Uniwersytet w Białymstoku

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

Kamil Bienias

Kraty półmodularne w geometrii

Praca magisterska napisana
pod kierunkiem
dr. hab. Krzysztofa Prażmowskiego, prof. UwB

Białystok 2009

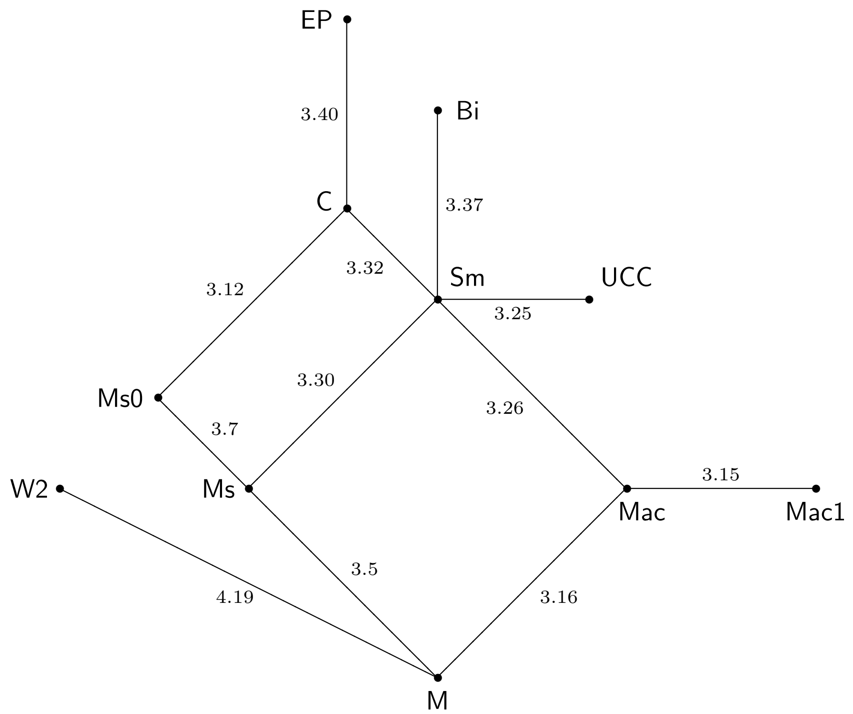
Spis treści

Wstęp

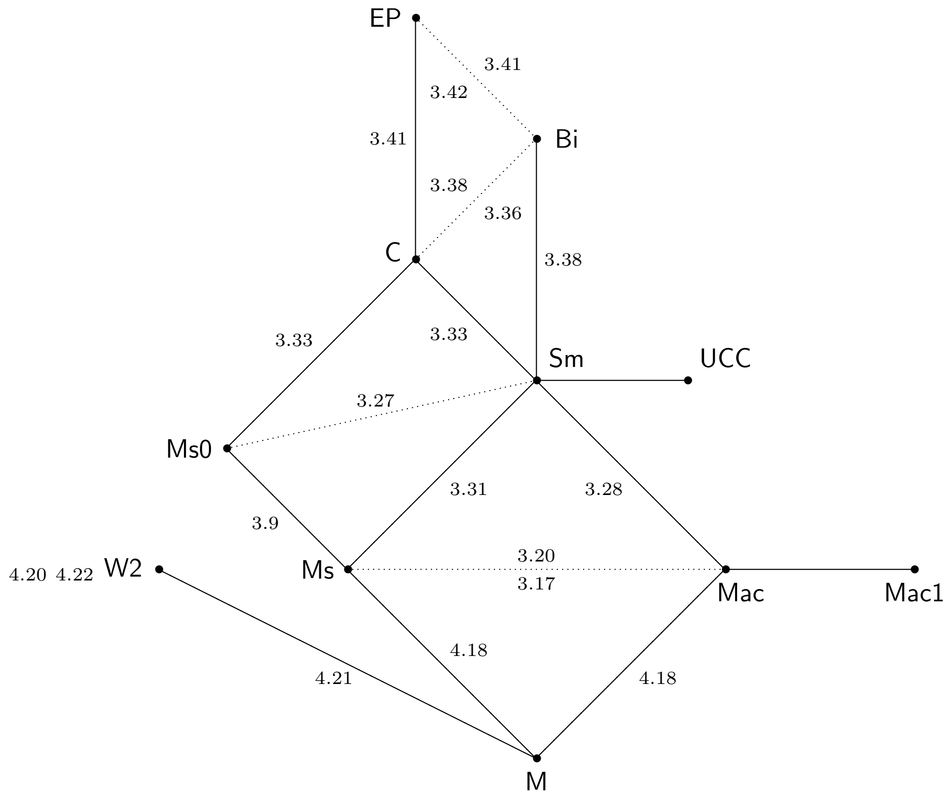
„Wiedzę buduje się z faktów, jak dom z kamienia; ale zbiór faktów nie jest wiedzą, jak stos kamieni nie jest domem.”

Henri Poincaré

Pojęcie kraty półmodularnej wprowadził Garret Birkhoff zainspirowany pracą z 1935, w której Hassler Whitney przedstawił pojęcie matroidów, czyli przestrzeni z operatorem domknięcia spełniającym warunek wymiany Steinitz'a-Mac Lane'a, wyabstrahowujących liniową niezależność i uogólniających geometrię afiniczną oraz rzutową. W definicji kraty półmodularnej Birkhoff używa relacji poprzedzania $\prec$, która w kratach ciągłych, na przykład w łańcuchu liczb rzeczywistych $[0, 1]$, traci sens. Z tego powodu Wilcox i Mac Lane przedstawiają swoje warunki, odpowiednio (Ms) i (Mac), definiujące kraty pół-



Rysunek 0.1: Podane numery to numery twierdzeń, w których dowiodę, że warunki znajdujące się niżej implikują warunki wyżej. Warunki na tym samym poziomie i połączone kreską są równoważne.



Rysunek 0.2: Podane numery są numerami przykładów pokazujących, że warunki znajdujące się wyżej nie zawsze implikują warunki niżej. Linią przerywaną zaznaczyłem warunki niezależne.

modularne, w których nie występuje relacja $\prec$. Niniejsza praca stanowi analizę związków pomiędzy różnymi warunkami związanymi z półmodularnością w teorii krat i geometrii.

W **rozdziale pierwszym** przypomnę m.in. definicję posetu, kresów, kraty (z dopełnieniami, wypukłej, dystrybutywnej i boolowskiej), podkraty.

W **rozdziale drugim** pokażę, że przestrzeń rzutowa nad przestrzenią wektorową jest kratą zupełną, modularną, atomistyczną z dopełnieniami, arguesowską i nierozkładalną. Powiem jak twierdzenie Desargues'a przenosi się na teorię krat.

Rozdział trzeci poświęcę warunkom związanym z półmodularnością. Zależności między tymi warunkami są na rysunkach 0.1 i 0.2. Przytoczę z literatury kilka faktów wiążących rozważane warunki półmodularności przy dodatkowych założeniach.

Natomiast w **rozdziale czwartym** pokażę, że krata podprzestrzeni przestrzeni afinicznej spełnia warunek (Mac). Na koniec zajmę się warunkiem Wilcoxa, oznaczanym przez (W2), wykorzystywanym w charakteryzacji krat afinicznych i pokażę zależności między nim a rozważanymi warunkami półmodularności.

Rozdział 1

Pojęcia podstawowe

Definicja 1.1. Niech P będzie niepustym zbiorem i niech $\leqslant\ \subseteq P \times P$ będzie binarną relacją na zbiorze P. Rozważmy następujące własności relacji $\leqslant$. Niech $a, b, c \in P$, wówczas

1. $a \leqslant a$, *(zwrotność)*
2. $a \leqslant b$ i $b \leqslant a$, to $a = b$, *(antysymetryczność)*
3. $a \leqslant b$ i $b \leqslant c$, to $a \leqslant c$, *(przechodniość)*
4. $a \leqslant b$ lub $b \leqslant a$. *(liniowość)*

Strukturę $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant \rangle$, w której relacja $\leqslant$ spełnia warunki 1., 2., 3., nazywamy zbiorem częściowo uporządkowanym *(posetem)*.
Jeśli ponadto $\leqslant$ spełnia warunek 4., to poset $\mathcal{P}$ nazywamy *łańcuchem*.

Będziemy używać symbolu $a < b$, aby powiedzieć, że $a \leqslant b$ oraz $a \neq b$.

Definicja 1.2. Poset $\mathcal{P}$ nazywamy *ograniczonym z góry*, gdy zawiera element największy 1, to znaczy dla każdego $a \in P$ mamy $a \leqslant 1$.
Poset $\mathcal{P}$ nazywamy *ograniczonym z dołu*, gdy zawiera element najmniejszy 0, to znaczy dla każdego $a \in P$ mamy $0 \leqslant a$.
Jeśli poset $\mathcal{P}$ posiada 0 i 1, to nazywamy go *ograniczonym*.

Definicja 1.3. Poset $\mathcal{P}$ nazywamy *kratą*, jeśli dla dowolnych $a, b \in P$ istnieją kresy $\sup\{a, b\}$ oraz $\inf\{a, b\}$, czyli odpowiednio: najmniejsze spośród górnych ograniczeń zbioru $\{a, b\}$ i największe spośród ograniczeń dolnych zbioru $\{a, b\}$. W dalszej części pracy będziemy używać następujących oznaczeń:

$$\sup\{a, b\} \overset{ozn}{=} a \vee b \quad \text{oraz} \quad \inf\{a, b\} \overset{ozn}{=} a \wedge b.$$

Zatem w kracie $\langle P, \leqslant \rangle$ możemy zawsze zdefiniować binarne operacje $\wedge$ oraz $\vee$. Na odwrót, w algebrze $\langle P, \wedge, \vee \rangle$, gdzie $\wedge$ i $\vee$ są binarnymi operacjami na zbiorze P takimi, że obie są idempotentne, symetryczne i łączne, to możemy zdefiniować relację $\leqslant$ częściowego porządku, a więc poset $\langle P, \leqslant\rangle$. Zdefiniujmy relację częściowego porządku $\leqslant_1$ przez operację $\wedge$ następująco:

$$a \leqslant_1 b :\Leftrightarrow a \wedge b = a.$$

Natomiast relację częściowego porządku $\leqslant_2$ przez operację $\vee$ w sposób:

$$a \leqslant_2 b :\Leftrightarrow a \vee b = b.$$

Popatrzmy na ciąg równoważności $a \leqslant_1 b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee b = a \vee b \Leftrightarrow b = a \vee b \Leftrightarrow a \leqslant_2 b$. Zatem definicje częściowego porządku w terminach kresu dolnego $\wedge$ i w terminach kresu górnego $\vee$ są równoważne. Podsumowując, pojęcia kraty jako posetu i algebry są równoważne, tj. wzajemnie definiowalne (por. G. Grätzer [6, Roz. 1])

Definicja 1.4. Niech L będzie kratą oraz $a, b \in L$. Mówimy, że a poprzedza b i piszemy $a \prec b$, gdy spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli} \quad c \in L \quad \text{i} \quad a \leqslant c \leqslant b, \quad \text{to} \quad c = a \quad \text{lub} \quad c = b.$$

Ponadto $a \preceq b$ oznacza, że $a \prec b$ lub $a = b$.

Stwierdzenie 1.5. *W dowolnej kracie L dla $a, b, c \in L$:*

$$\textit{jeśli} \quad a \leqslant b, \quad \textit{to} \quad a \vee c \leqslant b \vee c \quad \textit{oraz} \quad a \wedge c \leqslant b \wedge c.$$

DOWÓD. Niech L będzie kratą. Weźmy $a, b \in L$ takie, że $a \leqslant b$. Stąd i skoro zawsze $b \leqslant b \vee c$, mamy $a \leqslant b \vee c$. Wiemy, że zawsze $c \leqslant b \vee c$. Mamy więc, że $b \vee c$ jest górnym ograniczeniem a oraz c. Najmniejsze z górnych ograniczeń a i c wynosi $a \vee c$, więc $a \vee c \leqslant b \vee c$. Analogicznie dla $a \wedge c \leqslant b \wedge c$. □

Definicja 1.6. Niech L będzie kratą z 0. *Atomem* w L nazywamy element $p \in L$, taki że $0 \prec p$.

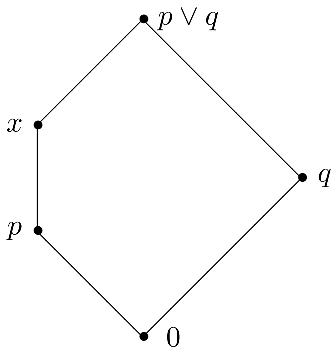
Definicja 1.7. Krata L jest *atomowa*, gdy jest ograniczona z dołu oraz dla $a \in L \backslash \{0\}$ istnieje atom $p \in L$ taki, że $p \leqslant a$.

Definicja 1.8. Krata L jest *atomistyczna*, gdy każdy jej element da się wyrazić jako kres górny atomów.

Bezpośrednio z 1.7 i 1.8 wynika:

Stwierdzenie 1.9. *Jeśli krata jest atomistyczna, to jest również atomowa.*

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. W kracie L na rysunku 1.1



Rysunek 1.1

mamy dwa atomy p i q. Dla każdego $0 \neq y \in L$ istnieje atom p lub q taki, że $p \leqslant y$ lub $q \leqslant y$. Zatem L jest atomowa. Natomiast $x \in L$ nie jest kresem górnym atomów p, q. Zatem L nie jest atomistyczna.

Definicja 1.10. Niech L będzie kratą ograniczoną. Element $a \in L$ jest *dopełnieniem* elementu $b \in L$, gdy $a \wedge b = 0$ oraz $a \vee b = 1$. Kratę ograniczoną będziemy nazywać *kratą z dopełnieniami*, gdy każdy jej element posiada dopełnienie.

Definicja 1.11. W dowolnej kracie L, dla $a, b \in L$, odcinek $[a, b]$ jest zbiorem $[a, b] = \{c \in L : a \leqslant c \leqslant b\}$.

Definicja 1.12. Niepusty podzbiór H kraty L nazywamy *podkratą*, gdy H jest domknięty ze względu na $\wedge$ i $\vee$. Podkrata H z operacjami kraty L obciętymi do H jest kratą.

Lemat 1.13. *W dowolnej kracie L, dla $a, b \in L$, odcinek $[a, b]$ jest podkratą.*

Dowód. Niech L będzie kratą. Weźmy dowolne $x, y \in [a, b] \subseteq L$. Pokażemy, że $x \wedge y \in [a, b]$ oraz $x \vee y \in [a, b]$.
Z 1.11 mamy $a \leqslant x \leqslant b$ oraz $a \leqslant y \leqslant b$. A więc a jest ograniczeniem dolnym x i y. Podobnie b jest ograniczeniem górnym x i y. Zatem

$$a \leqslant x \wedge y \text{ oraz } x \wedge y \leqslant b. \tag{1.1}$$

Mamy też

$$a \leqslant x \vee y \text{ oraz } x \vee y \leqslant b. \tag{1.2}$$

Zatem z (1.1) mamy $x \wedge y \in [a, b]$, a z (1.2) mamy $x \vee y \in [a, b]$. Tak więc $[a, b]$ jest podkratą kraty L. □

Definicja 1.14. Podkrata H kraty L jest *wypukła*, gdy spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli} \quad a, b \in H \quad \text{i} \quad x \in L \quad \text{i} \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad \text{to} \quad x \in H.$$

Definicja 1.15. Kratę L nazywamy *dystrybutywną*, gdy dla wszystkich $a, b, c \in L$ prawdziwe są równoważne tożsamości:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \text{oraz} \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Definicja 1.16. Kratę dystrybutywną z dopełnieniami nazywamy kratą *boolowską*.

Rozdział 2

Kraty modularne i rzutowe

Definicja 2.1. Mówimy, że krata L jest *modularna*, gdy dla dowolnych elementów $x, a, b \in L$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli} \quad x \leqslant b, \quad \text{to} \quad x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b. \tag{M}$$

Fakt 2.2. *Krata dystrybutywna jest modularna. W szczególności krata boolowska jest też modularna.*

Mówimy, że krata L jest *kratą rzutową*, gdy z dokładnością do izomorfizmu jest kratą podprzestrzeni pewnej przestrzeni rzutowej. Sprecyzujemy teraz pojęcie przestrzeni rzutowej.

