcal{T}_k(V) = \Big\{[Z, B]_k : B \subseteq \mathrm{Sub}_{k+1}(V)\Big\}$$

nazywamy *układami*. Maksymalne gwiazdy to takie, w których $Y = V$, a maksymalne układy to takie, w których $Z = \Theta$ (Θ jest przestrzenią zerową).

Jeśli $1 < k < \dim V - 1$, czyli jeśli $\mathfrak{P}$ nie jest przestrzenią rzutową, to dla każdej prostej $p = \mathbf{p}(H, B)$ z przestrzeni $\mathfrak{P}$ możemy znaleźć maksymalną właściwą gwiazdę $\mathbf{S}(p) = [H, V]_k$ i maksymalny właściwy układ $\mathbf{T}(p) = [\Theta, B]_k$ takie, że $p \subseteq \mathbf{S}(p)$ oraz $p \subseteq \mathbf{T}(p)$.

Definicja 1.16. Podprzestrzeń X częściowej przestrzeni prostych $\mathfrak{A}$ nazywamy *podprzestrzenią Grassmanna*, jeśli:

(A_1) podprzestrzeń X jest spójna,

(A_2) dla każdych różnych maksymalnych podprzestrzeni X_1, X_2 z $\mathfrak{A}$ takich, że X posiada co najmniej wspólną prostą z X_i dla $i = 1, 2$, X_1 posiada co najmniej wspólną prostą z X_2 oraz albo $X \cap X_1 \cap X_2 = \emptyset$, albo $X \cap X_1 \cap X_2$ jest prostą.

W pracy [2] dowiedziono dwa następujące fakty:

Fakt 1.17. *Odcinek* $[Z, Y]_k$ *jest podprzestrzenią* $\mathfrak{P}$.

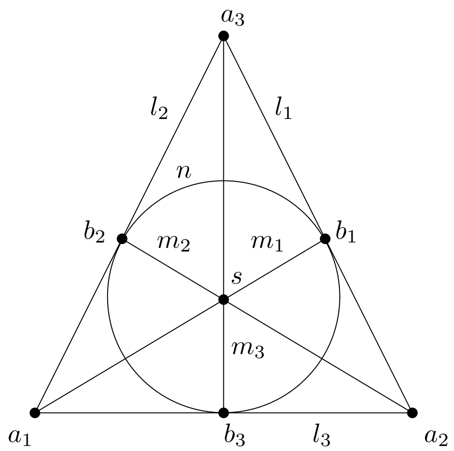
Fakt 1.18. *Niech* X *będzie podprzestrzenią* $\mathfrak{P}$. *Następujące warunki są równoważne:*

(1) $X = [Z, Y]_k$ *dla pewnych* $Z, Y \in \mathrm{Sub}(V)$,

(2) X *spełnia* (A_1) *oraz* (A_2).

1.4 Podstruktury baerowskie

Struktura incydencyjna $\langle S, \mathcal{L}\rangle$ tak, jak została wprowadzona w definicji 1.1 jest dosyć szczególna, bo proste są podzbiorami zbioru punktów. Można strukturę incydencyjną rozumieć nieco ogólniej. Zbiór punktów i zbiór prostych bierzemy wówczas jako dwa niezależne zbiory odpowiednio S i $\mathcal{L}$, powiązane ze sobą *relacją incydencji* $\mathrm{I} \subseteq S \times \mathcal{L}$.



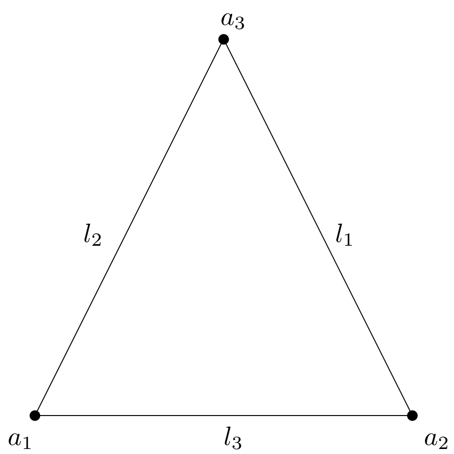
Rysunek 1.3: Płaszczyzna Fano.

Definicja 1.19. Niech $S' \subseteq S$ i $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ oraz $\mathrm{I}'{=}\mathrm{I} \cap S' \times \mathcal{L}'$ wtedy podstruktura $\langle S', \mathcal{L}', \mathrm{I}' \rangle$ struktury $\langle S, \mathcal{L}, \mathrm{I} \rangle$ jest *podstrukturą baerowską*, jeśli spełnione są następujące warunki:

1. Dla każdych dwóch punktów $a_1, a_2 \in S'$ i dla każdej prostej $l \in \mathcal{L}$ jeśli $a_1 \mathrel{\mathrm{I}} l$, $a_2 \mathrel{\mathrm{I}} l$ oraz $a_1 \neq a_2$, to $l \in \mathcal{L}'$.
2. Dla każdych dwóch prostych $l_1, l_2 \in \mathcal{L}'$ i dla każdego punktu $a \in S$ jeśli $a \mathrel{\mathrm{I}} l_1$, $a \mathrel{\mathrm{I}} l_2$ oraz $l_1 \neq l_2$, to $a \in S'$.

Podstruktura $\langle S', \mathcal{L}', \mathrm{I}' \rangle$ jest *niezdegenerowana*, gdy $|S'| \geqslant 2$.

Jeżeli mówimy o podstrukturze w zadanej strukturze, to możemy opuścić relację incydencji I', gdyż jest ona jednoznacznie zdeterminowana przez I, S' oraz $\mathcal{L}'$.



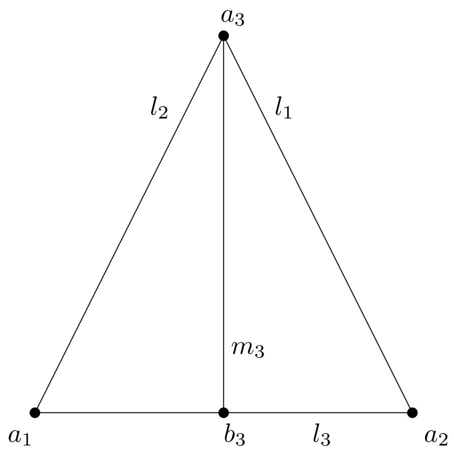
Rysunek 1.4: Podstruktura baerowska płaszczyzny Fano.

Do zilustrowania pojęcia podstruktury baerowskiej rozważmy płaszczyznę rzutową Fano (rys. 1.3), gdzie

$$S = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, s\}, \qquad \mathcal{L} = \{l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n\}.$$

Wybierzmy $S' = \{a_1, a_2, a_3\}$ oraz $\mathcal{L}' = \{l_1, l_2, l_3\}$ tak, jak na rysuku 1.4 Taki układ zgodnie z warunkami definicji tworzy podstrukturę baerowską.

Innym przykładem podstruktury baerowskiej może być następująca struktura. Niech $S' = \{a_1, a_2, a_3, b_3\}$, $\mathcal{L}' = \{l_1, l_2, l_3, m_3\}$, jak na rusunku 1.5. Podstruktura $\langle S', \mathcal{L}' \rangle$ spełnia założenia definicji 1.19, zatem tworzy ona podstrukturę baerowską płaszczyzny Fano.



Rysunek 1.5: Podstruktura baerowska płaszczyzny Fano.

Definicja 1.20. Mówimy, że podstruktura baerowska $\langle S', \mathcal{L}' \rangle$ struktury incydencyjnej $\langle S, \mathcal{L}, \mathrm{I} \rangle$ jest *mocna*, gdy dla dowolnych $a, b \in S'$ istnieje taka prosta $l \in \mathcal{L}'$, że $a, b \;\mathrm{I}\; l$.

Rozdział 2

Grassmanniany kombinatoryczne

Definicja 2.1. Dla dowolnego zbioru X oraz liczby naturalnej k takich, że $1 \leqslant k$ oraz $k + 1 \leqslant |X|$, *grassmannianem kombinatorycznym* nazywamy geometrię, której punktami są k-elementowe podzbiory X, a prostymi są $(k+1)$-elementowe podzbiory X, czyli strukturę

$$\mathbf{G}_k(X) = \langle \wp_k(X), \wp_{k+1}(X), \subset \rangle.$$

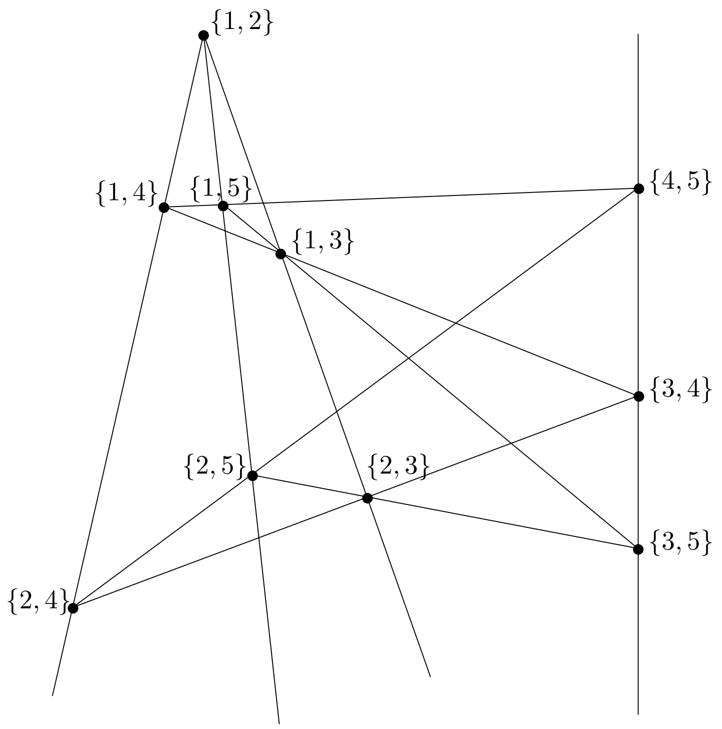
Sprawdzimy, że grassmannian kombinatoryczny $\mathbf{G}_k(X)$ jest częściową przestrzenią prostych, tzn. że spełnia wszystkie warunki definicji 1.1.