Definicja 2.3. Niech S będzie niepustym zbiorem i $\mathcal{L} \subseteq 2^S$. Elementy zbioru S nazywamy *punktami*, natomiast elementy zbioru $\mathcal{L}$ nazywamy *prostymi*. Strukturę $\langle S, \mathcal{L}\rangle$ nazywamy *częściową przestrzenią prostych*, gdy spełnione są warunki:

(i) $\mathcal{L} \neq \emptyset$,

(ii) na każdej prostej leżą przynajmniej dwa punkty, tzn. jeśli $k \in \mathcal{L}$, to $|\, k \,| \geqslant 2$,

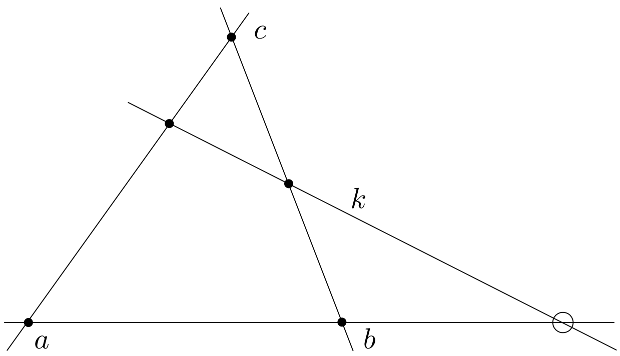
(iii) dwie różne proste mają co najwyżej jeden punkt wspólny, tzn. jeśli $k_1, k_2 \in \mathcal{L}$ oraz $|\, k_1 \cap k_2 \,| \geqslant 2$, to $k_1 = k_2$.

Jeżeli $a, b \in S$ są takimi punktami, że istnieje prosta $k \in \mathcal{L}$ na której one leżą, tzn. $a, b \in k$ wówczas mówimy krótko, że punkty a, b są *współliniowe*. Jeśli dodatkowo $a \neq b$, to prosta k jest wyznaczona jednoznacznie, wynika to z warunku (iii) w 2.3 i oznaczamy ją $\overline{ab}$. Dualnie, jeśli $k, l \in \mathcal{L}$ są takimi prostymi, że istnieje ich punkt wspólny $a \in S$, tzn. $a \in k \cap l$, to mówimy, że proste k, l *przecinają się*.

Definicja 2.4. Strukturę $\langle S, \mathcal{L}\rangle$ nazywamy *przestrzenią prostych*, gdy jest częściową przestrzenią prostych oraz spełniony jest warunek:

(iv) każde dwa punkty są współliniowe, tzn. dla każdych $a, b \in S$ istnieje $k \in \mathcal{L}$ takie, że $a, b \in k$.

Definicja 2.5. Rzutowy warunek Veblena (PVC).
Jeżeli prosta $k \in \mathcal{L}$ przecina dwa boki trójkąta w dokładnie dwóch różnych punktach, to przecina też trzeci bok tego trójkąta, gdzie trójkąt rozumiemy jako trzy parami różne i parami przecinające się proste (rys.2.1)



Rysunek 2.1: Rzutowy warunek Veblena (PVC).

Definicja 2.6. Strukturę $\mathfrak{P} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ nazywamy *przestrzenią rzutową*, gdy:

(i) $\mathfrak{P}$ jest przestrzenią prostych,

(ii) na każdej prostej leżą przynajmniej trzy różne punkty,

(iii) $\mathfrak{P}$ spełnia rzutowy warunek Veblena.

Teraz zajmiemy się pewnym specyficznym, ale wygodnym przy rachunkach, modelem przestrzeni rzutowej. Pokażemy kilka istotnych własności kraty jej podprzestrzeni.

Niech F będzie, niekoniecznie przemiennym, ciałem i niech V będzie przestrzenią wektorową nad F. Zakładamy, że $\dim(V) = n < \infty$. Przez $\mathrm{Sub}(V)$ oznaczamy rodzinę wszystkich podprzestrzeni V, natomiast przez $\mathrm{Sub}_k(V)$ oznaczamy rodzinę wszystkich k wymiarowych podprzestrzeni V. Dalej rozważamy strukturę $L(V) = \langle \mathrm{Sub}(V), \subseteq \rangle$.

1^o $L(V)$ jest posetem.

Niech $U, W, T \in \mathrm{Sub}(V)$. Z algebry wiemy, że $U \subseteq U$, tzn. że relacja $\subseteq$ jest zwrotna. Jeśli $U \subseteq W$ i $W \subseteq U$, to wiadomo, że $U = W$, co oznacza, że relacja $\subseteq$ jest antysymetryczna. Jeśli $U \subseteq W$ i $W \subseteq T$, to $U \subseteq T$, czyli relacja $\subseteq$ jest przechodnia. Tak więc $L(V)$ jest posetem. Poset $L(V)$ nie jest łańcuchem, bo na przykład dla $R, S \in \mathrm{Sub}_1(V)$ takich, że $R \neq S$ mamy $R \nsubseteq S$ oraz $S \nsubseteq R$.

2^o Poset $L(V)$ jest kratą.

Niech $U, W \in \mathrm{Sub}(V)$. Przekrój dwóch dowolnych zbiorów, w tym także iloczyn $U \cap W$ jest ograniczeniem dolnym U i W. Co więcej, jest to największe spośród ograniczeń dolnych zbiorów U i W ponieważ jeśli dowolny zbiór T jest ograniczeniem dolnym U i W, czyli gdy $T \subseteq U$ i $T \subseteq W$, to musi być $T \subseteq U \cap W$. Zatem część wspólna dowolnych zbiorów jest ich kresem dolnym, nie tylko w przypadku podprzestrzeni przestrzeni V. Z kresem górnym jest już trochę gorzej. Rozważmy sumę algebraiczną

$$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}.$$

Zauważmy, że $U \subseteq U + W$ bo każdy wektor $u \in U$ można przedstawić jako odpowiednią sumę $u + \theta$, gdzie θ jest wektorem zerowym. Podobnie mamy $W \subseteq U + W$. Zatem suma algebraiczna $U + W$ jest ograniczeniem górnym podprzestrzeni U i W. Rozważmy dowolną podprzestrzeń $T \in \mathrm{Sub}(V)$, która jest ograniczeniem górnym U i W, tzn., że $U \subseteq T$ oraz $W \subseteq T$. Weźmy dowolny wektor $x \in U + W$, tzn. $x = u + w$ dla pewnych $u \in U$ i $w \in W$. Widzimy jednak, że $u, w \in T$ z naszego założenia o T. Podprzestrzeń przestrzeni wektorowej domknięta jest ze względu na kombinacje liniowe wektorów z niej wziętych. Tak więc $u + w \in T$, co z dowolności wyboru x oznacza, że $U + W \subseteq T$, a tym samym $U + W$ jest najmniejszym spośród ograniczeń górnych U i W. Wykazaliśmy, że suma algebraiczna jest kresem górnym w posecie $L(V)$. W ten sposób poset $L(V)$ jest kratą. Na podstawie [6] wiemy, że ogólnie relacja częściowego porządku jest wzjemnie definiowalna z operacjami kresu dolnego i górnego. Możemy zatem poset $L(V)$ traktować jako algebrę

$$L(V) = \langle \mathrm{Sub}(V), \cap, + \rangle$$

i na odwrót.

3^o Krata $L(V)$ jest zupełna.

Uzasadniając, że poset $L(V)$ jest kratą wskazaliśmy binarny kres dolny i górny. Można jednak zauważyć, że przekrój zbiorów jest największym z ograniczeń dolnych dla dowolnej, niekoniecznie skończonej, rodziny zbiorów. Inaczej mówiąc, w posecie $L(V)$ istnieje kres dolny dla dowolnej, nie tylko skończonej, rodziny podprzestrzeni. Na mocy [6] to już wystarczy by stwierdzić, że $L(V)$ jest kratą zupełną, tzn. kratą w której istnieją dowolne kresy dolne i górne.

4^o Krata $L(V)$ jest modularna.

Niech $U, W, T \in \mathrm{Sub}(V)$. Pokażemy, że

$$\text{jeśli} \quad U \subseteq W, \quad \text{to} \quad U + (T \cap W) = (U + T) \cap W.$$

Zakładamy więc, że $U \subseteq W$.

" $\subseteq$ " Weźmy $x \in U + (T \cap W)$. Jest on postaci $x = y + z$, gdzie $y \in U, z \in T \cap W$. Czyli $y \in U, z \in T, z \in W$. Czy $x \in U + T$? Tak, bo

$y \in U$ oraz $z \in T$. Czy $x \in W$? Skoro $y \in U$ oraz z założenia $U \subseteq W$, to $y \in W$. Wiemy, że $z \in W$. Tak więc $y + z \in W$, bo W jest podprzestrzenią wektorową. Zatem $x \in W$. Ostatecznie $x \in (U + T) \cap W$.

" $\supseteq$ " Weźmy $x \in (U+T)\cap W$. Stąd $x \in U+T$ i $x \in W$. Zatem $x = y+z$, gdzie $y \in U$ i $z \in T$. Czy $x \in U + (T \cap W)$? Czy $x = a+b$, dla pewnych $a \in U$ i $b \in T \cap W$? Można wziąć $a = y$. Wystarczy pokazać, że $z \in T \cap W$ czyli, że $z \in W$ bo $z \in T$ już mamy. Z równania $x = y + z$ mamy, że $z = x - y$. Skoro $x \in W$ oraz $y \in W$ (bo $y \in U$ i $U \subseteq W$), to $x - y \in W$, bo W jest podprzestrzenią wektorową. Zatem $z \in W$. Czyli $z \in T \cap W$. Można wziąć $b = z$. Ostatecznie $x \in U + (T \cap W)$.

5^o Krata $L(V)$ jest atomistyczna.

Zerem kraty $L(V)$ jest podprzestrzeń zerowa Θ przestrzeni V, a atomami w tej kracie są jednowymiarowe podprzestrzenie. Niech $U \in \mathrm{Sub}(V)$ takie, że $U \neq \Theta$. Rozważmy bazę U tzn.

$$U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle,$$

gdzie $u_1, \dots, u_k \in V$ to wektory liniowo niezależne i $1 \leqslant k$. Można zapisać

$$U = \langle u_1 \rangle + \dots + \langle u_k \rangle,$$

gdzie $\langle u_1 \rangle$,..., $\langle u_k \rangle$ są atomami w kracie $L(V)$. W ten sposób dowolną, niezerową podprzestrzeń V można wyrazić jako kres górny atomów.

6^o Krata $L(V)$ jest z dopełnieniami.

Wiemy, że krata $L(V)$ jest ograniczona i jedynką tej kraty jest cała przestrzeń V. Niech $U \in \mathrm{Sub}_k(V)$. Jeśli $k = n$, tzn. $U = V$, to dopełnieniem U jest Θ. Załóżmy, więc że $k < n$. Weźmy $e_1 \in V \setminus U$ i oznaczmy $U_1 := \langle U, e_1 \rangle = U + \langle e_1 \rangle$. Wówczas $\dim(U_1) = \dim(U) + 1 = k + 1$. Następnie bierzemy $e_2 \in V \setminus U_1$ i oznaczamy $U_2 := \langle U_1, e_2 \rangle = U_1 + \langle e_2 \rangle$. Wtedy $\dim(U_2) = \dim(U_1) + 1 = \dim(U) + 2 = k + 2$. Powtarzając tę operację $n - k$ razy uzyskamy $n - k$ liniowo niezależnych nad U wektorów $e_1, \dots, e_{n-k}$. Inaczej mówiąc wektory $e_1, \dots, e_{n-k}$ stanowią rozszerzenie bazy U do bazy całej przestrzeni V. Podprzestrzeń

$$W = \langle e_1, \dots, e_{n-k} \rangle$$

jest dopełnieniem U, gdyż $U \cap W = \Theta$ oraz $U + W = V$.

Wykazaliśmy, że $L(V)$ jest kratą zupełną, modularną, atomistyczną z dopełnieniami. Z geometrii wiemy, że struktura

$$\mathbb{P}(V) = \langle \mathrm{Sub}_1(V), \mathrm{Sub}_2(V), \subseteq \rangle.$$

jest desarguesowską przestrzenią rzutową i że prawdziwe jest twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 2.7 (O reprezentacji dla przestrzeni rzutowych, Bennett [2])**.** *Jeśli abstrakcyjna przestrzeń rzutowa $\mathfrak{P}$ jest desarguesowska, to istnieje niekoniecznie przemienne ciało F i przestrzeń wektorowa V nad F taka, że $\mathfrak{P}$ jest izomorficzna z $\mathbb{P}(V)$.*

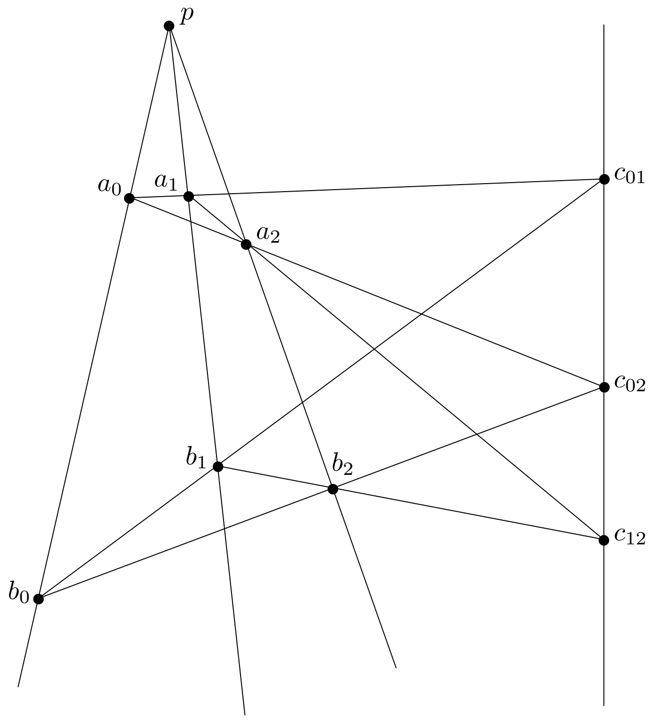
Spełnianie aksjomatu Desargues'a zawiązane jest z wymiarem przestrzeni.

Twierdzenie 2.8 (Bennett [2])**.** *Jeśli wymiar abstrakcyjnej przestrzeni rzutowej $\mathfrak{P}$ jest co najmniej 3, to jest ona desarguesowska.*

Jak widać, biorąc za punkt wyjścia w swoich rozważaniach na temat krat rzutowych przestrzeń wektorową V ograniczyliśmy się do skończenie wymiarowych przestrzeni rzutowych desargueasowskich. Wymienione jednak własności przysługują wszystkim kratom rzutowym o czym mówi [5].

Twierdzenie 2.9 (Frink [5])**.** *Każda krata rzutowa jest zupełna, atomistyczna, modularna z dopełnieniami.*

Wspominane twierdzenie Desargues'a przenosi się na język teorii krat w następujący sposób.



Rysunek 2.2: Konfiguracja Desargues'a.

Definicja 2.10. Mówimy, że krata L jest *arguesowska*, gdy dla dowolnych atomów $p, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_{01}, c_{02}, c_{12} \in L$ zachodzi (rys. 2.2):

$$\text{jeśli} \quad c = c_{01} \wedge (c_{02} \vee c_{12}),\ p = (a_0 \vee b_0) \wedge (a_1 \vee b_1) \wedge (a_2 \vee b_2), \quad \text{to} \quad p \leqslant ((c \vee a_2) \wedge a_0) \vee ((c \vee b_2) \wedge b_0).$$

Fakt 2.11 (Grätzer [6]). *Krata podprzestrzeni przestrzeni rzutowej $\mathfrak{P}$ jest arguesowska wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{P}$ jest desarguesowska.*

Z powyższego faktu wynika, że krata $L(V)$ jest arguesowska. Do zbadania pozostała jeszcze jedna własność krat rzutowych, a mianowicie *nierozkładalność* oraz twierdzenie odwrotne do 2.9.

Definicja 2.12 (Grätzer [6]). Niech L_1, L_2 będą kratami. Na zbiorze $L_1 \times L_2$ wszystkich par uporządkowanych (a, b), gdzie $a \in L_1, b \in L_2$ definiujemy operację $\wedge$ oraz $\vee$ po współrzędnych, tzn.:

$$(a, b) \wedge (c, d) = (a \wedge c, b \wedge d), \tag{2.1}$$

$$(a, b) \vee (c, d) = (a \vee c, b \vee d). \tag{2.2}$$

Tak określone operacje $\wedge$ i $\vee$ są odpowiednio kresem dolnym i górnym na zbiorze $L_1 \times L_2$. *Produktem prostym krat* L_1 i L_2 jest zbiór $L_1 \times L_2$ wraz z operacjami $\wedge$ i $\vee$ jak wyżej. Krata L jest *nierozkładalna*, gdy nie da się rozłożyć na produkt prosty krat.

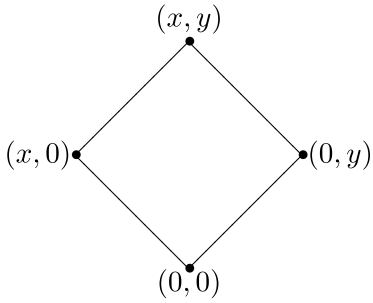
7^o Krata $L(V)$ jest nierozkładalna.

Wiemy, że $L(V)$ jest kratą rzutową, tzn. kratą podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{P}(V)$. Każda prosta U w $\mathbb{P}(V)$ jest dwuwymiarową podprzestrzenią V, więc leżą w niej co najmniej trzy parami różne wektory, a mianowicie liniowo niezależne wektory bazowe, powiedzmy u_1, u_2 oraz ich suma $u_1 + u_2$. Rzeczywiście nie może być $u_1 + u_2 = u_1$, bo wtedy $u_2 = \theta$ i analogicznie gdy $u_1 + u_2 = u_2$, to $u_1 = \theta$. Nie może też być $u_1 + u_2 = \theta$ bo wówczas wektory bazowe u_1, u_2 byłyby liniowo zależne. Mamy więc na prostej U co najmniej trzy różne punkty $\langle u_1 \rangle$, $\langle u_2 \rangle$ i $\langle u_1 + u_2 \rangle$.

Przypuśćmy, że $L(V) = L_1 \times L_2$ dla pewnych krat L_1 i L_2 czyli, że $L(V)$ jest produktem prostym krat L_1 i L_2. Z punktu 3^o wiemy, że $L(V)$ jest zupełna. Możemy zatem wyznaczyć kresy dolne l_1, l_2 wszystkich elementów odpowiednio z L_1, L_2. Będą to elementy najmniejsze w tych kratach. Skoro $\dim V = n < \infty$, to L_1, L_2 posiadają elementy bezpośrednio nad l_1, l_2, a więc L_1, L_2 posiadają atomy. Zatem każdy niezerowy element z L_1, L_2 jest porównywalny z jakimś atomem odpowiednio z L_1, L_2, co na mocy 1.7 daje, że L_1, L_2 są atomowe. Niech x będzie atomem w L_1 i y atomem w L_2. Elementem najmniejszym w $L(V)$ jest $(0, 0)$ tzn. para zer z L_1 i L_2. Mamy, że $(0, 0) \prec (x, 0)$ oraz $(0, 0) \prec (0, y)$. Jak wiemy, atomy w kracie $L(V)$ są punktami w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}(V)$. Kresowi górnemu dwóch atomów w kracie $L(V)$ odpowiada prosta w przestrzeni rzutowej. Zatem przez punkty $(x, 0)$ i $(0, y)$ przechodzi dokładnie jedna prosta. Jest ona postaci

$$(x, 0) \vee (0, y) = (x, y).$$

Kiedy punkt (a, b) leży na prostej (x, y)? To znaczy, kiedy $(a, b) \prec (x, y)$? Dla atomów x, y jest tylko $(x, 0) \prec (x, y)$ oraz $(0, y) \prec (x, y)$.



Rysunek 2.3

Tak więc, gdy krata da się rozłożyć na produkt prosty krat, to proste w odpowiadającej jej przestrzeni rzutowej mogą być dwupunktowe. Nasza krata $L(V)$ nie jest więc rozkładalna. Stąd też przymiotnik *nierozkładalna* w określeniu przestrzeni rzutowej, który mówi że proste w niej są co najmniej trzypunktowe.

Na zakończenie zacytujemy twierdzenie odwrotne do 2.9 charakteryzujące kraty rzutowe.

Twierdzenie 2.13 (Frink [5]). *Każdą kratę modularną z dopełnieniami można w jednoznaczny sposób zanurzyć w kracie podprzestrzeni produktu prostego płaszczyzn rzutowych i nierozkładalnych przestrzeni rzutowych wymiaru co najmniej 3.*

Wniosek 2.14. *Każdą nierozkładalną kratę modularną z dopełnieniami można w jednoznaczny sposób zanurzyć w kracie rzutowej.*

Nie każda krata modularna z dopełnieniami jest atomistyczna. Taka nieatomistyczna krata nigdy nie może być kratą rzutową. Dlatego wyjściową kratę modularną z dopełnieniami zanurza się w kracie jej filtrów, która jest zawsze zupełna, atomistyczna, modularna z dopełnieniami (por. [5]).

Wniosek 2.15. *Atomistyczna i nierozkładalna krata modularna z dopełnieniami jest kratą rzutową.*

Kraty modularne skończonej wysokości są atomistyczne.

Wniosek 2.16. *Nierozkładalna krata modularna skończonej wysokości z dopełnieniami jest kratą rzutową.*

Rozdział 3

Kraty półmodularne

3.1 M-symetria

Definicja 3.1. Uporządkowaną parę elementów (a, b) w kracie L nazywa się *parą modularną*, co zapisuje się $a \mathrm{M} b$, gdy spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli} \quad x \in L \quad \text{i} \quad x \leqslant b, \quad \text{to} \quad x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b. \tag{3.1}$$

Definicja 3.2. Kratę L, w której relacja M jest symetryczna, czyli M spełnia warunek:

$$\text{jeśli} \quad a, b \in L \quad \text{i} \quad a \mathrm{M} b, \quad \text{to} \quad b \mathrm{M} a \tag{Ms}$$

nazywamy kratą *M-symetryczną*.

Definicja 3.3. Para elementów (a, b) w kracie L *nie jest parą modularną*, co zapisuje się $a \bar{\mathrm{M}} b$, gdy

$$\text{istnieje} \quad x \in L \quad \text{taki, że} \quad x < b \quad \text{i} \quad x \vee (a \wedge b) \neq (x \vee a) \wedge b.$$

Definicja 3.4. Niech X będzie niepustym zbiorem. Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy *totalną* na X, gdy dla każdych $x, y \in X$ mamy $x \, R \, y$.

Twierdzenie 3.5. *Jeśli krata spełnia* (M)*, to spełnia również* (Ms).

Dowód. Dowiedziemy nawet więcej. Pokażemy, że relacja M w kracie modularnej L jest totalna (czyli dla każdych $a, b \in L$ mamy $a \mathrm{M} b$). Prócz założenia o modularności L nie będziemy zakładać poprzednika w (Ms).
Niech L spełnia (M). Zatem dla dowolnych $a, b, x \in L$ takich, że $x \leqslant b$ mamy

$$x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b. \tag{3.2}$$

Stąd oraz z 3.1 mamy $a \mathrm{M} b$. Z dowolności $a, b \in L$ oraz z 3.4 wynika, że M jest totalna w L. W szczególności M jest symetryczna w L. $\square$

Definicja 3.6. Niech L będzie kratą z 0. Krata L jest M_0-*symetryczna*, gdy spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli} \quad a \,\mathrm{M}\, b \quad \text{i} \quad a \wedge b = 0, \quad \text{to} \quad b \,\mathrm{M}\, a. \tag{Ms0}$$

Twierdzenie 3.7. *Jeśli krata spełnia* (Ms)*, to spełnia również* (Ms0)*.*

DOWÓD. Niech L będzie kratą spełniającą (Ms). Gdy L nie jest ograniczona z dołu, to warunek (Ms0) jest trywialnie prawdziwy i prawdziwe zatem jest nasze twierdzenie. Gdy natomiast L jest ograniczona z dołu, to weźmy $a, b \in L$ takie, że $a \,\mathrm{M}\, b$ i $a \wedge b = 0$. Stąd i z (Ms) mamy $b \,\mathrm{M}\, a$. Zatem z 3.6 mamy, że L spełnia (Ms0). □

Lemat 3.8. *W kracie L dla $a, b \in L$ takich, że $a \leqslant b$ mamy $a \,\mathrm{M}\, b$ oraz $b \,\mathrm{M}\, a$.*

DOWÓD. Niech $a, b \in L$ będą takie, że

$$a \leqslant b. \tag{3.3}$$

Pokażemy, że $a \,\mathrm{M}\, b$. Weźmy $x \in L$ taki, że

$$x \leqslant b. \tag{3.4}$$

Z (3.3) mamy $a \wedge b = a$, co daje $x \vee (a \wedge b) = x \vee a$. Ponadto z (3.3) i (3.4) mamy $x \vee a \leqslant b$. Zatem $x \vee a = (x \vee a) \wedge b$. Ostatecznie

$$x \vee (a \wedge b) = x \vee a = (x \vee a) \wedge b,$$

co na mocy 3.1 daje $a \,\mathrm{M}\, b$.

Pokażemy teraz, że $b \,\mathrm{M}\, a$. Weźmy $x \in L$ taki, że

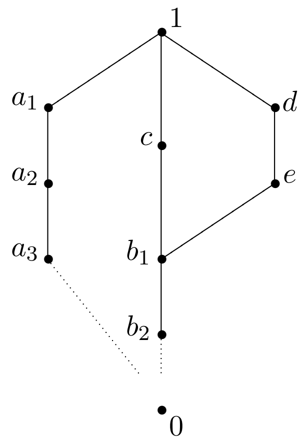
$$x \leqslant a. \tag{3.5}$$

Z (3.3) mamy $b \wedge a = a$, co daje $x \vee (b \wedge a) = x \vee a$. Z (3.5) mamy $x \vee a = a$. Z (3.3) mamy $a = b \wedge a$. Ponadto z (3.3) i (3.5) mamy $x \leqslant b$. Tak więc $b = x \vee b$, a zatem $b \wedge a = (x \vee b) \wedge a$. Ostatecznie

$$x \vee (b \wedge a) = (x \vee b) \wedge a,$$

co na mocy 3.1 daje $b \,\mathrm{M}\, a$. □

Przykład 3.9. Krata spełniająca (Ms0) i nie spełniająca (Ms).
Przykład takiej kraty jest na rysunku 3.1.



Rysunek 3.1

Łańcuch $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ oraz $\{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ jest izomorficzny z łańcuchem $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ z naturalnym porządkiem $\leqslant$.

Warunek ($\mathsf{Ms0}$) jest trywialnie spełniony. Dla par elementów, z których przynajmniej jeden jest 0, mamy ich porównywalność. Zatem z 3.8 mamy obie symetryczne pary modularne i ($\mathsf{Ms0}$) spełniony. Dla par elementów, których kres dolny jest różny od 0 mamy fałszywy poprzednik implikacji w ($\mathsf{Ms0}$). Zatem dla takich par zachodzi warunek ($\mathsf{Ms0}$). Weźmy teraz pary elementów z kraty takie, które mają kres dolny 0, czyli $a_i \wedge b_j = a_i \wedge c = a_i \wedge d = a_i \wedge e = 0$ lub symetrycznie $b_j \wedge a_i = c \wedge a_i = d \wedge a_i = e \wedge a_i = 0$, gdzie $i, j \in \mathbb{N}$ (wiemy, że operacja $\wedge$ jest symetryczna). Rozważmy parę a_i, b_j dla dowolnych $i, j \in \mathbb{N}$. Ze względu na nieskończoność łańcucha $[0, b_j]$ zawsze możemy wziąć taki $x < b_j$, że $x \neq 0$. Wówczas

$$x \vee (a_i \wedge b_j) = x \vee 0 = x \neq b_j = 1 \wedge b_j = (x \vee a_i) \wedge b_j,$$

co zgodnie z 3.3 daje $a_i \;\bar{\mathrm{M}}\; b_j$. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla każdej z wyżej wymienionych par. Zatem podsumowując mamy $a_i \;\bar{\mathrm{M}}\; b_j, a_i \;\bar{\mathrm{M}}\; c, a_i \;\bar{\mathrm{M}}\; d, a_i \;\bar{\mathrm{M}}\; e$ oraz $b_j \;\bar{\mathrm{M}}\; a_i, c \;\bar{\mathrm{M}}\; a_i, d \;\bar{\mathrm{M}}\; a_i, e \;\bar{\mathrm{M}}\; a_i$. A więc warunek ($\mathsf{Ms0}$) jest spełniony, bo poprzednik implikacji w ($\mathsf{Ms0}$) jest fałszywy dla każdej pary elementów o kresie dolnym 0. Podsumowując, poprzednik implikacji w warunku ($\mathsf{Ms0}$) jest zawsze fałszywy dla dowolnej pary elementów z L. Zatem L spełnia trywialnie ($\mathsf{Ms0}$).

Natomiast warunek (Ms) nie jest spełniony. Rozważmy bowiem $c, d \in L$. Pokażemy, że $d \mathrel{\mathrm{M}} c$. Weźmy $x \leqslant c$.

1^o Gdy $x = c$, wtedy

$$x \vee (d \wedge c) = c \vee (d \wedge c) = c \vee b_1 = c = 1 \wedge c = (c \vee d) \wedge c = (x \vee d) \wedge c.$$

2^o Gdy $x = b_i$ lub $x = 0$, wtedy

$$x \vee (d \wedge c) = x \vee b_1 = b_1 = d \wedge c = (x \vee d) \wedge c.$$

Z 1^o, 2^o i 3.1 mamy $d \mathrm{M} c$. Jeśli natomiast zauważymy, że $e < d$ oraz

$$e \vee (c \wedge d) = e \vee b_1 = e \neq d = 1 \wedge d = (e \vee c) \wedge d,$$

to z 3.3 dostajemy $c \bar{\mathrm{M}} d$. Zatem L nie spełnia warunku (Ms).

Zauważmy, że zbiór $\{b_1, e, d, 1, c\}$ jest podkratą izomorficzną z kratą pięciokąta. □

Definicja 3.10. Niech L będzie kratą z 0. Mówimy, że L spełnia *warunek atomowego pokrywania* (ang. atomic covering property), gdy dla dowolnego atomu $p \in L$ i dowolnego $a \in L$:

$$\text{jeśli} \quad a \wedge p = 0, \quad \text{to} \quad a \prec a \vee p. \tag{C}$$

Lemat 3.11. *W kracie L, jeśli $a \in L$ oraz p jest atomem w L, to $a \mathrm{M} p$.*

DOWÓD. Weźmy $x \in L$ taki, że $x \leqslant p$. Zatem $x = p$ lub $x = 0$.
1^o Gdy $x = p$, wtedy

$$x \vee (a \wedge p) = p \vee (a \wedge p) = p = (p \vee a) \wedge p = (x \vee a) \wedge p.$$

2^o Gdy $x = 0$, wtedy

$$x \vee (a \wedge p) = 0 \vee (a \wedge p) = a \wedge p = (0 \vee a) \wedge p = (x \vee a) \wedge p.$$

Z 1^o, 2^o oraz 3.1 mamy, że $a \mathrm{M} p$. □

Twierdzenie 3.12. *Jeśli krata spełnia* ($\mathsf{Ms0}$)*, to spełnia również* (C)*.*

DOWÓD. Niech L będzie kratą spełniającą ($\mathsf{Ms0}$). Gdy L nie jest ograniczona z dołu, to warunek (C) jest trywialnie prawdziwy i prawdziwe zatem jest nasze twierdzenie. Gdy natomiast L jest ograniczona z dołu, to weźmy takie $a, p \in L$, że p jest atomem oraz $a \wedge p = 0$. Pokażemy, że $a \prec a \vee p$ czyli, że L spełnia warunek (C).
Przypuśćmy, że $a \not\prec a \vee p$. Musi zatem istnieć taki y, że

$$a < y < a \vee p, \tag{3.6}$$

bo $a \leqslant a \vee p$.
Gdyby $p \leqslant y$, wtedy z pierwszej nierówności w (3.6) mamy $p \vee a \leqslant y \vee p = y$, co jest sprzeczne z drugą nierównością w (3.6). Zatem $p \nleqslant y$. Stąd i z faktu, że p jest atomem mamy

$$y \wedge p = 0. \tag{3.7}$$

Skoro p jest atomem, to z 3.11 mamy

$$y \mathrm{M} p. \tag{3.8}$$

Z (3.7) mamy

$$a \vee (p \wedge y) = a. \tag{3.9}$$

Ponadto z drugiej nierówności w (3.6) mamy $(a \vee p) \wedge y = y$. Stąd i z (3.9) i z pierwszej nierówności w (3.6) mamy $a \vee (p \wedge y) \neq (a \vee p) \wedge y$. Skoro tak, to z pierwszej nierówności w (3.6) i z 3.3 mamy

$$p \,\bar{\mathrm{M}}\, y.$$

Stąd oraz z (3.7), (3.8) i 3.6 mamy, że L nie spełnia (Ms0). Sprzeczność z założeniem, że L spełnia (Ms0). Tak więc przypuszczenie $a \not\prec a \vee p$ było fałszywe. Zatem $a \prec a \vee p$ i L spełnia (C). □

3.2 Warunek Mac Lane'a

Niektórzy autorzy używają pojęcia kraty półmodularnej posługując się warunkiem Mac Lane'a.