(i) $\wp_{k+1}(X) \neq \emptyset$, ponieważ $|X| \geqslant k + 1$ z założenia o zbiorze X.

(ii) Niech $l, m \in \wp_{k+1}(X)$. Załóżmy, że istnieją $a, b \in \wp_k(X)$ takie, że $a \neq b$, $a, b \in l, m$. Z uwagi na ilość elementów w l oraz w a i b musi być $l = a \cup b$. Podobnie $m = a \cup b$. Z tego wynika, że $l = a \cup b = m$.

(iii) Niech $l \in \wp_{k+1}(X)$. Musimy pokazać, że na prostej l leżą przynajmniej dwa różne punkty. W tym celu wybierzmy że zbioru l podzbiór a o k elementach. Jest to możliwe, gdyż w l jest $k + 1$ elementów. W zbiorze l pozostał jeden element x, którego nie ma w zbiorze a. Wybierzmy teraz w l podzbiór b k-elementowy, w którym znajduje się x. Zatem $a, b \subset l$ oraz $a \neq b$. Szukanymi punktami są a i b.

W szczególności grassmannian kombinatoryczny nie jest przestrzenią prostych, czego dobrym przykładem będzie konfiguracja Desarguesa (rys. 2.1), która jest właściwą częściową przestrzenią prostych i w której można znaleźć dwa punkty, na przykład $\{1, 2\}$ oraz $\{3, 4\}$, które nie są współliniowe. Ta konfiguracja to grassmannian $\mathbf{G}_2(X)$, gdzie X jest dowolnym zbiorem 5-elementowym. Zauważmy, że nie ma znaczenia jaki zbiór konkretnie bierzemy za X, istotna jest tylko liczba elementów w tym zbiorze. Przyjmujemy zatem konwencję,



Rysunek 2.1: Konfiguracja Desarguesa – grassmannian $\mathbf{G}_2(5)$.

że $\mathbf{G}_k(n)$ to grassmannian kombinatoryczny nad zbiorem n-elementowym. W takim razie konfiguracja Desarguesa to grassmannian $\mathbf{G}_2(5)$.

Inne przykłady grassmannianów kombinatorycznych znajdują się na rysunkach 2.2 oraz 2.3.

2.1 Ograniczenia na k

Dla pewnych szczególnych wartości k oraz $|X| = n$ uzyskujemy trywialne grassmanniany kombinatoryczne. Rozważmy trzy przypadki:

(1) Niech $k = 1$. Wtedy w $\mathbf{G}_k(X)$:

  (i) punktów jest tyle, co elementów w X,

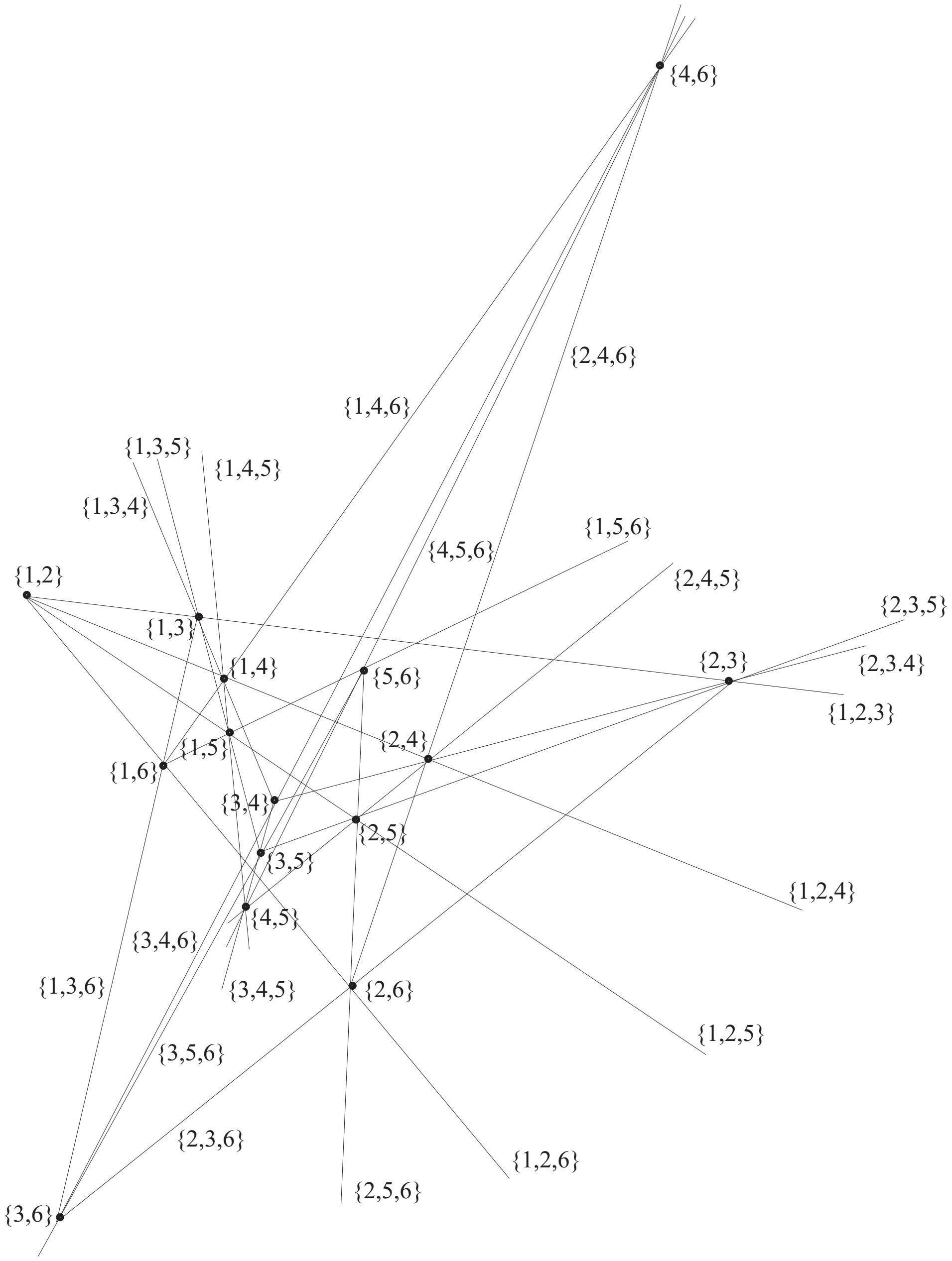
  (ii) każde dwa punkty są współliniowe,

  (iii) na każdej prostej są dwa punkty.

  Mówiąc inaczej, $\mathbf{G}_1(X)$ jest grafem zupełnym o n wierzchołkach.

(2) Niech $k + 1 = n$. Grassmannian $\mathbf{G}_{n-1}(X)$ jest jedną prostą.

(3) Niech $k + 1 = n - 1$. Ten przypadek jest dualny do (1), w tym sensie, że pojęcie punktu zamieniamy z pojęciem prostej w (1). Zachodzą tutaj następujące związki:

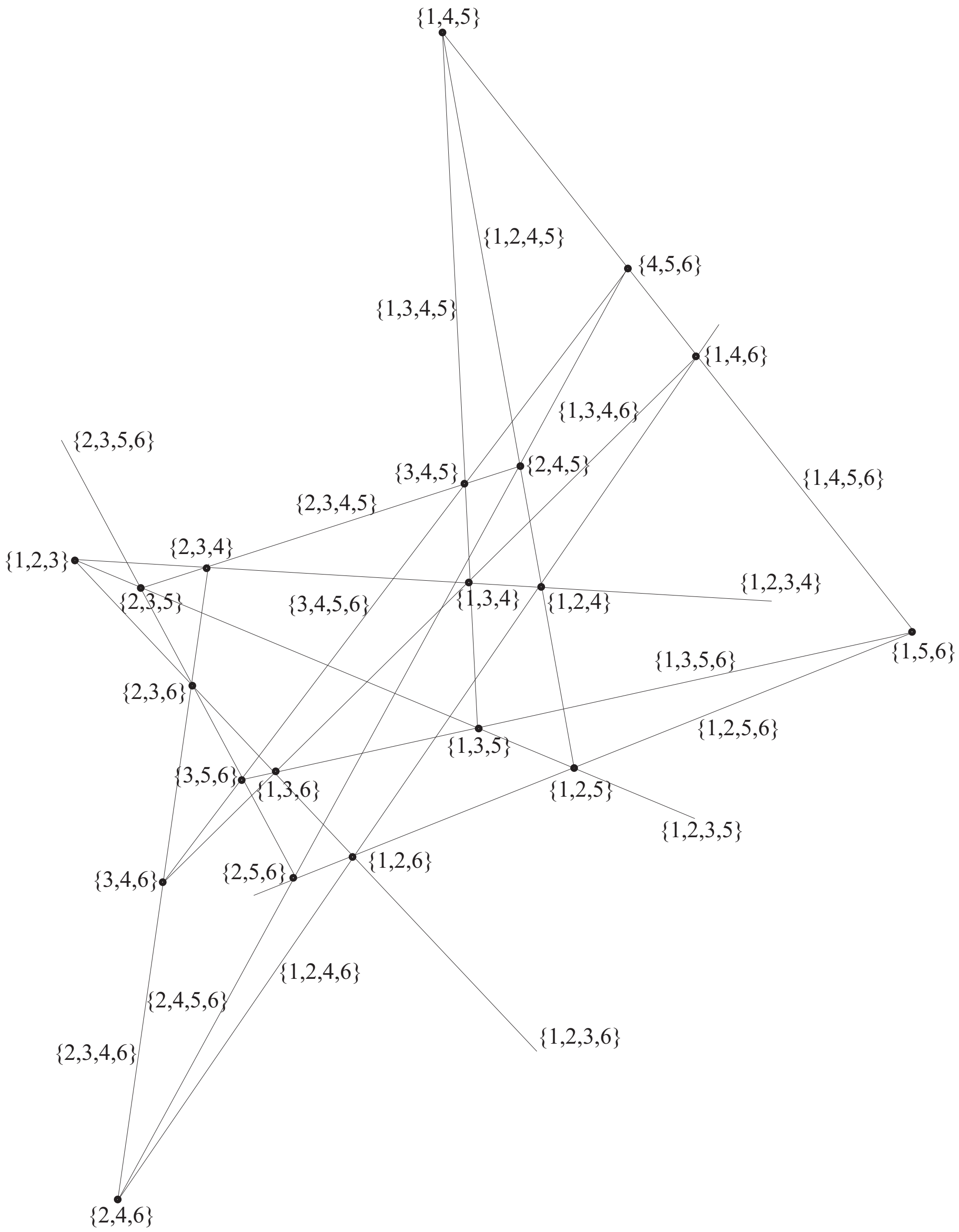


Rysunek 2.2: Konfiguracja $\mathbf{G}_2(6)$.