Definicja 3.13. Krata L spełnia *pierwszy warunek Mac Lane'a* wttw., gdy dla dowolnych elementów $a, b, c \in L$ spełniony jest warunek:

jeśli $\quad b \wedge c < a < c < b \vee a,$

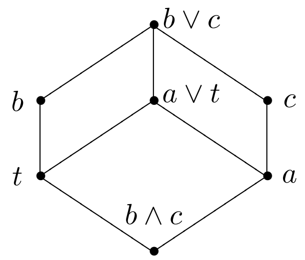
to istnieje $\quad t \in L \quad$ taki, że $\quad b \wedge c < t \leqslant b \quad$ i $\quad (a \vee t) \wedge c = a.$ (Mac1)

Weźmy w (Mac1) $t = b$. Wtedy dostajemy $(a \vee b) \wedge c$, co na mocy trzeciej nierówności w założeniu (Mac1) daje c. Ale z drugiej nierówności w założeniu (Mac1) mamy, że $c \neq a$. Zatem dla $t = b$ teza w (Mac1) nigdy nie może zajść, czyli $\leqslant$ można zastąpić przez $<$.

Definicja 3.14. Krata L spełnia *drugi warunek Mac Lane'a* wttw., gdy dla dowolnych elementów $a, b, c \in L$ spełniony jest warunek:

jeśli $\quad b \wedge c < a < c < b \vee c,$

to istnieje $\quad t \in L \quad$ taki, że $\quad b \wedge c < t \leqslant b \quad$ i $\quad (a \vee t) \wedge c = a.$ (Mac)



Rysunek 3.2: Warunek Mac Lane'a.

Twierdzenie 3.15. *Krata spełnia* (Mac1) *wttw., gdy spełnia* (Mac).

DOWÓD. "$\Leftarrow$" Niech L będzie kratą spełniającą (Mac). Weźmy $a, b, c \in L$ takie, że
$$b \wedge c < a < c < b \vee a. \tag{3.10}$$
Ze środkowej nierówności w (3.10) mamy, że $b \vee a \leqslant b \vee c$. Stąd i z (3.10) mamy poprzednik w (Mac). Zatem z założenia, że L spełnia (Mac) mamy tezę w (Mac), która jest jednocześnie tezą w (Mac1).
"$\Rightarrow$" Niech teraz L spełnia (Mac1). Weźmy $a, b, c \in L$ takie, że
$$b \wedge c < a < c < b \vee c. \tag{3.11}$$
Gdy $b \vee c = b \vee a$, to z (3.11) mamy poprzednik implikacji w (Mac1). Zatem z założenia, że L spełnia (Mac1) mamy tezę w (Mac1), która jest jednocześnie tezą w (Mac).
Rozważmy zatem sytuację, gdy
$$b \vee c \neq b \vee a. \tag{3.12}$$
Przypuśćmy, że $c \leqslant b \vee a$. Stąd i z $b \leqslant b \vee a$ mamy, że
$$b \vee c \leqslant b \vee a. \tag{3.13}$$
Ze środkowej nierówności w (3.11) mamy $b \vee a \leqslant b \vee c$. Stąd i z (3.13) mamy, że $b \vee c = b \vee a$. Sprzeczność z (3.12). Przypuszczenie $c \leqslant c \vee a$ było błędne, mamy więc $c \nleqslant b \vee a$. Przypuśćmy, że $b \vee a \leqslant c$. Wtedy $b \leqslant c$, więc $b \vee c = c$. Sprzeczność z ostatnią nierównością w (3.11). Zatem $b \vee a \nleqslant c$. Ostatecznie elementy $b \vee a$ oraz c są nieporównywalne. Oznaczmy ich kres dolny $c_1 = (b \vee a) \wedge c$.
1^o Gdy $c_1 = a$, to w (Mac) biorąc $t = b$ mamy tezę w (Mac).
2^o Gdy $c_1 \neq a$, to z $c_1 \leqslant c$ oraz z pierwszej nierówności w (3.11) mamy $b \wedge c_1 \leqslant b \wedge c < a$. Zatem
$$b \wedge c_1 < a. \tag{3.14}$$
Z $a \leqslant b \vee a$ oraz z drugiej nierówności w (3.11) mamy $a \leqslant c_1$. Stąd i z uwagi na założenie $c_1 \neq a$ mamy
$$a < c_1. \tag{3.15}$$
Wiemy, że $c_1 \leqslant b \vee a$. Gdyby $c_1 = b \vee a$, to wtedy $b \vee a \leqslant c$. Zatem $b \leqslant c$, co pociąga $c = b \vee c$. Sprzeczność z trzecią nierównością w (3.11). Przypuszczenie $c_1 = b \vee a$ było błędne, co z uwagi na $c_1 \leqslant b \vee a$ daje
$$c_1 < b \vee a. \tag{3.16}$$
Ostatecznie z (3.14), (3.15) oraz (3.16) mamy nierówność
$$b \wedge c_1 < a < c_1 < b \vee a,$$

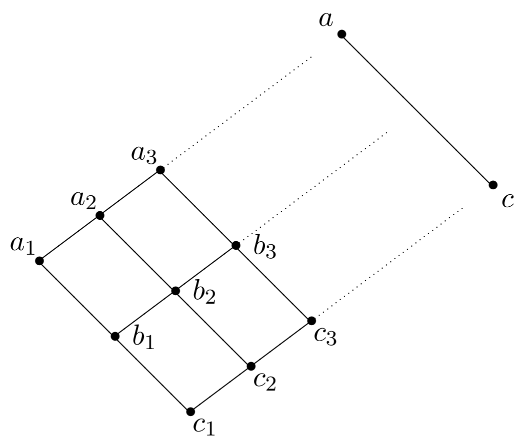
którą weźmiemy jako poprzednik implikacji w (Mac1). Zatem z (Mac1) istnieje t_1 taki, że
$$b \wedge c_1 < t_1 \leqslant b \tag{3.17}$$
oraz
$$(a \vee t_1) \wedge c_1 = a. \tag{3.18}$$
Z drugiej nierówności w (3.17) mamy $(a \vee t_1) \wedge c \leqslant (a \vee b) \wedge c = c_1$. Stąd $(a \vee t_1) \wedge c = ((a \vee t_1) \wedge c) \wedge c_1$. Zatem z łączności $\wedge$ i z uwagi na $c_1 \leqslant c$ mamy $(a \vee t_1) \wedge c = (a \vee t_1) \wedge c_1$. Stąd i z (3.18) mamy $(a \vee t_1) \wedge c = a$. Biorąc $t = t_1$ mamy, że L spełnia (Mac). □

W dalszej części pracy, jeśli nie jest powiedziane inaczej, to przez warunek Mac Lane'a będziemy rozumieć drugi warunek Mac Lane'a.

Twierdzenie 3.16. *Jeśli krata spełnia* (M)*, to spełnia również* (Mac)*.*

Dowód. Niech L będzie kratą spełniającą (M). Weźmy $a, b, c \in L$ takie, że
$$b \wedge c < a < c < b \vee c. \tag{3.19}$$
Pokażemy, że istnieje $t \in L$ takie, że $b \wedge c < t \leqslant b$ oraz $(a \vee t) \wedge c = a$. Weźmy $t := b$. Sprawdzimy, czy spełniona jest nierówność
$$b \wedge c < b \leqslant b. \tag{3.20}$$
Wystarczy sprawdzić pierwszą nierówność w (3.20). Wiemy, że zawsze $b \wedge c \leqslant b$. Przypuśćmy, że $b \wedge c = b$. Wtedy $c = b \vee c$. Sprzeczność z trzecią nierównością w (3.19). Zatem przypuszczenie $b \wedge c = b$ było błędne, co z uwagi na $b \wedge c \leqslant b$ daje $b \wedge c < b$. Zatem mamy (3.20). Sprawdzimy teraz, czy spełnione jest równanie
$$(a \vee b) \wedge c = a. \tag{3.21}$$
Z drugiej nierówności w (3.19) mamy $a < c$. Stąd i z (M) mamy
$$(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c). \tag{3.22}$$
Z pierwszej nierówności w (3.19) mamy, że $a \vee (b \wedge c) = a$. Stąd i z (3.22) otrzymujemy (3.21). Zatem L spełnia (Mac). □

Przykład 3.17. Krata spełniająca (Mac) i nie spełniająca (Ms), (Ms0). Przykład takiej kraty jest na rysunku 3.3.



Rysunek 3.3

Łańcuch $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ oraz $\{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ oraz $\{c_1, c_2, c_3, \dots\}$ jest izomorficzny z łańcuchem $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ z odwróconym porządkiem $\leqslant$.

Weźmy $a_i \wedge b_{i+m} < b_k < b_{i+m} < a_i \vee b_{i+m}$, gdzie $m \geqslant 2$, jako poprzednik implikacji w (Mac). Aby spełnić (Mac) wystarczy wziąć $t = a_i$, bo wtedy $a_i \wedge b_{i+m} < a_i \leqslant a_i$ oraz $(b_k \vee a_i) \wedge b_{i+m} = a_k \wedge b_{i+m} = b_k$.
Dla $a_i \wedge c_{i+m} < c_k < c_{i+m} < a_i \vee c_{i+m}$, gdzie $m \geqslant 2$, wystarczy wziąć $t = a_i$.
Podobnie dla $a_i \wedge c < c_k < c < a_i \vee c$ wystarczy wziąć $t = a_i$.
Dla $b_i \wedge c_{i+m} < c_k < c_{i+m} < b_i \vee c_{i+m}$, gdzie $m \geqslant 2$, wystarczy wziąć $t = b_i$.
Podobnie dla $b_i \wedge c < c_k < c < b_i \vee c$ wystarczy wziąć $t = b_i$.
Dla $c_{i+m} \wedge a_i < b_i < a_i < c_{i+m} \vee a_i$, gdzie $m \geqslant 1$, wystarczy wziąć $t = c_{i+m}$.
Natomiast dla $c \wedge a_i < b_i < a_i < c \vee a_i$ można wziąć tylko $t = c_{i+m} < c$, gdzie $m \geqslant 1$. Zatem L spełnia (Mac).

Czy $a_1 \mathrm{M}\, c$? Weźmy $x \in L$ taki, że $x \leqslant c$.
1^o Gdy $x = c$, wtedy

$$x \vee (a_1 \wedge c) = c \vee (a_1 \wedge c) = c = (c \vee a_1) \wedge c = (x \vee a_1) \wedge c.$$

2^o Gdy $x = c_i < c$, wtedy

$$c_i \vee (a_1 \wedge c) = c_i \vee c_1 = c_i = a_i \wedge c = (c_i \vee a_1) \wedge c.$$

Z 1^o, 2^o oraz 3.1 mamy $a_1 \mathrm{M}\, c$. Skoro $b_1 < a_1$ oraz

$$b_1 \vee (c \wedge a_1) = b_1 \vee c_1 = b_1 \neq a_1 = a \wedge a_1 = (b_1 \vee c) \wedge a_1,$$

to z 3.3 mamy $c\, \bar{\mathrm{M}}\, a_1$. Zatem z 3.2 mamy, że (Ms) nie zachodzi. Skoro $a_1 \mathrm{M}\, c$ oraz $a_1 \wedge c = 0$ oraz $c\, \bar{\mathrm{M}}\, a_1$, to z 3.6 mamy, że L nie spełnia (Ms0).

Zauważmy, że zbiór $\{c_1, c, a, a_1, b_1\}$ jest podkratą izomorficzną z kratą pięciokąta. $\square$

Skoro (Ms) nie implikuje (Mac) oraz (Ms) implikuje (Ms0), to tym bardziej (Ms0) nie implikuje (Mac). Mimo to podamy

Przykład 3.18. Krata spełniająca (Ms0) i nie spełniająca (Mac).
Przykład takiej kraty L jest na rysunku 3.1 str. 16. Z 3.9 wiemy, że L spełnia (Ms0). Weźmy $c \wedge d < e < d < c \vee d$ jako poprzednik implikacji w (Mac). Wtedy każde $t \in L$ takie, że $c \wedge d < t \leqslant c$ jest postaci $t = c$, bo tylko takie t możemy wziąć. Mamy również $(e \vee c) \wedge d = d \neq e$, co na mocy 3.14 daje, że L nie spełnia (Mac). □

Dla kraty L, mówimy, że $a, b \in L$ tworzą parę modularną $a \mathrm{M} b$ w odcinku $[c, d] \subseteq L$, gdy spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli} \quad x \in [c, d] \quad \text{i} \quad x \leqslant b, \quad \text{to} \quad x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b.$$

Lemat 3.19. *Niech L będzie kratą. Jeśli $a, b \in [c, d] \subseteq L$ oraz $a \mathrm{M} b$ w odcinku $[c, d]$, to $a \mathrm{M} b$ w całej kracie L.*

Dowód. Załóżmy, że $a, b \in [c, d] \subseteq L$ oraz $a \mathrm{M} b$ w odcinku $[c, d]$. Weźmy $x \in L$ taki, że $x \leqslant b$. Skoro $b \in [c, d]$, to $c \leqslant b$. Zatem $x \vee c \leqslant b$. Stąd $c \leqslant x \vee c \leqslant b \leqslant d$, a więc $x \vee c \in [c, d]$. Z założenia, że $a \mathrm{M} b$ w odcinku $[c, d]$ oraz z nierówności $x \vee c \leqslant b$ mamy

$$(x \vee c) \vee (a \wedge b) = ((x \vee c) \vee a) \wedge b = (x \vee c \vee a) \wedge b. \tag{3.23}$$

Lewa strona tej równości:

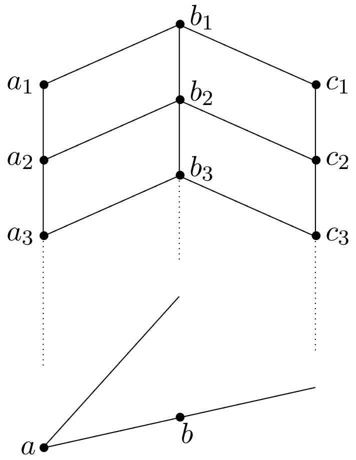
$$(x \vee c) \vee (a \wedge b) = x \vee [c \vee (a \wedge b)] = x \vee (a \wedge b). \tag{3.24}$$

Pierwszą równość mamy z łączności operacji $\vee$. Z 1.13 mamy, że odcinek $[c, d]$ jest podkratą. Skoro tak oraz $a, b \in [c, d]$, to $c \leqslant a \wedge b$. Zatem $c \vee (a \wedge b) = a \wedge b$. Stąd mamy drugą równość w (3.24).
Prawa strona równości (3.23):

$$(x \vee c \vee a) \wedge b = (x \vee a) \wedge b. \tag{3.25}$$

Tutaj równość wynika z faktu, że $c \leqslant a$. Ostatecznie z (3.23), (3.24) oraz (3.25) mamy $x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b$, co z uwagi na założenie $L \ni x \leqslant b$ daje $a \mathrm{M} b$ w całej kracie L. □

Przykład 3.20. Krata spełniająca (Ms) i nie spełniająca (Mac).
Przykład takiej kraty L jest na rysunku 3.4.



Rysunek 3.4

Łańcuch $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ oraz $\{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ oraz $\{c_1, c_2, c_3, \dots\}$ jest izomorficzny z łańcuchem $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ z naturalnym porządkiem $\leqslant$.

Element b jest jedynym atomem. W kracie tej, dla dowolnych $i, k \in \mathbb{N}$ mamy $a_i \wedge c_k = a$. Warunek (Mac) nie zachodzi. Wystarczy wziąć $a_1 \wedge c_1 < b < c_1 < a_1 \vee c_1$ jako poprzednik implikacji w (Mac). Wtedy każde $t \in L$ takie, że $a_1 \wedge c_1 < t \leqslant a_1$ jest postaci $t = a_i$. Mamy również $(b \vee a_i) \wedge c_1 = b_i \wedge c_1 = c_i \neq b$, co na mocy 3.14 daje, że nasza krata nie spełnia (Mac).

Pokażemy, że L spełnia warunek (Ms). Z 3.8 mamy, że dla $i \geqslant j$ oraz $k \geqslant j$ spełnione jest $a_i \mathrm{M}\, b_j$ oraz $b_j \mathrm{M}\, a_i$ oraz $b_j \mathrm{M}\, c_k$ oraz $c_k \mathrm{M}\, b_j$. Ponadto, dla każdego $x \in L$ zachodzi $a \leqslant x$, a więc z 3.8 mamy $a \mathrm{M}\, x$ oraz $x \mathrm{M}\, a$. Podobnie $b < b_j$ dla $j \in \mathbb{N}$, więc $b \mathrm{M}\, b_j$ i $b_j \mathrm{M}\, b$. Wiemy, że dla $j > k$ mamy $b_j \nleqslant c_k$ oraz $c_k \nleqslant b_j$.

Czy dla $j > k$ mamy $b_j \mathrm{M}\, c_k$ w odcinku $[c_j, b_k]$? Weźmy $x \in [c_j, b_k]$ takie, że $x \leqslant c_k$. Wtedy $x = c_m \leqslant c_k$ dla $j \geqslant m \geqslant k$ oraz

$$c_m \vee (b_j \wedge c_k) = c_m \vee c_j = c_m = b_m \wedge c_k = (c_m \vee b_j) \wedge c_k.$$

Tak więc z 3.1 mamy $b_j \mathrm{M}\, c_k$ dla $j > k$ w odcinku $[c_j, b_k]$. Zatem z 3.19 mamy $b_j \mathrm{M}\, c_k$ dla $j > k$ w L.

Czy dla $j > k$ mamy $c_k \mathrm{M}\, b_j$ w odcinku $[c_j, b_k]$? Weźmy $x \in [c_j, b_k]$ takie, że $x \leqslant b_j$. Wtedy $x = b_j$ albo $x = c_j$.
1^o Gdy $x = b_j$, wtedy

$$x \vee (c_k \wedge b_j) = b_j \vee (c_k \wedge b_j) = b_j = (b_j \vee c_k) \wedge b_j = (x \vee c_k) \wedge b_j.$$

2^o Gdy $x = c_j$, wtedy

$$c_j \vee (c_k \wedge b_j) = c_j \vee c_j = c_j = c_k \wedge b_j = (c_j \vee c_k) \wedge b_j.$$

Tak więc z 1^o, 2^o i 3.1 mamy $c_k \mathrm{M}\, b_j$ dla $j > k$ w odcinku $[c_j, b_k]$. Zatem z 3.19 mamy $c_k \mathrm{M}\, b_j$ dla $j > k$ w L.

Ostatecznie, dla dowolnych $j, k \in \mathbb{N}$ mamy b_j M c_k oraz c_k M b_j w L. Analogicznie, dla dowolnych $i, j \in \mathbb{N}$ mamy a_i M b_j oraz b_j M a_i w L. Wiemy, że dla dowolnych $i, k \in \mathbb{N}$ mamy $a_i \nleqslant c_k$ oraz $c_k \nleqslant a_i$.

Czy dla $i > k$ mamy a_i M c_k? Weźmy $x \in L$ takie, że $x = c_m < c_k$ dla $m > i$, wtedy

$$c_m \vee (a_i \wedge c_k) = c_m \vee a = c_m \neq c_i = b_i \wedge c_k = (c_m \vee a_i) \wedge c_k,$$

co na mocy 3.3 daje $a_i \bar{\mathrm{M}} c_k$ dla $i > k$. Analogicznie mamy $c_k \bar{\mathrm{M}} a_i$ dla $k > i$.

Czy dla $k \geqslant i$ mamy a_i M c_k? Weźmy $x \in L$ takie, że $x = c_m < c_k$ dla $m > k$, wtedy

$$c_m \vee (a_i \wedge c_k) = c_m \vee a = c_m \neq c_k = b_i \wedge c_k = (c_m \vee a_i) \wedge c_k,$$

co na mocy 3.3 daje $a_i \bar{\mathrm{M}} c_k$ dla $k \geqslant i$. Analogicznie mamy $c_k \bar{\mathrm{M}} a_i$ dla $i \geqslant k$. Ostatecznie dla dowolnych $i, k \in \mathbb{N}$ mamy $a_i \bar{\mathrm{M}} c_k$ oraz $c_k \bar{\mathrm{M}} a_i$.

Czy a_i M b? Weźmy $x \in L$ takie, że $x \leqslant b$.

1^o Gdy $x = b$, wtedy

$$x \vee (a_i \wedge b) = b \vee (a_i \wedge b) = b \vee a = b = b_i \wedge b = (b \vee a_i) \wedge b = (x \vee a_i) \wedge b.$$

2^o Gdy $x = a$, wtedy

$$x \vee (a_i \wedge b) = a \vee (a_i \wedge b) = a \vee a = a = a_i \wedge b = (a \vee a_i) \wedge b = (x \vee a_i) \wedge b.$$

Zatem z 1^o, 2^o i 3.1 mamy a_i M b.

Czy b M a_i? Weźmy $x \in L$ takie, że $x \leqslant a_i$.

1^o Gdy $x = a_m \leqslant a_i$ dla $m \geqslant i$, wtedy

$$a_m \vee (b \wedge a_i) = a_m \vee a = a_m = b_m \wedge a_i = (a_m \vee b) \wedge a_i.$$

2^o Gdy $x = a < a_i$, wtedy

$$a \vee (b \wedge a_i) = a \vee a = a = b \wedge a_i = (a \vee b) \wedge a_i.$$

Zatem z 1^o, 2^o i 3.1 mamy b M a_i.

Zbadaliśmy wszystkie możliwe pary elementów z L i możemy stwierdzić, że L spełnia warunek (Ms).

Zauważmy, że zbiór $\{a, b, c_1, b_1, a_1\}$ jest podkratą izomorficzną z kratą pięciokąta. □

Stwierdzenie 3.21. *Z przykładów* 3.17 *i* 3.20 *wynika, że warunki* (Mac) *i* (Ms) *są od siebie niezależne.*

3.3 Warunki pokrywania

Definicja 3.22. Krata L jest *półmodularna z góry* (ang. upper covering condition), gdy dla dowolnych elementów $a, b, c \in L$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli} \quad a \prec b, \quad \text{to} \quad a \vee c \preceq b \vee c. \tag{UCC}$$

Kratę, która jest *półmodularna z góry* będziemy nazywać *półmodularną*.

Definicja 3.23. Krata L jest *półmodularna z dołu* (ang. lower covering condition), gdy dla dowolnych elementów $a, b, c \in L$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli} \quad a \prec b, \quad \text{to} \quad a \wedge c \preceq b \wedge c. \tag{LCC}$$

Twierdzenie 3.24. *Jeśli H jest wypukłą podkratą kraty półmodularnej L, to H jest półmodularna.*

Dowód. Niech L będzie kratą spełniającą (UCC) oraz H jej wypukłą podkratą. Weźmy $a, b, c \in H$ takie, że $a \prec b$ w H. Mamy pokazać, że $a \vee c \preceq b \vee c$.
Jeśli $a \prec b$ w L, to z półmodularności L mamy $a \vee c \preceq b \vee c$.
Jeśli $a \not\prec b$ w L, to z założenia, że $a \prec b$ w H mamy, że istnieje $x \in L$ taki, że $a < x < b$. Ale z wypukłości H mamy $x \in H$. Czyli $a \not\prec b$ w H. Sprzeczność z założeniem, że $a \prec b$ w H. Zatem $a \prec b$ w L i z półmodularności L mamy $a \vee c \preceq b \vee c$. □

Twierdzenie 3.25. *Krata L jest półmodularna (ang. semimodular) wttw., gdy dla dowolnych elementów $a, b \in L$:*

$$\text{jeśli} \quad a \wedge b \prec b, \quad \text{to} \quad a \prec a \vee b. \tag{Sm}$$

Dowód. "$\Rightarrow$" Niech L będzie kratą półmodularną, czyli spełniającą (UCC). Weźmy $a, b \in L$ takie, że $a \wedge b \prec b$. Za c w (UCC) podstawmy a, wtedy

$$(a \wedge b) \vee a \preceq a \vee b.$$

Tak więc z pochłaniania mamy $a \preceq a \vee b$. Przypuśćmy, że $a = a \vee b$. Wtedy $b \leqslant a$, co daje $a \wedge b = b$. Sprzeczność z założeniem $a \wedge b \prec b$. Przypuszczenie $a = a \vee b$ było błędne i z uwagi na $a \preceq a \vee b$ zostaje $a \prec a \vee b$. Zatem L spełnia (Sm).
"$\Leftarrow$" Niech teraz krata L spełnia (Sm). Weźmy $a, b, c \in L$ takie, że

$$a \prec b. \tag{3.26}$$

Skoro tak oraz $a \leqslant a \vee c$, to $a \leqslant (a \vee c) \wedge b$. Wiemy, że $(a \vee c) \wedge b \leqslant b$. Podsumowując, mamy

$$a \leqslant (a \vee c) \wedge b \leqslant b,$$

a więc są dwa możliwe przypadki:

$$(a \vee c) \wedge b = \begin{cases} a, & \text{gdy} \quad b \nleqslant a \vee c, \\ b, & \text{gdy} \quad b \leqslant a \vee c. \end{cases}$$

W pierwszym z nich na podstawie (3.26) mamy $(a \vee c) \wedge b \prec b$. Stąd i z (Sm) mamy

$$a \vee c \prec (a \vee c) \vee b = a \vee b \vee c = b \vee c. \tag{3.27}$$

Ostatnia równość wynika z założenia $a \prec b$.
W drugim przypadku mamy $b \leqslant a \vee c$. Zatem

$$b \vee c \leqslant a \vee c,$$

ale jednocześnie z (3.26) mamy

$$a \vee c \leqslant b \vee c,$$

tak więc

$$a \vee c = b \vee c. \tag{3.28}$$

Ostatecznie z (3.27) i (3.28) otrzymujemy $a \vee c \preceq b \vee c$. Zatem L spełnia (UCC). □

Twierdzenie 3.26. *Jeśli krata spełnia* (Mac)*, to spełnia również* (Sm).

DOWÓD. Niech L będzie kratą spełniającą (Mac) i nie spełniającą (Sm). Skoro L nie spełnia (Sm), to istnieją $a, b \in L$ takie, że

$$a \wedge b \prec a \tag{3.29}$$

oraz $b \not\prec a \vee b$. Stąd i z faktu, że $b \leqslant a \vee b$ mamy, że istnieje $c \in L$ taki, że

$$b < c < a \vee b. \tag{3.30}$$

Wiemy, że zawsze $a \wedge b \leqslant b$. Przypuśćmy, że $a \wedge b = b$. Wtedy mamy $a \vee b = a$. Stąd i z drugiej nierówności w (3.30) mamy

$$c < a. \tag{3.31}$$

Z $a \wedge b \leqslant b$ oraz z pierwszej nierówności w (3.30) mamy $a \wedge b < c$. Stąd i z (3.31) mamy $a \wedge b < c < a$, co daje sprzeczność z (3.29). Zatem przypuszczenie $a \wedge b = b$ było błędne, co z uwagi na $a \wedge b \leqslant b$ daje

$$a \wedge b < b. \tag{3.32}$$

Skoro w (3.30) mamy $b < c$, to

$$a \vee b \leqslant a \vee c. \tag{3.33}$$

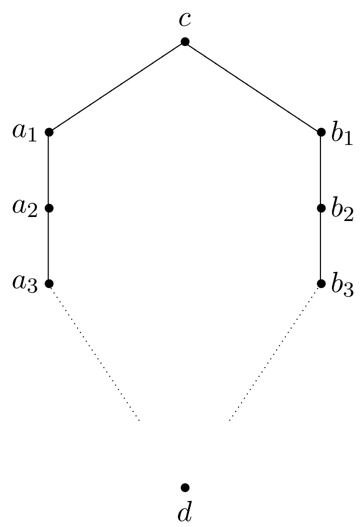
Z drugiej nierówności w (3.30) oraz faktu, że $a \leqslant a \vee b$ mamy, że $a \vee c \leqslant a \vee b$. Stąd i z (3.33) mamy
$$a \vee c = a \vee b. \tag{3.34}$$
Skoro w (3.30) mamy $b < c$, to
$$a \wedge b \leqslant a \wedge c. \tag{3.35}$$
Przypuśćmy, że $a \wedge b < a \wedge c$. Zatem
$$a \wedge b < a \wedge c \leqslant a.$$
Stąd oraz z (3.29) mamy $a \wedge c = a$. Zatem $a \vee c = c$. Stąd i z (3.34) mamy $a \vee b = c$, co jest sprzeczne z drugą nierównością w (3.30). Zatem przypuszczenie $a \wedge b < a \wedge c$ było błędne, co z uwagi na (3.35) daje
$$a \wedge c = a \wedge b. \tag{3.36}$$
Z (3.32) i (3.30) mamy $a \wedge b < b < c < a \vee b$. Stąd oraz z (3.34) i (3.36) mamy nierówność
$$a \wedge c < b < c < a \vee c,$$
którą mogę wziąć jako poprzednik implikacji w warunku (Mac). Z (3.36) i (3.29) mamy $a \wedge c \prec a$. Stąd mamy, że $t \in L$, które spełnia nierówność $a \wedge c < t \leqslant a$ może być tylko postaci $t = a$. Ponadto z drugiej nierówności w (3.30) mamy $(b \vee a) \wedge c = c$, co z uwagi na $b < c$ z (3.30), daje
$$(b \vee a) \wedge c \neq b.$$
Zatem z 3.14 mamy, że L nie spełnia (Mac). Sprzeczność z założeniem, że L spełnia (Mac). Zatem L spełnia (Sm). □

Stwierdzenie 3.27. *Warunki* ($\mathsf{Ms0}$) *oraz* (Sm) *są od siebie niezależne.*

DOWÓD. Przykład kraty L, która spełnia ($\mathsf{Ms0}$) i nie spełnia (Sm) jest na rysunku 3.1 str. 16. Z 3.9 wiemy, że L spełnia ($\mathsf{Ms0}$). Skoro $c \wedge e \prec c$ oraz $e \not\prec c \vee e$, to L nie spełnia (Sm) (por. 3.25).

Gdyby (Sm) implikował ($\mathsf{Ms0}$), to z uwagi na to, że (Mac) implikuje (Sm) (por. 3.26) mielibyśmy (Mac) implikuje ($\mathsf{Ms0}$). Sprzeczność z 3.17. Zatem (Sm) nie implikuje ($\mathsf{Ms0}$). □

Przykład 3.28. Krata spełniająca (Sm) i nie spełniająca (Mac).
Przykład takiej kraty L jest na rysunku 3.5



Rysunek 3.5

Łańcuch $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ oraz $\{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ jest izomorficzny z łańcuchem $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ z naturalnym porządkiem $\leqslant$.