(i') Prostych jest tyle, co elementów w X. Rzeczywiście tak jest, ponieważ dla $|X| = n = k - 2$ mamy

$$\text{ilość prostych} = \binom{n}{n-1},$$

(ii') Każde dwie proste przecinają się. Suma dwóch różnych $(n-1)$-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego musi być całym



Rysunek 2.3: Konfiguracja $\mathbf{G}_3(6)$.

n-elementowym zbiorem. W każdym z nich jest jeden element, którego nie ma w drugim. Zatem ich przekrój jest dokładnie $n-2$ elementowy.

(iii') Przez każdy punkt przechodzą dwie proste. Każdy punkt jest zbiorem o $|X|-2$ elementach i można go dokładnie na dwa sposoby uzupełnić do prostej przez dołożenie jednego z dwóch elementów z

X, poza tym punktem.

W dalszej części pracy zakładamy, że:

$$2 \leqslant k \quad \text{oraz} \quad k+3 \leqslant |X|. \tag{2.1}$$

2.2 Podstawowe własności

Zauważmy, że dla punktu $a \in \wp_k(X)$ oraz prostej $l \in \wp_{k+1}(X)$ mamy

$$a \in l^* \iff a \subset l.$$

Lemat 2.2. *Niech $a, b \in \wp_k(X)$ takie, że $a \neq b$, oraz niech $l \in \wp_{k+1}(X)$. Wówczas $a \subset l$ i $b \subset l$ wtedy i tylko wtedy, gdy $l = a \cup b$.*

Dowód. ($\Leftarrow$) Trywialne.
($\Rightarrow$) Rozumowanie jak przy sprawdzaniu punktu (ii) pod 2.1. □

Lemat 2.3. *Niech $a, b \in \wp_k(X)$ takie, że $a \neq b$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) $|a \cap b| = k - 1$,

(2) $|a \cup b| = k + 1$,

(3) $a \sim b$.

Dowód. Niech $a, b \in \wp_k(X)$ będą takie, że $a \neq b$.
((1) $\Leftrightarrow$ (2)) Bezpośredni wniosek z faktu, że

$$|a \cup b| = |a| + |b| - |a \cap b|.$$

((2) $\Leftrightarrow$ (3)) Trywialne ze względu na postać prostych w grassmannianie kombinatorycznym. □

Lemat 2.4. *Jeśli a, b, c są parami różnymi punktami prostej w $\mathbf{G}_k(X)$, to*

$$|a \cap b \cap c| = k - 2.$$

Dowód. Niech $a, b, c \in \wp_k(X)$ będą parami różnymi punktami na jednej prostej $l \in \wp_{k+1}(X)$. Na mocy 2.2 to oznacza, że

$$a \cup b = b \cup c = a \cup b \cup c = l,$$

a tym samym

$$|a \cup b \cup c| = k + 1. \tag{2.2}$$

Ponieważ

$$|a \cup b \cup c| = |a| + |b| + |c| - |a \cap b| - |b \cap c| - |a \cap c| + |a \cap b \cap c|,$$

więc z uwagi na 2.3

$$|a \cup b \cup c| = 3k - 3(k-1) + |a \cap b \cap c|,$$

i ostatecznie z (2.2) dostajemy

$$|a \cap b \cap c| = k - 2,$$

co należało pokazać. □

Lemat 2.5. *Jeśli a, b, c są wierzchołkami trójkąta w $\mathbf{G}_k(X)$, to*

$$|a \cap b \cap c| = k - 1.$$

Dowód. Niech $a, b, c \in \wp_k(X)$ będą takie, że $\neq(a, b, c)$ oraz $\sim(a, b, c)$. Z przyjętych założeń oraz z 2.3 wynika, że zbiory a, b, c różnią się między sobą parami dokładnie jednym elementem. To znaczy w szczególności mamy jedyne takie $\alpha \in a$, że $\alpha \notin b$ oraz jedyne takie $\beta \in b$, że $\beta \notin a$. Rozpatrujemy dwa przypadki:

(i) Niech $\alpha \in c$. Ponieważ $a \sim c$, więc na mocy 2.3 mamy jedyne takie $\gamma \in c$, że $\gamma \notin a$. Przypuśćmy, że $\gamma \in b$. Wówczas musi być $\gamma = \beta$, bo β jest jedynym elementem takim, że $\beta \in b$ i $\beta \notin a$. Wówczas $c = a \cap b \cup \{\beta\}$, a więc $c \subset a \cup b$, co oznacza, że a, b, c są współliniowe i otrzymujemy sprzeczność. Nasze przypuszczenie było fałszywe, mamy więc $\gamma \notin b$. Ponieważ $b \sim c$, więc pozostałe elementy c różne od γ muszą być w b, w tym także α, co jest sprzeczne z naszym wcześniejszym założeniem i w efekcie rozpatrywany przypadek $\alpha \in c$ nie jest możliwy.

(ii) Niech $\alpha \notin c$. Oznaczmy $h = a \cap b$. Zauważmy, że $|h| = k - 1$ z 2.3 oraz $a = h \cup \{\alpha\}$. Ponieważ $a \sim c$ i $\alpha \notin c$, to z uwagi na 2.3 musi być $h \subset c$.

Pokazaliśmy, że przypadek $\alpha \in c$ nie jest możliwy, natomiast, gdy $\alpha \notin c$, to mamy żądane $h = a \cap b \cap c$. □

Wniosek 2.6. *Jeśli punkty a, b, c są wierzchołkami trójkąta w $\mathbf{G}_k(X)$, to*

$$a \cap b = b \cap c = c \cap a = a \cap b \cap c.$$

Lemat 2.7 (none-or-two)**.** *Niech $a \in \wp_k(X)$ oraz $l \in \wp_{k+1}(X)$ będą takie, że $a \not\subset l$. Na prostej l nie ma punktów połączalnych z punktem a, albo są dokładnie dwa takie punkty.*

Dowód. Musimy wyeliminować przypadki, gdzie taki punkt jest jeden lub więcej niż dwa.

1. Przypuśćmy, że na prostej l jest dokładnie jeden punkt b taki, że $a \sim b$. Wówczas z 2.3 mamy $h := a \cap b \in \wp_{k-1}(X)$. Muszą zatem istnieć takie parami różne $\alpha, \beta, \gamma \in X$, że

$$a = h \cup \{\alpha\}, \qquad b = h \cup \{\beta\} \qquad \text{oraz} \qquad l = b \cup \{\gamma\} = h \cup \{\beta, \gamma\}.$$

   Weźmy $c = h \cup \{\gamma\}$. Mamy $c \subset l$ oraz na mocy 2.3 $a \sim c$. Wskazaliśmy różny od b punkt na prostej l połączalny z punktem a.

2. Przypuśćmy, że na prostej l są punkty b, c takie, że $b \neq c$ oraz $a \sim b, c$. Punkty a, b, c tworzą w takim razie trójkąt. Na mocy 2.5 mamy $h \in \wp_{k-1}(X)$ taki, że $h = a \cap b \cap c$, natomiast z 2.6 mamy

$$h = a \cap b = b \cap c = c \cap a.$$

   Przypuśćmy, że istnieje punkt $d \subset l$ taki, że $a \sim d$ oraz $d \neq b, d \neq c$. Punkty a, b, d tworzą trójkąt, zatem z uwagi na 2.6

$$a \cap b = a \cap b \cap d \subset d,$$

   co daje $h \subset d$. Zatem $h \subset b, c, d$, czyli $k - 1 \leqslant |b \cap c \cap d|$, co jest sprzeczne z 2.4.

$\square$

Zgodnie z definicją 1.8 powyższy lemat mówi że grassmannian kombinatoryczny jest przestrzenią gamma wyłącznie dla $k = 1$, bo tylko wówczas na każdej prostej są dokładnie dwa punkty.

Twierdzenie 2.8 (M. Prażmowska [1]). *Niech n, k będą takie, że $1 \leqslant k < n$ oraz $|X| = n$. Wtedy:*

(i) przestrzeń $\mathbf{G}_k(X)$ spełnia aksjomat Veblena,

(ii) przestrzeń $\mathbf{G}_k(X)$ spełnia aksjomat Desarguesa,

(iii) przestrzeń $\mathbf{G}_k(X)$ trywialnie spełnia aksjomat Pappusa.

2.3 Podkonfiguracje Veblena

W naszym grassmannianie kombinatorycznym $\mathbf{G}_2(5)$ można zauważyć, że wybierając odpowiednie punkty leżące na odpowiednich prostych można znaleźć konfigurację Veblena. Rzeczywiście, jeśli przykładowo weźmiemy punkty

$$\{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 5\}\}$$

to uzyskamy konfigurację Veblena. W konfiguracji Desarguesa jest ich dokładnie pięć. Pozostałe to

$$\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,5\}\},$$

$$\{\{1,2\},\{1,4\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\},$$

$$\{\{1,4\},\{1,5\},\{1,3\},\{4,5\},\{3,4\},\{3,5\}\},$$

oraz

$$\{\{2,4\},\{2,5\},\{4,5\},\{2,3\},\{3,4\},\{3,5\}\}.$$

Intuicyjnie konfiguracja Desarguesa to przestrzeń trzywymiarowa i naturalnymi podprzestrzeniami w tej przestrzeni są płaszczyzny, które odpowiadają konfiguracjom Veblena. Weźmy bowiem prostą przykładowo $\{1,2,4\}$ oraz punkt $\{1,5\}$. Zauważmy, że wybrany punkt nie leży na ustalonej prostej. Spróbujmy teraz znaleźć najmniejszą podprzestrzeń rozpiętą przez wybraną prostą i punkt. W pierwszym kroku dokładamy dwie proste $\{1,2,5\}$ i $\{1,4,5\}$ rozpięte przez odpowiednie punkty $\{1,2\}$ i $\{1,5\}$ oraz $\{1,4\}$ i $\{1,5\}$. W drugim kroku dokładamy prostą $\{2,4,5\}$ jako rozpiętą przez punkty leżące na uprzednio wybranych prostych. Tak uzyskana podkonfiguracja jest domknięta na prowadzenie prostych, zatem jest podprzestrzenią wyjściowej przestrzeni. Tak więc w sumie w $\mathbf{G}_2(5)$ jest pięć takich płaszczyzn.