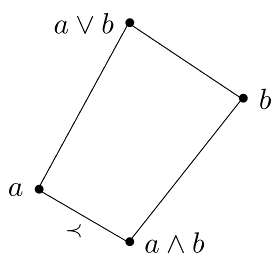
Dla dowolnych $i, j \in \mathbb{N}$ mamy $a_i \wedge b_j = d \not\prec a_i, b_j$. Zatem dla a_i, b_j poprzednik implikacji w (Sm) jest fałszywy, co daje prawdziwość warunku (Sm).
Dla $i > 1$ oraz $j > 1$ mamy $a_i \wedge c = a_i \not\prec a_i, c$ oraz $b_j \wedge c = b_j \not\prec b_j, c$. Zatem dla a_i, c oraz b_j, c mamy (Sm).
Dla a_1, c mamy $a_1 \wedge c \prec c$ oraz $a_1 \prec a_1 \vee c$, więc zachodzi (Sm).
Dla b_1, c mamy $b_1 \wedge c \prec c$ oraz $b_1 \prec b_1 \vee c$, więc zachodzi (Sm).
Dla dowolnych $i, j \in \mathbb{N}$ mamy $a_i \wedge d = d \not\prec a_i, d$ oraz $b_j \wedge d = d \not\prec b_j, d$. Zatem dla a_i, d oraz b_j, d zachodzi (Sm). Ostatecznie L spełnia (Sm).
Weźmy $a_1 \wedge b_1 < b_2 < b_1 < a_1 \vee b_1$ jako poprzednik implikacji w (Mac). Wtedy każde $t \in L$ takie, że $a_1 \wedge b_1 < t \leqslant a_1$ jest postaci $t = a_i$. Mamy $(b_2 \vee a_i) \wedge b_1 = c \wedge b_1 = b_1 \neq b_2$, co na mocy 3.14 daje, że nasza krata nie spełnia (Mac).

Zauważmy, że zbiór $\{d, b_1, c, a_1, a_2\}$ jest podkratą izomorficzną z kratą pięciokąta. $\square$

Lemat 3.29. *Niech a, b będą elementami dowolnej kraty L.*

$$\textit{Jeśli} \quad a \wedge b \prec a, \quad \textit{to} \quad b \,\mathrm{M}\, a.$$

Dowód. Niech $a, b \in L$ takie, że $a \wedge b \prec a$.



Rysunek 3.6

Czy b M a? Czyli równoważnie, czy dla $x \in L$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli} \quad x \leqslant a, \quad \text{to} \quad x \vee (b \wedge a) = (x \vee b) \wedge a. \tag{3.37}$$

Dla $x = a$ mamy $a \vee (b \wedge a) = a = (a \vee b) \wedge a$, co kończy dowód.
Dla $x = a \wedge b$ mamy $(a \wedge b) \vee (b \wedge a) = b \wedge a = ((a \wedge b) \vee b) \wedge a$, co również kończy dowód.
Niech teraz $x \prec a$ i $x \neq a \wedge b$. Zatem z $x \prec a$ mamy

$$x \vee b \leqslant a \vee b. \tag{3.38}$$

Przypuśćmy, że

$$x \vee b < a \vee b. \tag{3.39}$$

Stąd mamy

$$a \wedge (x \vee b) \leqslant a \wedge (a \vee b) = a. \tag{3.40}$$

Zawsze

$$a \wedge b \leqslant a \wedge (x \vee b), \tag{3.41}$$

bo $b \leqslant x \vee b$. Podsumowując (3.40) i (3.41) mamy

$$a \wedge b \leqslant a \wedge (x \vee b) \leqslant a.$$

Zatem z uwagi na globalne założenie $a \wedge b \prec a$ mamy albo

$$a \wedge (x \vee b) = a \tag{3.42}$$

albo

$$a \wedge (x \vee b) = a \wedge b. \tag{3.43}$$

W pierwszym przypadku, dla (3.42), mamy $a \leqslant x \vee b$. Stąd i z tego, że $b \leqslant x \vee b$ mamy, że $a \vee b \leqslant x \vee b$. Sprzeczność z (3.39).
Rozpatrzmy teraz drugi przypadek, gdy zachodzi (3.43). Z założenia $x \prec a$ oraz faktu, że $x \leqslant x \vee b$ mamy $x \leqslant a \wedge (x \vee b)$. Stąd i z (3.43) mamy $x \leqslant a \wedge b$. Sprzeczność z założeniami, że $x \neq a \wedge b$ i oba są bezpośrednio pod a. Zatem przypuszczenie (3.39) było błędne, co z uwagi na (3.38) daje

$$x \vee b = a \vee b. \tag{3.44}$$

Lewa strona równania w (3.37) wynosi a, jako kres górny różnych bezpośrednich poprzedników a.
Prawa strona równania w (3.37) wynosi $(x \vee b) \wedge a$, co na mocy (3.44) jest równe $(a \vee b) \wedge a = a$. Koniec dowodu w tym wypadku.

Rozważmy sytuację, gdy $x < a$ oraz $x \not\prec a$, tzn. x jest co najmniej 1 poziom niżej niż $a \wedge b$, czyli co najmniej 2 poziomy poniżej a. Wtedy mamy dwa przypadki:

$$x < a \wedge b. \tag{3.45}$$

albo
$$x \nleqslant a \wedge b. \tag{3.46}$$
W pierwszym przypadku mamy
$$x \vee (b \wedge a) = b \wedge a. \tag{3.47}$$
Z (3.45) mamy $x < b$, co daje $b \wedge a = (x \vee b) \wedge a$. Stąd i z (3.47) mamy $x \vee (b \wedge a) = (x \vee b) \wedge a$, co kończy dowód w tym wypadku.
W przypadku (3.46), z założeń $x < a$ i $a \wedge b \prec a$, mamy
$$x \vee (b \wedge a) = a. \tag{3.48}$$
Skoro zawsze $b \leqslant x \vee b$, to
$$a \wedge b \leqslant (x \vee b) \wedge a. \tag{3.49}$$
Przypuśćmy, że
$$a \wedge b = (x \vee b) \wedge a. \tag{3.50}$$
Z faktu, że $x \leqslant x \vee b$ i założenia $x < a$ mamy $x \leqslant (x \vee b) \wedge a$. Stąd i z (3.50) mamy $x \leqslant a \wedge b$, co przeczy (3.46). Zatem przypuszczenie (3.50) było błędne, co z uwagi na (3.49) daje
$$a \wedge b < (x \vee b) \wedge a. \tag{3.51}$$
Z założenia $x < a$ mamy $x \vee b \leqslant a \vee b$. Zatem
$$(x \vee b) \wedge a \leqslant (a \vee b) \wedge a = a. \tag{3.52}$$
Z (3.51), (3.52) i $a \wedge b \prec a$ mamy $(x \vee b) \wedge a = a$. Stąd i z (3.48) mamy $x \vee (b \wedge a) = (x \vee b) \wedge a$, co kończy dowód. □

Twierdzenie 3.30. *Jeśli krata spełnia* (Ms)*, to spełnia również* (Sm)*.*

DOWÓD. Niech krata L spełnia (Ms). Weźmy $a, b \in L$ takie, że
$$a \wedge b \prec a. \tag{3.53}$$
Pokażemy, że $b \prec a \vee b$ (czyli, że L spełnia (Sm)).
Przypuśćmy, że $b \not\prec a \vee b$. Stąd i z $b \leqslant a \vee b$ mamy, że istnieje $c \in L$ taki, że
$$b < c < a \vee b. \tag{3.54}$$
Zauważmy, że z pierwszej nierówności w (3.54) mamy
$$a \wedge b \leqslant a \wedge c. \tag{3.55}$$
Przypuśćmy, że $a \wedge b < a \wedge c$, to znaczy, że $a \wedge b \neq a \wedge c$. Wiemy, że zawsze $a \wedge c \leqslant a$. Zatem $a \wedge b < a \wedge c \leqslant a$. Stąd i z (3.53) mamy $a \wedge c = a$. Skoro tak, to

$a \leqslant c$. Tak więc z pierwszej nierówności w (3.54) mamy $a \vee b \leqslant a \vee c = c$. Ale z drugiej nierówności w (3.54) dostajemy sprzeczność. Zatem przypuszczenie $a \wedge b < a \wedge c$ jest złe i w konsekwencji zostaje

$$a \wedge b = a \wedge c. \tag{3.56}$$

Z tej równości i z założenia (3.53) mamy, że $a \wedge c \prec a$. Zatem z 3.29 mamy

$$c \mathrel{\mathrm{M}} a. \tag{3.57}$$

Ponownie z (3.56) i z (3.54) dostajemy

$$b \vee (a \wedge c) = b \vee (a \wedge b) = b \neq c = (b \vee a) \wedge c.$$

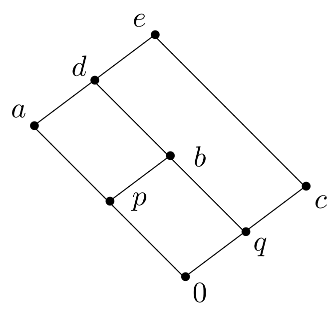
Zatem z 3.3 mamy $a \mathrel{\bar{\mathrm{M}}} c$, co przeczy (Ms) z uwagi na (3.57). Stąd przypuszczenie, że $b \not\prec a \vee b$ było złe. Tak więc $b \prec a \vee b$ i L spełnia (Sm). □

Przykład 3.31. Krata spełniająca (Sm) i nie spełniająca (Ms), (Ms0). Przykład takiej kraty L jest na rysunku 3.3 str. 21. Z 3.17 wiemy, że L spełnia (Mac). Stąd i z 3.26 mamy, że L spełnia (Sm). Z 3.17 wiemy, że L nie spełnia (Ms), (Ms0). □

Twierdzenie 3.32. *Jeśli krata spełnia* (Sm)*, to spełnia również* (C)*.*

Dowód. Niech L będzie kratą spełniającą (Sm). Gdy L nie jest ograniczona z dołu, to warunek (C) jest trywialnie prawdziwy i prawdziwe zatem jest nasze twierdzenie. Gdy natomiast L jest ograniczona z dołu, to weźmy $a, p \in L$ takie, że p jest atomem oraz $a \wedge p = 0$. Skoro tak, to $a \wedge p \prec p$. A więc z (Sm) mamy $a \prec a \vee p$. Zatem z 3.10 mamy, że L spełnia (C). □

Przykład 3.33. Krata spełniająca (C) i nie spełniająca (Sm), (Ms0). Przykład takiej kraty L jest na rysunku 3.7.



Rysunek 3.7

Pokażemy, że L spełnia (C). Jedynymi atomami są p i q. Skoro:

1^o p jest atomem oraz $0 \wedge p = 0$ oraz $0 \prec 0 \vee p = p$,
2^o p jest atomem oraz $q \wedge p = 0$ oraz $q \prec q \vee p = b$,
3^o p jest atomem oraz $c \wedge p = 0$ oraz $c \prec c \vee p = e$,

4^o q jest atomem oraz $0 \wedge q = 0$ oraz $0 \prec 0 \vee q = q$,
5^o q jest atomem oraz $p \wedge q = 0$ oraz $p \prec p \vee q = b$,
6^o q jest atomem oraz $a \wedge q = 0$ oraz $a \prec a \vee q = d$,
to z $1^o, \ldots, 6^o$ i z 3.10 mamy, że L spełnia (C). Analogicznie jak w 3.17 mamy u nas $a \mathrm{M}\, c$, bo nasza krata jest podobnej budowy, tylko że skończonej wysokości. Mamy $p < a$ oraz $p \vee (c \wedge a) = p \vee 0 = p \neq a = e \wedge a = (p \vee c) \wedge a$, więc z 3.3 dostajemy $c\, \overline{\mathrm{M}}\, a$. Skoro $a \wedge c = 0$ i $a \mathrm{M}\, c$ i $c\, \overline{\mathrm{M}}\, a$, to z 3.6 mamy, że L nie spełnia (Ms0). Z $b \wedge c \prec c$ oraz $b \not\prec b \vee c$ (por. 3.25) mamy, że L nie spełnia (Sm).

Zauważmy, że zbiór $\{q, c, e, d, b\}$ jest podkratą izomorficzną z kratą pięciokąta. □

3.4 Kraty Birkhoffa

Definicja 3.34. Krata L spełnia *warunek Birkhoffa*, gdy dla dowolnych elementów $a, b \in L$:

$$\text{jeśli} \quad a \wedge b \prec a, b, \quad \text{to} \quad a, b \prec a \vee b. \tag{Bi}$$

Przykład 3.35. Krata spełniająca (Ms0) i nie spełniająca (Bi).
Przykład takiej kraty L jest na rysunku 3.1 str. 16. Z 3.9 wiemy, że L spełnia (Ms0). Skoro $c \wedge e \prec c, e$ oraz $e \not\prec c \vee e$, to z 3.34 mamy, że L nie spełnia (Bi).
□

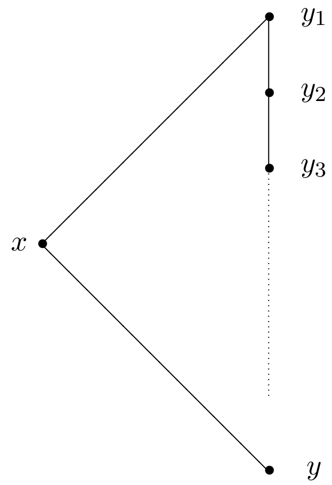
Przykład 3.36. Krata spełniająca (C) i nie spełniająca (Bi).
Przykład takiej kraty L jest na rysunku 3.7 str. 31. Z 3.33 wiemy, że L spełnia (C). Mamy natomiast $b \wedge c \prec b, c$ oraz $b \not\prec b \vee c$, więc z 3.34 L nie spełnia (Bi).
□

Twierdzenie 3.37. *Jeśli krata spełnia* (Sm)*, to spełnia również* (Bi)*.*

DOWÓD. Niech krata L spełnia (Sm). Weźmy $a, b \in L$ takie, że $a \wedge b \prec a, b$. Pokażemy, że $a, b \prec a \vee b$. Skoro $a \wedge b \prec a, b$, to w szczególności $a \wedge b \prec b$. Zatem z (Sm) mamy $a \prec a \vee b$. Skoro $a \wedge b \prec a, b$, to w szczególności $a \wedge b \prec a$. Tak więc z (Sm) mamy $b \prec a \vee b$. Ostatecznie $a, b \prec a \vee b$ i L spełnia (Bi). □

Skoro (Sm) implikuje (Bi) (por. 3.37) oraz (Sm) nie implikuje (Ms0) (por. 3.31), to tym bardziej (Bi) nie implikuje (Ms0).

Przykład 3.38. Krata spełniająca (Bi) i nie spełniająca (Sm), (C).
Przykład takiej kraty L jest na rysunku 3.8.



Rysunek 3.8

Łańcuch $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$ jest izomorficzny z łańcuchem $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ z naturalnym porządkiem $\leqslant$.

Dla elementów typu $y_i, y_j \in L$ takich, że $j \geqslant i$ mamy $y_i \wedge y_j = y_j \not\prec y_j$. Zatem dla takich elementów (Bi) trywialnie spełniony. Podobnie dla $y_i, y \in L$ mamy $y_i \wedge y = y \not\prec y$. Warunek (Bi) w tym wypadku też zachodzi trywialnie. Dla elementów $x, y_i \in L$ mamy $x \wedge y_i = y \not\prec y_i$, bo zawsze znajdziemy $y_{i+1} \in L$ taki, że $y < y_{i+1} < y_i$. Zatem w tym wypadku też (Bi) zachodzi trywialnie. Ostatecznie, z 3.34 mamy, że L spełnia (Bi) dla każdej pary elementów. Mamy natomiast $x \wedge y_3 \prec x$, ale $y_3 \not\prec x \vee y_3$. Tak więc z 3.25 mamy, że L nie spełnia (Sm). Skoro x jest atomem oraz $y_3 \wedge x = 0$ oraz $y_3 \not\prec y_3 \vee x$, to z 3.10 mamy, że L nie spełnia (C).

Zauważmy, że zbiór $\{y, y_3, y_2, y_1, x\}$ jest podkratą izomorficzną z kratą pięciokąta. $\square$

3.5 Warunek wymiany

Definicja 3.39. Niech L będzie kratą z 0. Mówimy, że L spełnia *warunek wymiany Steinitz'a-Mac Lane'a* (ang. Steinitz-Mac Lane exchange property), gdy dla $a \in L$ i atomów $p, q \in L$:

$$\text{jeśli} \quad a \wedge p = 0 \quad \text{i} \quad p \leqslant a \vee q, \quad \text{to} \quad q \leqslant a \vee p. \tag{EP}$$

Twierdzenie 3.40. *Jeśli krata spełnia* (C)*, to spełnia również* (EP)*.*

Dowód. Niech L będzie kratą spełniającą (C). Gdy L nie jest ograniczona z dołu, to warunek (EP) jest trywialnie prawdziwy i prawdziwe zatem jest nasze twierdzenie. Gdy natomiast L jest ograniczona z dołu, to weźmy $a, p, q \in L$ takie, że p, q są atomami oraz $a \wedge p = 0$ oraz $p \leqslant a \vee q$. Pokażemy, że

$$q \leqslant a \vee p, \tag{3.58}$$

czyli, że L spełnia (EP). Ponieważ q jest atomem, to $a \wedge q = q$ lub $a \wedge q = 0$.
1^o Przypuśćmy, że $a \wedge q = q$. Wtedy $q \leqslant a$. Stąd

$$a = a \vee q. \tag{3.59}$$

Wiemy, że zawsze $q \leqslant a \vee q$. Stąd i z (3.59) mamy $q \leqslant a$. Zatem tym bardziej mamy (3.58), co kończy dowód w tym przypadku.
2^o Teraz przypuśćmy, że $a \wedge q = 0$. Stąd, z faktu że q jest atomem oraz z (C) mamy

$$a \prec a \vee q. \tag{3.60}$$

Z założenia $a \wedge p = 0$, z faktu że p jest atomem oraz z (C) mamy

$$a \prec a \vee p. \tag{3.61}$$

Przypuśćmy że $q \nleqslant a \vee p$. Zatem $(a \vee p) \wedge q = 0$. Stąd oraz z faktu, że q jest atomem oraz z (C) mamy $a \vee p \prec (a \vee p) \vee q$. Z łączności operacji $\vee$ mamy

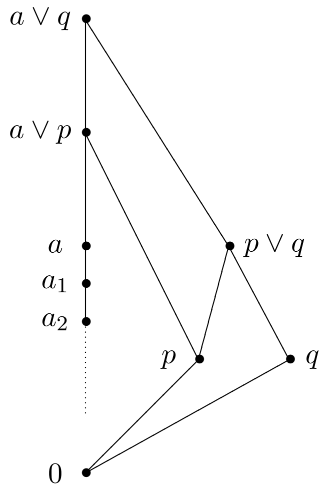
$$a \vee p \prec a \vee (p \vee q). \tag{3.62}$$

Z założenia $p \leqslant a \vee q$ oraz z nierówności $q \leqslant a \vee q$ mamy $p \vee q \leqslant a \vee q$. Zatem $a \vee (p \vee q) \leqslant a \vee (a \vee q)$ i z łączności oraz idempotencji mamy $a \vee (p \vee q) \leqslant a \vee q$. Z tej nierówności oraz z (3.62) mamy $a \vee p < a \vee q$. Sprzeczność, bo z (3.60) i (3.61) mamy, że $a \vee p$ oraz $a \vee q$ są na tym samym poziomie, jako dwa bezpośrednie następniki a. Więc przypuszczenie $q \nleqslant a \vee p$ było błędne. Zatem (3.58) i L spełnia (EP). □

Przykład 3.41. Krata spełniająca (EP) i nie spełniająca (C), (Bi).
Przykład takiej kraty L jest na rysunku 1.1 str. 5. Skoro q jest atomem oraz $p \wedge q = 0$ oraz $p \not\prec p \vee q$, to z 3.10 mamy, że L nie spełnia (C). Skoro $p \wedge q \prec p, q$ oraz $p \not\prec p \vee q$, to z 3.34 mamy, że L nie spełnia (Bi).

Pokażemy teraz, że L spełnia (EP). Weźmy poprzednik implikacji w warunku (EP) jako:
1^o p - atom, q - drugi atom, $a = q$. Wtedy $q \wedge p = 0$ i $p \leqslant q \vee q = q$. Ta nierówność jest fałszywa, więc z 3.39 mamy, że w tym wypadku (EP) jest spełniony.
2^o q - atom, p - drugi atom, $a = p$. Wtedy $p \wedge q = 0$ i $q \leqslant p \vee p = p$. Ta nierówność jest fałszywa, więc z 3.39 mamy, że w tym wypadku (EP) jest spełniony.
3^o q - atom, p - drugi atom, $a = x$. Wtedy $x \wedge q = 0$ i $q \leqslant x \vee p = x$. Ta nierówność jest fałszywa, więc z 3.39 mamy, że w tym wypadku (EP) jest spełniony.
Zatem (EP) jest trywialnie spełniony w L. □

Przykład 3.42. Krata spełniająca (Bi) i nie spełniająca (EP).
Przykład takiej kraty L jest na rysunku 3.9



Rysunek 3.9

Łańcuch $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ jest izomorficzny z łańcuchem $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ z naturalnym porządkiem $\leqslant$.

Skoro p, q są atomami oraz $a \wedge p = 0$ oraz $p \leqslant a \vee q$ oraz $q \nleqslant a \vee p$, to z 3.39 mamy, że L nie spełnia (EP). Elementami, które mają wspólny poprzednik, są p oraz q. Mają one także wspólny następnik $p \vee q$. Ostatnią parą elementów, które mają wspólny poprzednik, jest $a \vee p$ oraz $p \vee q$. Mają one także wspólny następnik $a \vee q$. Zatem L spełnia (Bi).

Zauważmy, że zbiór $\{0, p, a \vee p, a, a_1\}$ jest podkratą izomorficzną z kratą pięciokąta. □

Twierdzenie 3.43 (G. Grätzer [6])**.** *Krata L nie zawiera podkraty izomorficznej z pięciokątem wttw., gdy L jest modularna.*

Z twierdzeń w tym rozdziale wiemy, że krata modularna jest kratą półmodularną w każdym sensie. Zatem 3.43 dla krat półmodularnych ma postać implikacji:

Twierdzenie 3.44. *Jeśli krata L nie zawiera podkraty izomorficznej z pięciokątem, to L jest półmodularna w każdym sensie.*

Z powyższego twierdzenia wynika

Wniosek 3.45. *Przykładów krat, które nie są półmodularne możemy szukać tylko wśród krat, które zawierają podkratę izomorficzną z pięciokątem.*

Na końcu każdego przykładu tego rozdziału wskazaliśmy podkratę izomorficzną z pięciokątem. Gdyby takiego pięciokąta nie było, to krata byłaby półmodularna w każdym sensie i nie nadawałaby się na przykład.

Dalej przytoczymy z literatury kilka faktów wiążących rozważane warunki półmodularności przy dodatkowych założeniach.

Twierdzenie 3.46 (M. Stern [7]). *W kracie atomistycznej, warunki* (C), (EP), (Sm) *są równoważne.*

Definicja 3.47. Poset $\mathcal{P}$ spełnia *warunek łańcucha rosnącego* (ACC) (ang. ascending chain condition), gdy każdy łańcuch rosnący jego elementów stabilizuje się, tzn. gdy dla dowolnego ciągu $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \ldots$ elementów $\mathcal{P}$ istnieje takie n, że $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$

Warunek (ACC) oznacza, że poset nie zawiera nieskończonego rosnącego ciągu. W każdym niepustym podzbiorze takiego posetu jest element maksymalny (niekoniecznie największy). Każdy poset skończonej wysokości spełnia (ACC) (por. [4]). Dualne własności przysługują posetom spełniającym:

Definicja 3.48. Poset $\mathcal{P}$ spełnia *warunek łańcucha malejącego* (DCC) (ang. descending chain condition), gdy każdy łańcuch malejący jego elementów stabilizuje się, tzn. gdy dla dowolnego ciągu $\ldots a_3 \leqslant a_2 \leqslant a_1$ elementów $\mathcal{P}$ istnieje takie n, że $\ldots = a_{n+2} = a_{n+1} = a_n$.

Twierdzenie 3.49 (M. Stern [7]). *W kracie spełniającej* (ACC) *mamy następującą zależność:* (Mac) $\Rightarrow$ (Ms).

Twierdzenie 3.50 (M. Stern [7]). *W kracie spełniającej* (DCC) *mamy następujące zależności:* (Ms) $\Rightarrow$ (Mac) $\Leftrightarrow$ (Sm).

Twierdzenie 3.51 (M. Stern [7]). *W kracie skończonej wysokości, warunki* (Ms), (Mac), (Sm), (Bi) *są równoważne.*

Rozdział 4

Geometria afiniczna

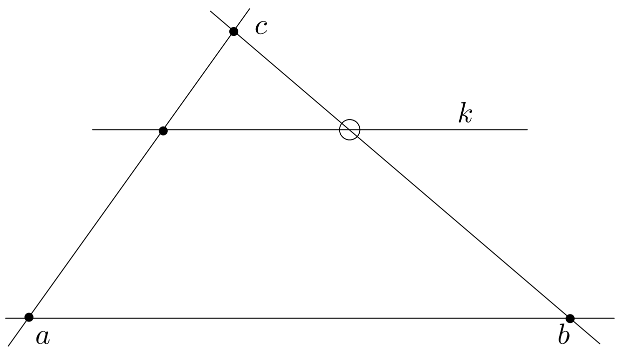
4.1 Krata afiniczna

Definicja 4.1. Niech $\langle S, \mathcal{L} \rangle$ będzie częściową przestrzenią prostych i niech $\| \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ będzie binarną relacją na zbiorze prostych $\mathcal{L}$. Relację $\|$ nazywamy relacją *równoległości*, gdy spełnione są warunki:

(i) $\|$ jest relacją równoważności,

(ii) przez każdy punkt możemy przeprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej, tzn. dla każdego $a \in S$ i $k \in \mathcal{L}$ istnieje dokładnie jedna prosta $l \in \mathcal{L}$ taka, że $a \in l$ oraz $l \| k$.

Relacja równoległości dzieli zbiór prostych na klasy abstrakcji, które nazywamy *kierunkami*. Warunek (ii) w powyższej definicji to pełny postulat Euklidesa dotyczący równoległości. Czasem osłabia się go żądając, że istnieje co najwyżej jedna odpowiednia prosta.

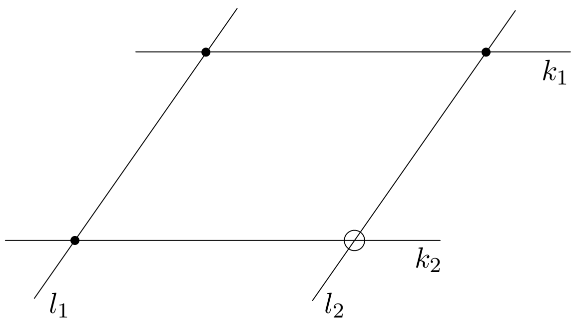


Rysunek 4.1: Afiniczny warunek Veblena (AVC).

Definicja 4.2. Afiniczny warunek Veblena (AVC).
Niech $a, b, c \in S$ tworzą niezdegenerowany trójkąt, tzn. a, b, c są niewspółlinio-

we, ale parami współliniowe. Jeśli prosta $k \in \mathcal{L}$ przecina bok $\overline{ac}$ oraz $k \| \overline{ab}$, to k przecina bok $\overline{bc}$ (rys.4.1).

Definicja 4.3. Warunek uzupełniania do równoległoboku (PC).
Niech $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathcal{L}$. Jeśli prosta k_2 przecina proste l_1 i l_2, prosta l_2 przecina proste k_1 i k_2 oraz $k_1 \| k_2$ i $l_1 \| l_2$, to k_2 przecina l_2 (rys.4.2).



Rysunek 4.2: Warunek uzupełniania do równoległoboku (PC).

Definicja 4.4. Strukturę $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, \| \rangle$ nazywamy *przestrzenią afiniczną*, gdy jest przestrzenią prostych wraz z relacją równoległości oraz spełnione są warunki (AVC) i (PC).

Definicja 4.5. Niech $\mathfrak{A} = \langle S, \mathcal{L}, \| \rangle$ będzie przestrzenią afiniczną. *Podprzestrzenią* przestrzeni $\mathfrak{A}$ nazywamy zbiór $X \subseteq S$ spełniający warunki:

(i) X jest zamknięty ze względu na prowadzenie prostych, tzn. dla dowolnej prostej $k \in \mathcal{L}$ jeśli $| k \cap X | \geqslant 2$, to $k \subseteq X$,

(ii) X jest zamknięty ze względu na prowadzenie prostych równoległych, tzn. jeśli $k, l \in \mathcal{L}$, $k \subseteq X$, $k \| l$ oraz $l \cap X \neq \emptyset$, to $l \subseteq X$.

Warunek (i) w powyższej definicji stanowi definicję podprzestrzeni w dowolnej częściowej przestrzeni prostych.

Mówimy, że krata L jest *afiniczna*, gdy istnieje przestrzeń afiniczna $\mathfrak{A}$, z której kratą podprzestrzeni L jest izomorficzna. Krata afiniczna jest zawsze ograniczona z dołu przez zbiór pusty $\emptyset$, a z góry przez całą przestrzeń.

4.2 Krata Hilberta

Na przełomie wieków XIX i XX Hilbert zajmował się aksjomatyzacją przestrzeni euklidesowej i jako pierwszy podał w miarę precyzyjną definicję *abstrakcyjnej struktury incydencyjnej*. Na jego cześć nosi ona nazwę *przestrzeni Hilberta* (por. [1]). Poglądowo wyglądała ona następująco: przestrzeń Hilberta spełnia następujące warunki:

(i) każde dwa punkty wyznaczają dokładnie jedną prostą,

(ii) każde trzy niewspółliniowe punkty wyznaczają dokładnie jedną płaszczyznę,

(iii) w 3-wymiarowej przestrzeni przecięciem dwóch płaszczyzn jest prosta,

(iv) jeśli dwa punkty leżą na płaszczyźnie, to prosta przez nie utworzona też jest na tej płaszczyźnie,

(v) na każdej prostej leżą co najmniej dwa punkty.

Pojęcie to zauważmy, zbliżone jest do pojęcia przestrzeni prostych, które wprowadziliśmy w 2.4. Podprzestrzenie tak rozumianej przestrzeni incydencyjnej, tzn. takie podzbiory zbioru punktów, które wraz z dowolnymi różnymi punktami zawierają całą prostą przez te dwa punkty, tworzą kratę zupełną z relacją teoriomnogościowej inkluzji jako relacji częściowego porządku.

Definicja 4.6. Kratę L nazywamy *kratą Hilberta*, gdy spełnia ona następujące warunki:

(i) każdy niezerowy element $a \in L$ jest kresem górnym atomów oraz spośród tych atomów można wybrać skończony podzbiór taki, że a jest jego kresem górnym,

(ii) $a \mathrm{M} b$ implikuje $b \mathrm{M} a$, dla każdych $a, b \in L$,

(iii) $a \wedge b \neq 0$ implikuje $a \mathrm{M} b$.

Zwróćmy uwagę, że w cytowanej z [1] definicji warunek (i) oznacza, że krata jest *zupełna, atomistyczna i algebraiczna*, warunek (ii) to warunek (Ms), natomiast warunek (iii) to warunek (W2), który zdefiniujemy później.

Twierdzenie 4.7 (M.K. Bennett [1]). *Krata L jest kratą afiniczną wttw., gdy L jest kratą Hilberta oraz spełnia następujący warunek:*

dla niezależnych atomów $p, q, r \in L$ istnieje dokładnie jeden element $m \in L$ taki, że $p < m < p \vee q \vee r$ oraz $m \wedge (q \vee r) = 0$. (α)

Rozważmy powyższy warunek. Zastanówmy się nad jego geometryczną interpretacją.

	Znaczenie w kracie	Znaczenie w geometrii
p, q, r	atomy	punkty
$q \vee r$	element wysokości 2	prosta $\overline{qr}$
$p \wedge (q \vee r) = 0$	elementy niezależne	punkt p nie leży na prostej $\overline{qr}$
$p \vee q \vee r$	element wysokości 3	płaszczyzna rozpięta przez p, q, r
$p < m < p \vee q \vee r$		prosta m przez punkt p na płaszczyźnie rozpiętej przez punkty p, q, r
$m \wedge (q \vee r) = 0$	elementy niezależne	prosta m jest rozłączna z prostą $\overline{qr}$

4.3 Model analityczny

Zajmiemy się teraz specyficznym modelem kraty rzutowej. Niech nadal V będzie przestrzenią wektorową i niech

$$\mathcal{H}(V) = \{a + U : a \in V,\ U \in \mathrm{Sub}(V)\} \cup \{\emptyset\}$$

będzie rodziną wszystkich warstw w V uzupełnioną o zbiór pusty, bo zbiór pusty nie jest formalnie warstwą w V. Analogicznie niech

$$\mathcal{H}_k(V) = \{a + U : a \in V,\ U \in \mathrm{Sub}_k(V)\}$$

będzie rodziną wszystkich k-wymiarowych warstw w V.