2.4 Podstruktury baerowskie

Znając już definicję grassmannianu możemy poszukać dla niego podstrukturę baerowską. Dalej będziemy używać następujących oznaczeń. Dla dowolnego podzbioru $h \subseteq X$, *quasi-gwiazda* o wierzchołku h to

$$S_k(h) = \{a \in \wp_k(X) : h \subseteq a\},$$

natomiast dla $z, y \subseteq X$ takich, że $z \subseteq y$ *odcinek* z, y to

$$[z,y]_k = \{a \in \wp_k(X) : z \subseteq a \subseteq y\}.$$

Lemat 2.9. *Jeśli $h \subseteq X$, to $\langle S_k(h), S_{k+1}(h)\rangle$ jest podstrukturą baerowską w $\mathbf{G}_k(X)$.*

Dowód. Należy sprawdzić, czy zachodzą oba warunki z definicji 1.19.

(1) Niech $a_1, a_2 \in S_k(h)$ oraz $l \in \wp_{k+1}(X)$ będą takie, że $a_1 \neq a_2$ oraz $a_1 \subset l$ i $a_2 \subset l$. Ponieważ $h \subseteq a_1$ i $h \subseteq a_2$, więc z założeń i przechodniości inkluzji mamy $h \subseteq l$. To oznacza, że $l \in S_{k+1}(h)$.

(2) Niech teraz $l_1, l_2 \in S_{k+1}(h)$ oraz $a \in \wp_k(X)$ takie, że $l_1 \neq l_2$ oraz $a \subset l_1$ i $a \subset l_2$. Zauważmy, że $l_1 \cap l_2 = a$ ze względu na ilość elementów w zbiorach a, l_1, l_2. Z założeń mamy $h \subseteq l_1$ i $h \subseteq l_2$, zatem $h \subseteq l_1 \cap l_2 = a$, co oznacza, że $a \in S_k(h)$.

□

Stwierdzenie 2.10. *Jeśli $h \in \wp_{k-1}(X)$, to $\langle S_k(h), S_{k+1}(h)\rangle$ jest mocną podstrukturą baerowską w $\mathbf{G}_k(X)$.*

Dowód. Z 2.9 $\langle S_k(h), S_{k+1}(h)\rangle$ jest podstrukturą baerowską, natomiast z 2.3 każde dwa punkty w tej podstrukturze są współliniowe. □

Przyjrzyjmy się teraz innym podstrukturom.

Stwierdzenie 2.11. *Niech $z, y \subseteq X$ będą takie, że $z \subset y$ oraz $|z| < k < |y|$. Wówczas $\langle [z, y]_k, [z, y]_{k+1}\rangle$ jest podstrukturą baerowską w $\mathbf{G}_k(X)$.*

Dowód. Należy sprawdzić, czy zachodzą oba warunki z definicji 1.19. Oznaczmy $S' = [z, y]_k$ i $\mathcal{L}' = [z, y]_{k+1}$.

(1) Niech $a_1, a_2 \in S'$ będą takie, że $a_1 \neq a_2$ oraz $a_1, a_2 \subset l$, gdzie $l \subset \wp_{k+1}(X)$. Pokażemy, że $l \in \mathcal{L}'$. Z uwagi na 2.3 mamy $l = a_1 \cup a_2$, natomiast z założenia
$$z \subset a_1, a_2 \subset y,$$
a więc
$$z \subset a_1 \cup a_2 = l \subset y,$$
co oznacza, że $l \in \mathcal{L}'$.

(2) Niech $l_1, l_1 \in \mathcal{L}'$ będą takie, że $l_1 \neq l_2$ oraz $a \in \wp_k(X)$ będzie takie, że $a \subset l_1$ i $a \subset l_2$. Pokażemy, że $a \in S'$. Wiemy, że $l_1 \cap l_2 = a$. Z określenia $\mathcal{L}'$ mamy
$$z \subset l_1, l_2 \subset y,$$
a więc
$$z \subset l_1 \cap l_2 \subset y,$$
czyli $z \subset a \subset y$. Zatem z określenia S' mamy $a \in S'$.

□

Lemat 2.12. *Niech $z, y \subseteq X$ będą takie, że $z \subset y$ oraz $|z| < k < |y|$. Wówczas zbiór $[z, y]_k$ jest spójny.*

Dowód. Niech $a, b \in [z, y]_k$. Wówczas $z \subseteq a, b \subseteq y$. Niech $t = a \cap b$. Wtedy
$$a = t \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$$
dla pewnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in y$ oraz
$$b = t \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$$

dla pewnych $\beta_1, \dots, \beta_m \in y$, gdzie $m = k - |t|$. Niech

$$\begin{aligned} a_0 &= a, \\ a_1 &= t \cup \{\beta_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m\}, \\ a_2 &= t \cup \{\beta_1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m\}, \end{aligned}$$

analogicznie postępujemy tak do końca, mianowicie

$$\begin{aligned} a_{m-1} &= t \cup \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m-1}, \alpha_m\}, \\ a_m &= b. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $a_{i-1} \cap a_i = t \cup \{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m\}$, a więc $|a_{i-1} \cap a_i| = |t| + m - 1 = k - 1$, co na mocy 2.3 oznacza, że punkty a_{i-1}, a_i są współliniowe dla $i = 1, \dots, m$. Zauważmy również, że skoro $z \subseteq a, b$, to $z \subseteq t$. Ponieważ $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m \in y$, więc $a_i \subset y$ dla $i = 0, \dots, m$. Zatem $a_0, a_1, \dots, a_m \in [z, y]_k$. W ten sposób dowód spójności odcinka $[z, y]_k$ jest zakończony. $\square$

Wniosek 2.13. *Zauważmy, że $[\emptyset, X]_k = \wp_k(X)$, zatem dowolny grassmannian kombinatoryczny jest spójny.*

2.5 Kliki

Mocna podstruktura baerowska, która pojawia się w stwierdzeniu 2.10 jest kliką w grassmannianie kombinatorycznym.

Twierdzenie 2.14. *Jeżeli $\mathcal{K}$ jest kliką w $\mathbf{G}_k(X)$ oraz $|\mathcal{K}| \geqslant 2$, to albo $\mathcal{K}$ jest zbiorem punktów leżących na jednej prostej, albo istnieje $h \in \wp_{k-1}(X)$ takie, że $\mathcal{K} \subseteq S_k(h)$.*

DOWÓD. Niech $\mathcal{K}$ będzie kliką w $\mathbf{G}_k(X)$. Gdy $|\mathcal{K}| = 2$, to teza wynika z 2.3. Załóżmy więc, że $|\mathcal{K}| \geqslant 3$. Weźmy parami różne $a, b, c \in \mathcal{K}$. W takim razie punkty a, b, c są parami współliniowe, więc albo leżą na jednej prostej l, albo tworzą trójkąt.

Rozważmy pierwszy przypadek. Weźmy $x \in \mathcal{K}$. Przypuśćmy, że $x \not\subset l$. Ponieważ $a, b, c, x \in \mathcal{K}$, to punkty te są parami współliniowe, w szczególności x jest współliniowy z trzema różnymi punktami prostej l. Otrzymaliśmy sprzeczność z lematem 2.7. Zatem musi być $x \subset l$. Z dowolności wyboru x wszystkie punkty z $\mathcal{K}$ leżą na prostej l.

Rozważmy drugi przypadek, gdy punkty a, b, c tworzą trójkąt. Z lematu 2.5 mamy $h = a \cap b \cap c \in \wp_{k-1}(X)$. Niech $x \in \mathcal{K}$. Jeśli $x = a$ lub $x = b$ lub $x = c$, to $h \subset x$. Jeśli $\neq (x, a, b, c)$, to te punkty tworzą czworościan, bo wszystko dzieje się w klice $\mathcal{K}$. Rozważmy trójkąt x, a, b. Z lematu 2.5 mamy $h' = a \cap b \cap x \in \wp_{k-1}(X)$, ale ze względu na 2.3 mamy

$$h' = a \cap b = h.$$

Stąd $h \subset x$. Z dowolności wyboru x wynika inkluzja $\mathcal{K} \subseteq S_k(h)$. □

Niech l będzie prostą w $\mathbf{G}_k(X)$ i niech $h \in \wp_{k-1}(X)$. Rozważmy kliki $\mathcal{K}_1 \subseteq l$ oraz $\mathcal{K}_2 \subseteq S_k(h)$. Zauważmy na mocy 2.4, że sytuacja, w której $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$ możliwa jest jedynie, gdy $|\mathcal{K}_1| = |\mathcal{K}_2| \leqslant 2$.

Wniosek 2.15. *Jeśli l jest prostą w $\mathbf{G}_k(X)$ oraz $h \in \wp_{k-1}(X)$, to*

$$\left| l^* \cap S_k(h) \right| \leqslant 2.$$

Stwierdzenie 2.16. *Niech $h \subset X$.*

(i) *Zbiór $S_k(h)$ jest kliką wtedy i tylko wtedy, gdy $|h| = k - 1$.*

(ii) *Jeśli zbiór $S_k(h)$ jest kliką to jest kliką maksymalną.*

Dowód. (i) ($\Rightarrow$) Wynika z 2.14 oraz 2.15.

($\Leftarrow$) Niech $h \in \wp_{k-1}(X)$. Weźmy $a, b \in S_k(h)$, takie, że $a \neq b$. Z lematu 2.3 mamy $a \sim b$. Zatem zgodnie z definicją 1.4 $S_k(h)$ jest kliką.

(ii) Załóżmy, że $S_k(h)$ jest kliką i przypuśćmy, że nie jest kliką maksymalną, to znaczy, że istnieje punkt $a \notin S_k(h)$, który jest współliniowy z każdym punktem z $S_k(h)$. To znaczy, że $a \sim x$ dla każdego $x \in S_k(h)$. Weźmy punkty $b, c \in S_k(h)$ takie, że $b \neq c$. Ponieważ $h \subset b, c$ oraz $b \sim c$ to z 2.3 mamy

$$h = b \cap c. \tag{2.3}$$

Ponieważ $a \notin S_k(h)$, więc $\neq (a, b, c)$. Zatem punkty a, b, c tworzą trójkąt. Z (2.3) oraz 2.6 otrzymujemy

$$h = b \cap c = a \cap b \cap c \subset a.$$

Stąd $a \in S_k(h)$, co przeczy naszemu założeniu o a. Tak więc nasze przypuszczenie było fałszywe i $S_k(h)$ jest maksymalną kliką. □

Stwierdzenie 2.17. *Jeśli $h \in \wp_{k-1}(X)$, to $S_k(h)$ jest sympleksem.*

Dowód. Wniosek 2.15 mówi, że w gwieździe $S_k(h)$ mogą być najwyżej dwa punkty, które leżą na jednej prostej, a to zgodnie z definicją 1.5 oznacza, że gwiazda jest sympleksem. □

Twierdzenie 2.4 mówi, że w grassmannianie kombinatorycznym możliwe są dwa typy klik: *układ*, czyli zbiór punktów leżących na jednej prostej, oraz *gwiazda*, czyli podzbiór zbioru postaci $S_k(h)$ dla pewnego $h \in \wp_{k-1}(X)$.

Mówimy, że klika jest *nietrywialna*, gdy zawiera przynajmniej trzy punkty. Nietrywialnym klikom możemy jednoznacznie przypisać ich typ (por. 2.15). Przy założeniach (2.1) w naszym grassmannianie $\mathbf{G}_k(X)$ na każdej prostej są co najmniej trzy punkty i w każdym zbiorze $S_k(h)$ dla $h \in \wp_{k-1}(X)$ są co najmniej trzy punkty. Tak więc z uwagi na 2.15 istnieją maksymalne układy i gwiazdy.

2.6 Zanurzenia

Zacznijmy od definicji jednego z podstawowych przekształceń w geometrii, czyli kolineacji.

Definicja 2.18. Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, \mathrm{I}\rangle$ i $\mathfrak{A}' = \langle S', \mathcal{L}', \mathrm{I}'\rangle$ będą częściowymi przestrzeniami prostych. Odwzorowanie $F = (f, g)$ takie, gdzie $f : S \longrightarrow S'$, $g : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ jest *kolineacją*, gdy f, g są bijekcjami oraz dla $a, b \in S$ i $l \in \mathcal{L}$ spełnione są warunki

(i) $a \mathrel{\mathrm{I}} l$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) \mathrel{\mathrm{I}'} g(l)$,

(ii) $a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) \sim f(b)$.

Dla częściowych przestrzeni prostych, gdzie relacja incydencji jest należeniem $\in$ czyli takich, gdzie $\mathcal{L} \subseteq 2^S$, $\mathcal{L}' \subseteq 2^{S'}$ kolineacja to odwzorowanie bijektywne $f : S \longrightarrow S'$, które zachowuje proste, to znaczy obrazem prostej jest prosta.

Zdefiniujmy równie ważne pojęcie zanurzenia, które jest potrzebne w dalszej pracy.

Definicja 2.19. Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, \mathrm{I}\rangle$ i $\mathfrak{A}' = \langle S', \mathcal{L}', \mathrm{I}'\rangle$ będą częściowymi przestrzeniami prostych. Odwzorowanie $F = (f, g)$ takie, gdzie $f : S \longrightarrow S'$, $g : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ jest *zanurzeniem*, gdy f, g są różnowartościowe oraz dla $a, b \in S$ i $l \in \mathcal{L}$ spełnione są warunki

(i) $a \mathrel{\mathrm{I}} l$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) \mathrel{\mathrm{I}'} g(l)$,

(ii) $a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) \sim f(b)$.

Twierdzenie 2.20 (M. Prażmowska [1]). *Niech $\mathfrak{A} = \mathbf{G}_k(X)$ oraz $\mathfrak{B} = \mathbf{G}_m(Y)$, gdzie $|X|, |Y| < \infty$. Jeśli $F = (f, g)$ jest zanurzeniem $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$, to istnieją $z, y \subseteq Y$ takie, że $F(\mathfrak{A}) = \langle [z, y]_m, [z, y]_{m+1}\rangle$.*

W tej pracy udowodnimy to twierdzenie dla niekoniecznie skończonych zbiorów X i Y.

Rozdział 3

Charakteryzacja odcinków

Lemat 3.1. *Klika typu gwiazda jest odcinkiem, tzn. gdy $\mathcal{K} \subseteq S_k(h)$ dla pewnego $h \in \wp_{k-1}(X)$, to $\mathcal{K} = [h, \bigcup \mathcal{K}]_k$.*

Dowód. Niech $\mathcal{K} \subseteq S_k(h)$ dla pewnego $h \in \wp_{k-1}(X)$. Wówczas

$$\mathcal{K} = \{a_i \in \wp_k(X)\colon i \in I\} = \{h \cup \{\alpha_i\}\colon \alpha_i \in X, i \in I\} \tag{3.1}$$

dla pewnego zbioru indeksów I. Zatem

$$\bigcup \mathcal{K} = h \cup \bigcup_{i \in I} \{\alpha_i\}. \tag{3.2}$$

($\subseteq$) Weźmy $x \in \mathcal{K}$. Wówczas $x \subseteq \bigcup \mathcal{K}$ oraz $x \in S_k(h)$, ponieważ $\mathcal{K} \subseteq S_k(h)$. Tak więc $h \subseteq x$. Zatem $x \in [h, \bigcup \mathcal{K}]_k$.

($\supseteq$) Niech $x \in [h, \bigcup \mathcal{K}]_k$. Skoro $h \subset x \subset \bigcup \mathcal{K}$ i $|h| = k$, to z (3.2) i istnieje $i_0 \in I$ takie, że $x = h \cup \{\alpha_{i_0}\}$. Zatem $x \in \mathcal{K}$ z (3.1). □

Lemat 3.2. *Klika punktów leżących na jednej prostej jest odcinkiem, tzn. gdy $\mathcal{K} \subseteq l^*$ dla pewnej prostej $l \in \wp_{k+1}(X)$, to $\mathcal{K} = [\bigcap \mathcal{K}, l]_k$.*

Dowód. Ponieważ $\mathcal{K} \subseteq l^*$ i $l \in \wp_{k+1}(X)$, to

$$\mathcal{K} = \{a_i \subset l\colon i = 1, \ldots, r\} = \{l \setminus \{\alpha_i\}\colon \alpha_i \in X, i = 1, \ldots, r\}$$

oraz

$$\bigcap \mathcal{K} = a_1 \cap a_2 \cap ... \cap a_r.$$

($\subseteq$) Niech $x \in \mathcal{K}$. Wówczas $x = a_{i_0}$ dla pewnego $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$. Zatem

$$x = a_{i_0} \supseteq \bigcap_{i=1}^{r} a_i = \bigcap \mathcal{K}.$$

Z drugiej strony $x = a_{i_0} \subset l$. Tak więc $x \in [\bigcap \mathcal{K}, l]$.

($\supseteq$) Niech $x \in [\bigcap \mathcal{K}, l]_k$. Zatem $\bigcap \mathcal{K} \subset x \subset l$ oraz $|x| = k$. Możemy przyjąć, że $a_i = l \setminus \{\alpha_i\}$ dla pewnego $\alpha_i \in l$, gdzie $i = 1, \ldots, r$. Zatem

$$\bigcap \mathcal{K} = \{\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_{k+1}\}.$$

Stąd

$$x = \{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{k+1}\} \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_{i_0-1}, \alpha_{i_0+1}, \dots, \alpha_r\} = l \setminus \{\alpha_{i_0}\}$$

dla pewnego $i_0 \in \{1, \dots, r\}$, bo x jest k-elementowym podzbiorem $(k+1)$-elementowego l i zawiera $\bigcap \mathcal{K}$. Zauważmy, że $x = a_{i_0} \in \mathcal{K}$, co kończy dowód. □

Stwierdzenie 3.3. *Dwie różne maksymalne kliki tego samego typu albo są rozłączne, albo mają jeden punkt wspólny.*

DOWÓD. Grassmannian kombinatoryczny jest częściową przestrzenią prostych więc dla prostych teza wynika z warunku (ii) w definicji 1.1.

Dla gwiazd $\mathcal{K}_1 = S_k(h_1)$, $\mathcal{K}_2 = S_k(h_2)$ takich, że $\mathcal{K}_1 \neq \mathcal{K}_2$ oraz $h_1, h_2 \in \wp_{k-1}(X)$, przypuśćmy, że $|\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2| \geqslant 2$. Wtedy istnieją punkty $a, b \in \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ takie, że $a \neq b$. Wówczas z 2.3 $h_1 = a \cap b = h_2$. Ale wtedy mamy, że $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$, co jest sprzeczne z naszym założeniem. Zatem udowodniliśmy, że dwie różne maksymalne kliki tegi samego typu mają co najwyżej jeden punkt wspólny. □

Stwierdzenie 3.4. *Dwie maksymalne kliki różnych typów albo są rozłączne, albo mają dokładnie dwa punkty wspólne.*

DOWÓD. Zgodnie z 2.14 niech $\mathcal{K} = S_k(h)$ będzie gwiazdą dla pewnego $h \in \wp_{k-1}(X)$ oraz niech l będzie prostą. Załóżmy, że $\mathcal{K} \cap l^* \neq \emptyset$. Wówczas istnieje punkt $a \in \wp_k(X)$ taki, że $a \in \mathcal{K}$ i $a \subset l$. Zatem $h \subset l$ bo $h \subset a$. Możemy przyjąć, że $a = h \cup \{\alpha\}$ dla pewnego $\alpha \in X$. Zauważmy, że

$$l = h \cup \{\alpha, \beta\}$$

dla pewnego $\beta \in X$ takiego, że $\alpha \neq \beta$. Zatem $b = h \cup \{\beta\}$ jest takim punktem, że $a \neq b$, $b \subset l$ oraz $b \in \mathcal{K}$. Z uwagi na 2.15 mamy $|\mathcal{K} \cap l^*| = 2$, co kończy dowód. □

Stwierdzenie 3.5. *Odcinek jest grassmannianem kombinatorycznym. Dokładniej dla $z, y \subseteq X$ takich, że $z \subset y$ i $|z| < k < |y|$ mamy*

$$\langle [z, y]_k, [z, y]_{k+1} \rangle \cong \mathbf{G}_{k-|z|}(y \setminus z).$$

DOWÓD. Wystarczy zauważyć, że we wszystkich punktach i prostych zadanego odcinka, jako zbiorach powtarza się (zawiera się) z. □

Definicja 3.6. Niech $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ będzie podstrukturą baerowską w $\mathbf{G}_k(X)$. Mówimy, że $\mathfrak{M}$ jest podstrukturą Grassmanna, jeśli:

(B_0) $\mathcal{L} = \{l \in \wp_{k+1}(X) : |l^* \cap S| \geqslant 2\}$,

(B_1) zbiór S jest spójny,

(B_2) dla różnych maksymalnych klik $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ takich, że

$$|\mathcal{K}_1 \cap S| \geqslant 2, \qquad |\mathcal{K}_2 \cap S| \geqslant 2 \qquad \text{oraz} \qquad |\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2| = 2$$

albo $S \cap \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \emptyset$ albo $|S \cap \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2| = 2$.

Stwierdzenie 3.7. *Jeśli $z, y \subseteq X$, $z \subset y$ i $|z| < k < |y|$, to odcinek $\langle [z,y]_k, [z,y]_{k+1} \rangle$ jest podstrukturą Grasmanna w $\mathbf{G}_k(X)$.*

Dowód. Niech $S = [z,y]_k$ oraz $\mathcal{L} = [z,y]_{k+1}$. Z 2.11 $\langle [z,y]_k, [z,y]_{k+1} \rangle$ jest podstrukturą baerowską, natomiast z 2.12 wynika (B_1), czyli spójność odcinka. Wykażemy teraz, ze odcinek spełnia (B_0).

($\subseteq$) Niech $l \in [z,y]_{k+1}$. Ponieważ $|z| < k$, to w odcinku $[z,l]_k$ są przynajmniej dwa różne punkty a, b. Zauważmy, że

$$z \subset a \cup b = l \subset y,$$

a więc $a, b \in l^* \cap S$, czyli $|l^* \cap S| \geqslant 2$.

($\supseteq$) Część (1) dowodu twierdzenia 2.11.

Przechodzimy teraz do sprawdzenia (B_2). Niech $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ będą różnymi maksylanymi klikami w $\mathbf{G}_k(X)$. Założenie z (B_2) mówiące, że $|\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2| = 2$ ogranicza wybór klik z uwagi na stwierdzienia 3.3 i 3.4. Możemy bez utrarty ogólności przyjąć wręcz, że $\mathcal{K}_1 = S_k(h)$ dla pewnego $h \in \wp_{k-1}(X)$ oraz $\mathcal{K}_2 = l^*$ dla pewnego $l \in \wp_{k+1}(X)$. Zatem $\mathcal{K}_1 = [h, X]_k$ natomiast $\mathcal{K}_2 = [\emptyset, l]_k$.

Z założeń w (B_2) odnośnie $\mathcal{K}_1$ mamy $|\mathcal{K}_1 \cap S| \geqslant 2$, czyli istnieją $a, b \in \mathcal{K}_1, S$ takie, że $a \neq b$. Ponieważ $\mathcal{K}_1 = S_k(h)$, to $h = a \cap b$. Ponadto $z \subset a, b$, gdyż $a, b \in S$. Stąd

$$z \subset a \cap b = h, \tag{3.3}$$

i dalej

$$\mathcal{K}_1 \cap S = [h, X]_k \cap [z, y]_k = [h \cup z, X \cap y]_k = [h, y]_k. \tag{3.4}$$

Z założeń w (B_2) odnośnie $\mathcal{K}_2$ mamy $|\mathcal{K}_2 \cap S| \geqslant 2$, czyli istnieją $a, b \in \mathcal{K}_2, S$ takie, że $a \neq b$. Ponieważ $\mathcal{K}_2 = l^*$, to $l = a \cup b$. Ponadto $a, b \subset y$, gdyż $a, b \in S$. Stąd

$$l = a \cup b \subset y \tag{3.5}$$

i dalej

$$\mathcal{K}_2 \cap S = [\emptyset, l]_k \cap [z, y]_k = [\emptyset \cup z, l \cap y]_k = [z, l]_k. \tag{3.6}$$

Z (3.3) i (3.4) oraz z (3.5) i (3.3) mamy

$$S \cap \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1 \cap S \cap \mathcal{K}_2 \cap S = [h, y]_k \cap [z, l]_k = [h \cup z, y \cap l]_k = [h, l]_k = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2.$$

Ponieważ z założenia (B_2) mamy $|\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2| = 2$, więc dowód jest zakończony. □

Lemat 3.8. *Niech* $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L}\rangle$ *będzie podstrukturą baerowską w* $\mathbf{G}_k(X)$ *spełniającą* (B_1), (B_2) *i niech* $h_i \in \wp_{k-1}(X)$ *oraz* $\mathcal{K}_i = S_k(h_i)$ *dla* $i = 1, 2$. *Jeśli* $|\mathcal{K}_1 \cap S| \geqslant 2$, $|\mathcal{K}_2 \cap S| \geqslant 2$ *oraz* $S \cap \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 \neq \emptyset$, *to istnieje taki* $y \subseteq X$, *że* $\mathcal{K}_i \cap S = [h_i, y]_k$ *dla* $i = 1, 2$.

Dowód. Zgodnie z założeniem niech

$$x \in S \cap \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2.$$

Zauważmy, że $\mathcal{K}_i \cap S$ jest kliką, zatem z 3.1 mamy

$$\mathcal{K}_i \cap S = [h_i, y_i]_k, \tag{3.7}$$

gdzie $y_i = \bigcup(\mathcal{K}_i \cap S)$ dla $i = 1, 2$. Jeśli $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$ to dowód jest zakończony. Możemy zatem dalej przyjąć, że $h_1 \neq h_2$ jako, że $\mathcal{K}_i$ jednoznacznie odpowiada h_i, dla $i = 1, 2$. W takim razie z przeliczenia ilości elementów w zbiorach x, h_1, h_2 wynika, że

$$x = h_1 \cup h_2. \tag{3.8}$$

Naszym celem jest pokazanie, że $y_1 = y_2$. W tym celu weźmy $\alpha \in y_1$. Jeśli $\alpha \in x$, to od razu mamy $\alpha \in y_2$ bo $x \subset y_2$, co wynika z (3.7) oraz faktu, że $x \in \mathcal{K}_2 \cap S$. Załóżmy zatem, że $\alpha \in y_1 \setminus x$. Stąd $l = x \cup \{\alpha\} \in \wp_{k+1}(X)$, tzn. l jest prostą. Rozważmy $a = h_1 \cup \{\alpha\}$. Z uwagi na (3.8) $a \in \wp_k(X)$, czyli a jest punktem. Ponieważ $h_1 \subset a \subseteq y_1$, więc $a \in \mathcal{K}_1 \cap S$ z (3.7). Z kolei z (3.8) mamy $a \subset l$. Zauważmy jeszcze, że $x \neq a$. Zatem, ponieważ $x, a \in l^* \cap S$, więc $|l^* \cap S| \geqslant 2$. Ponadto

$$x \in S \cap l^* \cap \mathcal{K}_2, \tag{3.9}$$

czyli w szczególności $x \in l^* \cap K_2$. Z 3.4 $|l^* \cap \mathcal{K}_2| \geqslant 2$. Dlatego możemy skorzystać z (B_2), gdzie jako kliki bierzemy $l^*, \mathcal{K}_2$ i otrzymujemy

$$|S \cap l^* \cap \mathcal{K}_2| = 2.$$

Niech b będzie drugim, różnym od x punktem w $S \cap l^* \cap \mathcal{K}_2$. Zauważmy, że musi być $h_2 \subset b$ bo $b \in \mathcal{K}_2$ oraz musi być $\alpha \in b$ bo $b \subset l = x \cup \{\alpha\}$ i $b \neq x$. Zatem

$$b = h_2 \cup \{\alpha\}. \tag{3.10}$$

Ponieważ $b \in \mathcal{K}_2 \cap S$ i (3.7), więc $b \subseteq y_2$. Z (3.10) otrzymujemy $\alpha \in y_2$. Z dowolności wyboru α dostaliśmy $y_1 \subseteq y_2$. Zamieniając ze sobą indeksy 1 i 2 można wykazać, że $y_2 \subseteq y_1$, czyli ostatecznie $y_1 = y_2$, co należało pokazać. □

Lemat 3.9. *Niech* $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L}\rangle$ *będzie podstrukturą baerowską spełniającą* (B_1), (B_2) *i niech* l_1, l_2 *będą prostymi w* $\mathbf{G}_k(X)$. *Jeśli* $|l_1^* \cap S| \geqslant 2$, $|l_2^* \cap S| \geqslant 2$ *oraz* $S \cap l_1^* \cap l_2^* \neq \emptyset$, *to istnieje taki* $z \subset X$, *że* $l_i^* \cap S = [z, l_i]_k$ *dla* $i = 1, 2$.

Dowód. Z 3.2 mamy

$$l_i^* \cap S = [z_i, l_i]_k, \tag{3.11}$$

gdzie $z_i = \bigcap(l_i^* \cap S)$. Jeśli $l_1 = l_2$, to $z_1 = z_2$. Zatem niech $l_1 \neq l_2$. Musimy wykazać, że $z_1 = z_2$.

Weźmy $x \in S \cap l_1^* \cap l_2^*$. Ponieważ $x \in l_2^* \cap S$, to z (3.11) musi być $z_2 \subset x$. Zatem

$$x = z_2 \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\},$$

dla pewnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in X$ i $r = k - |z_2|$. Rozważmy

$$h_i = z_2 \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_r\}.$$

Zauważmy, że $h_i = x \setminus \{\alpha_i\}$ oraz że $|h_i| = k - 1$. Dalej rozważmy maksymalne gwiazdy $\mathcal{K}_i = S_k(h_i)$ dla $i = 1, \ldots, r$. Ponieważ $h_i \subset x$, więc $x \in \mathcal{K}_i$ dla $i = 1, \ldots, r$. W takim razie

$$x \in S \cap \mathcal{K}_i \cap l_1^*.$$

Zatem z 3.4 wynika, że

$$|\mathcal{K}_i \cap l_1^*| = 2. \tag{3.12}$$

Ponieważ $h_i \subset x \subset l_2$, więc odcinek $[h_i, l_2]_k$ jest dwuelementowy. Z jednej strony zauważmy, że

$$[h_i, l_2]_k \subset S_k(h_i) = \mathcal{K}_i. \tag{3.13}$$

Z drugiej strony, ponieważ $z_2 \subset h_i$, to z uwagi na (3.11), mamy

$$[h_i, l_2]_k \subseteq [z_2, l_2]_k = l_2^* \cap S \subset S. \tag{3.14}$$

Zatem z (3.13) oraz (3.14) mamy

$$[h_i, l_2]_k \subseteq \mathcal{K}_i \cap S,$$

a więc $|\mathcal{K}_i \cap S| \geqslant 2$. Stąd, z założeń do lematu oraz z (3.12) korzystając z (B_2) dla S, l_1^* oraz kliki $\mathcal{K}_i$ otrzymamy

$$|S \cap \mathcal{K}_i \cap l_1^*| = 2.$$

Zatem mamy punkt $a \in S \cap \mathcal{K}_i \cap l_1^*$ taki, że $a \neq x$. Zauważmy, że z 2.3 $a \cap x = h_i$ oraz $a \cup x = l_1$, tak więc

$$[h_i, l_1]_k = \{a, x\} \subseteq S \cap \mathcal{K}_i \cap l_1^*.$$

Korzystając z (3.11) uzyskujemy

$$[h_i, l_1]_k \subseteq l_1^* \cap S = [z_1, l_1]_k,$$

co oznacza, że $z_1 \subseteq h_i$. Indeks i był wybrany dowolnie z $1, \ldots, r$, a więc

$$z_1 \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} h_i = z_i.$$

Zamieniając ze sobą indeksy 1 i 2 i stosując to samo rozumowanie, co wyżej pokażemy, że $z_2 \subseteq z_1$. Ostatecznie więc $z_1 = z_2$, co kończy dowód. □

Lemat 3.10. *Niech* $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ *będzie podstrukturą baerowską w* $\mathbf{G}^\circ_k(X)$ *spełniającą* (B_1), (B_2). *Wówczas istnieją* $z, y \subseteq X$ *takie, że:*

(i) *dla każdej maksymalnej gwiazdy* $\mathcal{K} = S_k(h)$, *gdzie* $h \in \wp_{k-1}(X)$ *takiej, że* $|\mathcal{K} \cap S| \geqslant 2$ *mamy*

$$\mathcal{K} \cap S = [h, y]_k,$$

(ii) *dla każdej prostej* $l \in \wp_{k+1}(X)$ *takiej, że* $|l^* \cap S| \geqslant 2$ *mamy*

$$l^* \cap S = [z, l]_k.$$

Dowód. (i) Niech $\mathcal{K}', \mathcal{K}''$ będą dowolnymi maksymalnymi gwiazdami takimi, że

$$|\mathcal{K}' \cap S| \geqslant 2 \qquad \text{oraz} \qquad |\mathcal{K}'' \cap S| \geqslant 2. \tag{3.15}$$

Weźmy $h', h'' \in \wp_{k-1}(X)$ tak, aby $\mathcal{K}' = S_k(h')$ i $\mathcal{K}'' = S_k(h'')$. Z 3.1 mamy $y', y'' \subseteq X$ takie, że

$$\mathcal{K}' \cap S = [h', y']_k \qquad \text{oraz} \qquad \mathcal{K}'' \cap S = [h'', y'']_k \tag{3.16}$$

Z (3.15) mamy punkty a', a'' takie, ze $a' \in \mathcal{K}' \cap S$ oraz $a'' \in \mathcal{K}'' \cap S$. Na mocy (B_1) istnieje ciąg parami różnych punktów $b_0, ...b_r \in S$ taki, że $a' = b_0$, $a'' = b_r$ oraz $b_{i-1} \sim b_i$ dla $i = 1, \dots, r$. Niech $i \in \{1, ..., r\}$. Zauważmy, że z 2.3

$$h_i = b_{i-1} \cap b_i \in \wp_{k-1}(X).$$

Rozważmy maksymalną gwiazdę $\mathcal{K}_i = S_k(h_i)$. Ponieważ $b_{i-1}, b_i \in \mathcal{K}_i, S$, więc

$$|\mathcal{K}_i \cap S| \geqslant 2. \tag{3.17}$$

Lemat 3.1 daje

$$\mathcal{K}_i \cap S = [h_i, y_i]_k$$

dla pewnego $y_i \subseteq X$. Weźmy teraz dwie sąsiednie gwiazdy $\mathcal{K}_{i-1}, \mathcal{K}_i$, gdzie $i \in \{2, \dots, r\}$. Ponieważ $b_{i-1} \in \mathcal{K}_{i-1} \cap \mathcal{K}_i$ oraz z uwagi na (3.17) możemy dla nich zastosować lemat 3.8, stąd $y_{i-1} = y_i$ dla $i = 2, \dots, r$, a więc

$$y_1 = y_r.$$

Podobnie dla $\mathcal{K}'$ i $\mathcal{K}_1$ mamy $a' = b_0 \in \mathcal{K}' \cap \mathcal{K}_1$, więc z (3.15), (3.17) i 3.8 dostajemy

$$y' = y_1.$$

Pozostaje jeszcze $\mathcal{K}_r$ i $\mathcal{K}''$. Mamy tutaj $b_r = a'' \in \mathcal{K}_r \cap \mathcal{K}''$, więc z (3.15), (3.17) i 3.8 uzyskujemy

$$y_r = y''.$$

Ostatecznie mamy $y' = y''$, co kończy dowód (i).

(ii) Niech l', l'' będą prostymi takimi, że

$$|l'^* \cap S| \geqslant 2 \qquad \text{oraz} \qquad |l''^* \cap S| \geqslant 2. \tag{3.18}$$

Stąd mamy punkty $a' \in l'^* \cap S$ oraz $a'' \in l''^* \cap S$. Na mocy (B_1) istnieje ciąg parami różnych punktów $b_0, \ldots, b_r \in S$ takich, że $a' = b_0$, $a'' = b_r$ oraz $b_{i-1} \sim b_i$ dla $i = 1, \ldots, r$. Niech

$$l_i = b_{i-1} \cup b_i$$

dla $i = 1, \ldots, r$. Zauważmy, że dla każdego $i = 1, \ldots, r$ mamy

$$l_i^* \cap S = \{b_{i-1}, b_i\},$$

czyli $|l_i^* \cap S| \geqslant 2$ oraz

$$l_{i-1}^* \cap l_i^* = \{b_{i-1}\}$$

czyli

$$S \cap l_{i-1}^* \cap l_i^* \neq \emptyset.$$

Tak więc z 3.9 istnieje $z \subset X$ taki, że

$$l_i^* \cap S = [z, l_i]_k \tag{3.19}$$

dla $i = 1, \ldots, r$. Dalej mamy $a' \subset l_1, l'$ oraz $a'' \subset l_r, l''$. Z (3.18), z wyboru a', a'', z 3.9 oraz z (3.19) wynika, że $l'^* \cap S = [z, l']_k$ oraz $l''^* \cap S = [z, l'']_k$, co kończy dowód z dowolności wyboru l', l''. □

Lemat 3.11. *Niech $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ będzie niezdegenerowaną podstrukturą baerowską w $\mathbf{G}_k(X)$ spełniającą (B_1), (B_2) i niech $z, y \subseteq X$ będą takie jak w 3.10. Jeśli $a \in [z, y]_k$, $b \in S$ i $a \sim b$, to $a \in S$.*

Dowód. Gdy $a = b$, to dowód jest zakończony. Załóżmy więc, że $a \neq b$. Z założenia oraz z 2.3 możemy wziąć

$$h = a \cap b \qquad \text{i} \qquad \mathcal{K} = S_k(h).$$

Podstruktura $\mathfrak{M}$ jest niezdegenerowana i spójna, więc rozważmy dowolną prostą l przez punkt b w $\mathfrak{M}$, to znaczy $b \subset l \in \mathcal{L}$. Z 3.10 mamy

$$l^* \cap S = [z, l]_k,$$

a więc $z \subseteq b$. Zauważmy, że $b \in \mathcal{K}$ oraz $z \subseteq b, a$, a więc $z \subseteq h$. Stąd

$$z \subseteq h \subset b \subset l.$$

To z kolei daje, po pierwsze, że $[h, l]_k$ jest zbiorem dwuelementowym. Po drugie

$$[h, l]_k \subseteq [h, X]_k = \mathcal{K}, \qquad \text{oraz} \qquad [h, l]_k \subseteq [z, l]_k = l^* \cap S. \tag{3.20}$$

To oznacza, że
$$[h, l]_k \subseteq S \cap l^* \cap \mathcal{K}.$$
W szczególności $[h, l]_k \subseteq \mathcal{K} \cap S$ i z 3.10 wynika, że
$$\mathcal{K} \cap S = [h, y]_k. \tag{3.21}$$
Stąd mamy
$$a \in [z, y]_k \cap \mathcal{K} = [z, y]_k \cap [h, X]_k = [h, y]_k = \mathcal{K} \cap S,$$
co oznacza, że $a \in S$ i dowód jest zakończony. □

Twierdzenie 3.12. *$\langle S, \mathcal{L}\rangle$ jest niezdegenerowaną podstrukturą Grassmanna w $\mathbf{G}_k(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S = [z, y]_k$ oraz $\mathcal{L} = [z, y]_{k+1}$ dla pewnych $z, y \subseteq X$ takich, że $z \subset y$ oraz $|z| < k < |y|$.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech $a \in S$. Ponieważ podstruktura $\mathfrak{M}$ jest niezdegenerowana, to weźmy drugi punkt $b \in S$ różny od a. Podstruktura $\mathfrak{M}$ jest spójna, więc jest prosta $l \in \mathcal{L}$ przez a. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że $b \subset l$. Rozważmy gwiazdę $\mathcal{K} = S_k(h)$, gdzie $h = a \cap b \in \wp_{k-1}(X)$ z 2.3. Zauważmy, że
$$\{a, b\} \subseteq \mathcal{K} \cap S,\ l^* \cap S,$$
a więc możemy zastosować 3.10, skąd uzyskujemy
$$\mathcal{K} \cap S = [h, y]_k \qquad \text{oraz} \quad l^* \cap S = [z, l]_k.$$
Zatem $z \subseteq a$ bo $a \in l^* \cap S$ oraz $a \subseteq y$ bo $a \in \mathcal{K} \cap S$. Ostatecznie $a \in [z, y]_k$, czyli $S \subseteq [z, y]_k$.

Teraz niech $a \in [z, y]_k$. Weźmy dowolny punkt $b \in S$. Ponieważ odcinek $[z, y]_k$ jest spójny na mocy 2.12 oraz $b \in [z, y]_k$ na mocy uduwodnionej w poprzednim akapicie inkluzji, więc w $[z, y]_k$ istnieje łamana, czyli ciąg $c_0, c_1, \dots, c_r \in [z, y]_k$ punktów, z których każde dwa sąsiednie są współliniowe, łączący a i b, to znaczy $b = c_0$, $a = c_r$. Z uwagi na 3.11 mamy $c_1 \in S$. Stąd $c_2 \in S$ ponownie z 3.11 i tak dalej, aż $c_r = a \in S$, co z dowolności wyboru a, daje inkluzję $[z, y]_k \subseteq S$.

Pokazaliśmy, że $S = [z, y]_k$. Warunek (B_0) mówi, że zbiór punktów wyznacza proste, zatem $\mathcal{L} = [z, y]_{k+1}$

($\Leftarrow$) Natychmiastowy wniosek z 3.7. □

Stwierdzenie 3.13. *Niech $\mathfrak{A} = \mathbf{G}_k(X)$ oraz $\mathfrak{B} = \mathbf{G}_m(Y)$. Jeśli $F = (f, g)$ jest zanurzeniem $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$, to albo F przekształca maksymalne gwiazdy na gwiazdy i maksymalne układy na układy, albo maksymalne gwiazdy na układy i maksymalne układy na gwiazdy.*

Dowód. Niech $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ będą maksymalnymi klikami różnych typów w $\mathfrak{A}$.

Jeśli $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 \neq \emptyset$, to z 3.4 mamy $|\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2| = 2$. Stąd $|f(\mathcal{K}_1) \cap f(\mathcal{K}_2)| = 2$, a ponieważ obrazy $f(\mathcal{K}_1)$, $f(\mathcal{K}_2)$ rozszerzają się jednoznacznie do maksymalnych klik w $\mathfrak{B}$, więc muszą być klikami różnych typów na mocy 3.4.

Jeśli $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \emptyset$, to ze spójności w $\mathfrak{A}$ klikę $\mathcal{K}_1$ połączymy z kliką $\mathcal{K}_2$ ciągiem maksymalnych klik, w którym każde dwie sąsiednie kliki są różnych typów i mają dokładnie dwa punkty wspólne. Korzystając z rozumowania w poprzednim akapicie dowód jest zakończony. □

Inaczej mówiąc zanurzenia jednego grassmannianu kombinatorycznego w drugi albo zachowują typy maksymalnych klik, albo je zamieniają.

Teraz udowodnimy twierdzenie 2.20 dla niekoniecznie skończonych grassmannianów.

Twierdzenie 3.14. *Niech $\mathfrak{A} = \mathbf{G}_k(X)$ oraz $\mathfrak{B} = \mathbf{G}_m(Y)$. Jeśli $F = (f, g)$ jest zanurzeniem $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$, to istnieją $z, y \subseteq Y$ takie, że $\langle [z, y]_m, [z, y]_{m+1} \rangle = F(\mathfrak{A})$.*

Dowód. Grassmannian $\mathfrak{A}$ jest odcinkiem $[\emptyset, X]_k$. Zatem na mocy 3.7 grassmannian $\mathfrak{A}$ jest podstrukturą Grassmanna. Zanurzenie F zachowuje relację incydencji, a więc zachowuje kliki oraz spójność.

Niech $S = f(\wp_k(X))$ i $\mathcal{L} = g(\wp_{k+1}(X))$. Z własności zanurzenia F wiemy, że $\langle S, \mathcal{L} \rangle$ jest podstrukturą baerowską w $\mathfrak{B}$ spełniającą (B_0) i (B_1). Sprawdzimy, że spełnia również (B_2). Rozważmy w tym celu dwie różne maksymalne kliki $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ w $\mathfrak{B}$ takie, że

$$|\mathcal{K}_1 \cap S| \geqslant 2, \quad |\mathcal{K}_2 \cap S| \geqslant 2, \quad |\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2| = 2 \quad \text{oraz} \quad S \cap \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 \neq \emptyset. \tag{3.22}$$

Niech $i \in \{1, 2\}$. Przypuśćmy, że $|\mathcal{K}_i \cap S| = 2$. Wówczas $|f^{-1}(\mathcal{K}_i \cap S)| = 2$ bo f jest iniekcją. Na mocy założeń (2.1) zbiór $f^{-1}(\mathcal{K}_i \cap S)$ możemy uzupełnić do dwu różnych maksymalnych klik w $\mathfrak{A}$: maksymalnej gwiazdy $\mathcal{S}$ i maksymalnego układu $\mathcal{T}$. Wówczas $f(\mathcal{S})$ i $f(\mathcal{T})$ są w $\mathfrak{B}$ po pierwsze nietrywialnymi klikami, po drugie są klikami różnych typów na mocy 3.3. Rozważmy zatem rozszerzenia klik $f(\mathcal{S})$ i $f(\mathcal{T})$ do maksymalnych klik w $\mathfrak{B}$ i oznaczmy je odpowiednio $\mathcal{S}'$ i $\mathcal{T}'$. Ponieważ

$$f^{-1}(\mathcal{K}_i \cap S) \subseteq \mathcal{S}, \mathcal{T},$$

więc

$$\mathcal{K}_i \cap S \subseteq f(\mathcal{S}), f(\mathcal{T}).$$

Z kolei $f(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}'$ oraz $f(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}'$, zatem mamy

$$|\mathcal{S}' \cap \mathcal{K}_i| \geqslant 2 \qquad \text{i} \qquad |\mathcal{T}' \cap \mathcal{K}_i| \geqslant 2.$$

Z uwagi na 3.3 i 3.4 albo $\mathcal{S}' = \mathcal{K}_i$, albo $\mathcal{T}' = \mathcal{K}_i$. Bez zmniejszenia ogólności przyjmijmy, że $\mathcal{K}_i = \mathcal{S}'$. Wówczas

$$f(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}' = \mathcal{K}_i.$$

Z drugiej strony mamy

$$f(\mathcal{S}) \subseteq S,$$

a więc

$$f(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{K}_i \cap S.$$

Ponieważ $f(\mathcal{S})$ jest nietrywialną kliką, to nasze przypuszczenie, że $|\mathcal{K}_i \cap S| = 2$ okazuje się fałszywe. Tak, że z założenia (3.22) mamy

$$|\mathcal{K}_1 \cap S| \geqslant 3 \qquad \text{i} \qquad |\mathcal{K}_2 \cap S| \geqslant 3$$

i w konsekwencji, z uwagi na 3.13, zbiory $f^{-1}(\mathcal{K}_1 \cap S)$ oraz $f^{-1}(\mathcal{K}_2 \cap S)$ można jednoznacznie rozszerzyć w $\mathfrak{A}$ do maksymalnych klik różnych typów, odpowiednio $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ tak, aby $f(\mathcal{M}_i) \subseteq \mathcal{K}_i$, $i = 1, 2$. Zatem, ponieważ $f^{-1}(\mathcal{K}_i \cap S) \subseteq \mathcal{M}_i$, więc

$$\mathcal{K}_i \cap S \subseteq f(\mathcal{M}_i) \subseteq \mathcal{K}_i \cap S,$$

co oznacza, że $f(\mathcal{M}_i) = \mathcal{K}_i \cap S$. Dalej mamy

$$S \cap \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = S \cap \mathcal{K}_1 \cap S \cap \mathcal{K}_2 = f(\mathcal{M}_1) \cap f(\mathcal{M}_2).$$

Z założenia, że $S \cap \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 \neq \emptyset$ mamy $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \neq 0$. Kliki $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ są maksymalne i różnych typów, więc z 3.4 mamy $|\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2| = 2$, co daje

$$|S \cap \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2| = 2.$$

Zatem $\langle S, \mathcal{L} \rangle$ spełnia (B_2), a więc jest podstrukturą Grassmanna w $\mathfrak{B}$. W ten sposób na mocy 3.12 dowód jest zakończony. $\square$

Bibliografia

[1] Prażmowska M., *Multiple perspectives and generalizations of the Desargues configurations*, Demonstratio Math. **39** (2006), no. 4, 887-906.

[2] Żynel M.,*Orthogonality and correlations of spaces of pencils*, mimeographed.

[3] Żynel M.,*Subspaces and embeddings of spaces of pencils*, mimeographed.