Przypomnijmy, że warstwa względem podprzestrzeni U to klasa abstrakcji relacji $\approx_U$ określonej dla $a, b \in V$ następująco

$$a \approx_U b :\Longleftrightarrow\ a - b \in U.$$

Z geometrii wiemy, że struktura

$$A(V) = \langle \mathcal{H}_0(V), \mathcal{H}_1(V), \| \rangle,$$

gdzie $\| \subseteq \mathcal{H}_1(V) \times \mathcal{H}_1(V)$ jest relacją równoległości prostych określoną dla $a, b, u, w \in V$ następująco

$$a + \langle u \rangle \parallel b + \langle w \rangle :\Longleftrightarrow\ \langle u \rangle = \langle w \rangle \tag{4.1}$$

jest (desarguesowską) przestrzenią afiniczną. Związana z nią krata afiniczna to poset

$$LA(V) = \langle \mathcal{H}(V), \subseteq \rangle$$

lub równoważna algebra

$$LA(V) = \langle \mathcal{H}(V), \cap, \sqcup \rangle,$$

gdzie kres górny warstw $A = a + U, B = b + W \in \mathcal{H}(V)$ określony jest następująco:

Lemat 4.8. *Niech A, B będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $A(V)$. Gdy $A = \emptyset$, to $A \sqcup B = B$. Gdy $B = \emptyset$, to $A \sqcup B = A$. Jeśli natomiast $A, B \neq \emptyset$, to wówczas $A = a + U$, $B = b + W$ dla pewnych podprzestrzeni U, W przestrzeni V oraz $a, b \in V$. Operacja binarna*

$$A \sqcup B := a + (U + W + \langle a - b \rangle) \tag{4.2}$$

jest kresem górnym elementów A, B w kracie podprzestrzeni przestrzeni $A(V)$.

DOWÓD. Rozważmy sytuację, gdy $A, B \neq \emptyset$. Weźmy $x \in A$. Wtedy $x = a + u$ dla pewnego $u \in U$. Ponieważ

$$x = a + (u + 0 + 0) \in A \sqcup B,$$

więc z dowolności wyboru x mamy $A \subseteq A \sqcup B$. Podobnie $B \subseteq A \sqcup B$. Tak więc, $A \sqcup B$ jest ograniczeniem górnym A, B.

Pokażemy teraz, że $A \sqcup B$ jest najmniejszym z ograniczeń górnych A, B. W tym celu rozważmy dowolną podprzestrzeń afiniczną X będącą ograniczeniem górnym A, B tzn. taką, że $A, B \subseteq X$. Weźmy $x \in A \sqcup B$. Wówczas zgodnie z (4.2) mamy

$$x = a + u + w + \lambda(a - b) \tag{4.3}$$

dla pewnych $u \in U$, $w \in W$ oraz $\lambda \in F$. Będziemy rozważać trzy przypadki:

(i) $\lambda \neq -1 \quad \text{i} \quad \lambda \neq 0$,

(ii) $\lambda = -1$,

(iii) $\lambda = 0$.

Załóżmy, że prawdziwe jest (i). Weźmy

$$x_1 := a + \frac{1}{1+\lambda}u \qquad \text{oraz} \qquad x_2 := b - \frac{1}{\lambda}w.$$

Zauważmy, że $x_1 \in A$, natomiast $x_2 \in B$, a więc $x_1, x_2 \in X$. Z uwagi na (4.3)

$$\begin{aligned} x &= a + \Big(\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\Big)u + w + \lambda a - \lambda b = \\ &= a + \frac{1}{1+\lambda}u + \lambda\Big(a + \frac{1}{1+\lambda}u - b + \frac{1}{\lambda}w\Big) = \\ &= x_1 + \lambda(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Gdyby było $x_1 = x_2$, to $x = x_1 \in A$, a stąd $x \in X$, bo $A \subseteq X$. W przypadku, gdy $x_1 \neq x_2$ mamy $x \in \overline{x_1, x_2}$. Podprzestrzeń X jest domknięta na prowadzenie prostych, zatem $\overline{x_1, x_2} \subseteq X$, a co za tym idzie $x \in X$.

Jakościowo przypadki (ii) i (iii) są równoważne (symetryczne). Przypadek (ii) oznacza, że żadna prosta przez x przecinająca B nie przetnie A. W symetrycznej sytuacji (iii), żadna prosta przez x przecinająca A, nie przecina B. Zajmiemy się więc tylko (ii). Wówczas

$$x = u + w + b. \tag{4.4}$$

Jeśli $a = a + u$, to $u = 0$ i wtedy $x = b + w \in B$, a stąd $x \in X$, bo $B \subseteq X$. Niech $a \neq a + u$ i niech l będzie prostą przez punkty a i $a + u$. Wtedy

$$l = a + \langle u \rangle.$$

Zauważmy, że $l \subseteq X$ bo $a, a+u \in A \subseteq X$, a X jest domknięte na prowadzenie prostych. Poprowadźmy prostą k równoległą do l przez punkt $b+w$:

$$k = (b+w) * l = b + w + \langle u \rangle. \tag{4.5}$$

Mamy $k \subseteq X$, bo $b+w \in B \subseteq X$ i X jest domknięte na prowadzenie prostych równoległych. Z (4.4) oraz (4.5) wynika, że $x \in k$, a co za tym idzie $x \in X$.

Pokazaliśmy, że $A \sqcup B \subseteq X$, a więc ostatecznie $A \sqcup B$ jest kresem górnym w $LA(V)$. □

Lemat 4.9. *Niech L będzie kratą. Relacja* M *jest totalna w L wttw., gdy L jest modularna.*

Dowód. " $\Rightarrow$ " Niech relacja M będzie totalna w kracie L. Zatem dla dowolnych $a, b \in L$ mamy

$$a \mathrm{\ M\ } b. \tag{4.6}$$

Stąd oraz z 3.1 mamy, że dla $x \in L$ takiego, że $x \leqslant b$ spełniona jest równość

$$x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b. \tag{4.7}$$

Zatem z 2.1 L jest kratą modularną.
" $\Leftarrow$ " Niech L będzie kratą modularną. Zatem dla dowolnych $a, b, x \in L$ takich, że $x \leqslant b$ mamy $x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b$. Stąd i z 3.1 mamy a M b. Z dowolności $a, b \in L$ relacja M jest totalna w L. □

Definicja 4.10. Krata L spełnia warunek (W2) (por. [8]), gdy dla dowolnych $a, b \in L$:

$$\text{jeśli} \quad a \wedge b \neq 0, \quad \text{to} \quad a \mathrm{\ M\ } b. \tag{W2}$$

Wniosek 4.11. *Wiemy, że operacja $\wedge$ jest symetryczna. Zatem w tezie warunku* (W2) *możemy dodatkowo napisać b* M *a.*

Lemat 4.12 (A. Bienias[3])**.** *Krata afiniczna spełnia* (W2)*.*

Lemat 4.13. *Jeśli p jest atomem w kracie afinicznej, to odcinek $[p, 1]$ jest podkratą modularną.*

Dowód. Niech L będzie kratą afiniczną. Z 1.13 mamy, że odcinek $[p, 1]$ jest podkratą L. Pokażemy teraz, że podkrata $[p, 1]$ jest modularna. Weźmy dowolne $a, b \in [p, 1]$. Zatem $a \wedge b \neq 0$. Stąd i z 4.12 mamy a M b. Z dowolności wyboru a i b mamy, że relacja M jest totalna w $[p, 1]$. Zatem z 4.9 podkrata $[p, 1]$ jest podkratą modularną kraty L. □

Z implikacji w lewą stronę w 3.43 oraz z 3.44 mamy

Lemat 4.14. *Jeśli krata spełnia* (M)*, to spełnia również* (LCC)*.*

Lemat 4.15. *W kracie afinicznej dla dowolnych elementów a, b, c takich, że $a \wedge c \neq 0$ spełniony jest warunek:*

$$\textit{jeśli} \quad a \prec b, \quad \textit{to} \quad a \wedge c \preceq b \wedge c.$$

DOWÓD. Niech L będzie kratą afiniczną. Weźmy dowolne $a, b, c \in L$ takie, że

$$a \wedge c \neq 0 \tag{4.8}$$

oraz

$$a \prec b. \tag{4.9}$$

Pokażemy, że $a \wedge c \preceq b \wedge c$. Skoro (4.8), to istnieje atom $p \in L$ taki, że $p \leqslant a \wedge c$. Zatem

$$p \leqslant a \quad \text{oraz} \quad p \leqslant c. \tag{4.10}$$

Z powyższego zdania i z (4.9) mamy $p < b$. Stąd i z (4.10) mamy $a, b, c \in [p, 1]$. Z 4.13 wiemy, że $[p, 1]$ jest podkratą modularną. Zatem z (4.9) i z 4.14 mamy $a \wedge c \preceq b \wedge c$. □

Twierdzenie 4.16. *Krata afiniczna spełnia warunek* (Mac).

DOWÓD. Niech L będzie kratą afiniczną. Weźmy $a, b, c \in L$ takie, że

$$b \wedge c < a < c < b \vee c. \tag{4.11}$$

Pokażemy, że istnieje $p \in L$ takie, że

$$b \wedge c < p \leqslant b \tag{4.12}$$

oraz

$$a = (a \vee p) \wedge c. \tag{4.13}$$

1^o $b \wedge c \neq 0$. W tej sytuacji istnieje atom $p \in L$ taki, że

$$p \leqslant b \wedge c. \tag{4.14}$$

Stąd mamy $p \leqslant b$ oraz $p \leqslant c$. Z (4.14) i z pierwszej inkluzji w (4.11) mamy $p < a$. Ostatecznie $a, b, c \in [p, 1]$. Z 4.13 odcinek $[p, 1]$ jest podkratą modularną. Zatem z 3.16 mamy, że $[p, 1]$ spełnia warunek (Mac).
2^o $b \wedge c = 0$. Przypuśćmy, że $b = 0$. Wtedy $c = b \vee c$. Sprzeczność z ostatnią inkluzją w (4.11). Zatem $b \neq 0$ i istnieje atom $p \in L$ taki, że

$$p \leqslant b. \tag{4.15}$$

Skoro $b \wedge c = 0$ oraz p jest atomem, to

$$b \wedge c < p.$$

Stąd oraz z (4.15) mamy, że p spełnia (4.12).
Przypuśćmy, że $p \leqslant a$. Stąd i z drugiej inkluzji w (4.11) mamy $p \leqslant c$. Zatem z (4.15) mamy $p \leqslant b \wedge c$. Ale $b \wedge c = 0$, więc $p \leqslant 0$, co daje $p = 0$. Sprzeczność z pierwszą inkluzją w (4.12) (którą już dowiedliśmy). Zatem $p \nleqslant a$. Skoro tak i z faktu, że p jest atomem, to

$$a \wedge p = 0. \tag{4.16}$$

Wiemy, że krata afiniczna spełnia (Ms). Tak więc z 3.7 i 3.12 mamy, że krata afiniczna spełnia (C). Skoro tak i skoro (4.16), to dla atomu p mamy

$$a \prec a \vee p. \tag{4.17}$$

Z pierwszej inkluzji w (4.11) wiemy, że istnieje atom $a_1 \in L$ taki, że $a_1 \leqslant a, a \vee p, c < 1$. Zatem $a, a \vee p, c \in [a_1, 1]$ i z 4.13 mamy, że $[a_1, 1]$ jest podkratą modularną. Stąd i z (4.17) oraz 4.14 mamy

$$a \wedge c \preceq (a \vee p) \wedge c. \tag{4.18}$$

Ponieważ z drugiej inkluzji w (4.11) mamy $a \wedge c = a$, więc

$$a \preceq (a \vee p) \wedge c. \tag{4.19}$$

Przypuśćmy, że $a \prec (a \vee p) \wedge c$. Stąd i z (4.17) mamy, że $(a \vee p) \wedge c$ oraz $a \vee p$ są na tym samym poziomie, bo mają wspólny poprzednik a. Ale wiemy, że $(a \vee p) \wedge c \leqslant a \vee p$. Zatem $(a \vee p) \wedge c = a \vee p$. Stąd $a \vee p \leqslant c$. A stąd $a \leqslant c$ oraz

$$p \leqslant c. \tag{4.20}$$

Z (4.15) i (4.20) mamy $p \leqslant b \wedge c$. Ale $b \wedge c = 0$, więc $p = 0$. Sprzeczność z pierwszą inkluzją w (4.12) (którą już dowiedliśmy). Zatem przypuszczenie $a \prec (a \vee p) \wedge c$ było fałszywe. Z uwagi na (4.19) zostaje $a = (a \vee p) \wedge c$. Zatem atom p spełnia (4.13). □

W zasadzie (UCC) wynika z (Mac), ale przytoczmy tutaj bezpośredni dowód rachunkowy w przestrzeni analitycznej.

Lemat 4.17. *Krata $LA(V)$ spełnia* (UCC).

DOWÓD. Niech $A = a + U$, $B = b + W$, $C = c + T$ będą elementami kraty afinicznej $LA(V)$. Aby dowieść (UCC) zakładamy, że $A \prec B$. Mamy pokazać, że wówczas $A \sqcup C \preceq B \sqcup C$, czyli, że

$$0 \leqslant \dim(B \sqcup C) - \dim(A \sqcup C) \leqslant 1.$$

Z założenia $a \in B$, ponieważ $a \in A \subseteq B$, taki więc $B = a + W$. Dla dowolnego $u \in U$ mamy $a + u \in A \subseteq B = a + W$, więc $u \in W$. Stąd

$$U \subseteq W. \tag{4.21}$$

Co więcej,

$$\dim(W) - 1 = \dim(B) - 1 = \dim(A) = \dim(U),$$

a zatem $U \prec W$ w kracie podprzestrzeni V.

Zgodnie z (4.2) mamy

$$A \sqcup C = a + (U + T + \langle a - c\rangle) \qquad \text{oraz} \qquad B \sqcup C = a + (W + T + \langle a - c\rangle).$$

Podstawmy $R := T + \langle a - c\rangle$. Oczywiście R jest elementem kraty podprzestrzeni V, która spełnia (UCC). To oznacza, że z (4.21) mamy

$$U + T + \langle a - c\rangle = U + R \preceq W + R = W + T + \langle a - c\rangle.$$

Stąd natychmiast

$$\dim(B \sqcup C) - \dim(A \sqcup C) \leqslant 1.$$

Ponieważ $A \subseteq B$, więc $A \sqcup C \subseteq B \sqcup C$ w kracie podprzestrzeni $LA(V)$, co daje brakujący warunek

$$0 \leqslant \dim(B \sqcup C) - \dim(A \sqcup C)$$

i w ten sposób dowód jest zakończony. □

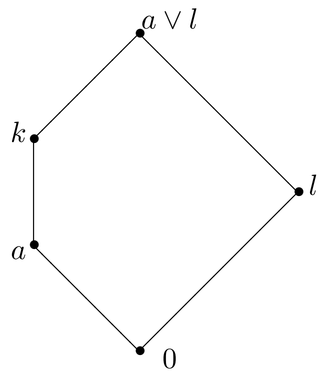
Wróćmy teraz do diagramu kontrprzykładów ze *Wstępu.* Kratę afiniczną możemy wykorzystać do pokazania, że warunki (Mac), (Ms) nie implikują modularności.

Przykład 4.18. Krata spełniająca (Mac), (Ms) i nie spełniająca (M).
Przykładem takiej kraty jest krata afiniczna L. Zgodnie z 4.16 mamy, że L spełnia warunek (Mac). Skoro L spełnia (Ms0) (czyli (W1), por. [8]) oraz (W2), to spełnia (Ms) (por. [3, Roz. 5]). Z aksjomatu Euklidesa mamy, że w przestrzeni afinicznej zawsze znajdziemy proste k, l oraz punkt a takie, że $a \in k$ oraz k, l są równoległe. Zatem w L będzie to element a wysokości 1 oraz elementy niezależne k, l wysokości 2 mające wspólny następnik takie, że $a < k$. Skoro $a < k$ oraz

$$a \vee (l \wedge k) = a \vee 0 = a \neq k = (a \vee l) \wedge k,$$

to z 3.1 mamy $l \, \bar{\mathrm{M}} \, k$. Stąd i z 4.9 mamy, że L nie spełnia (M).

Zauważmy, że wyżej wspomniane proste i punkt tworzą w kracie afinicznej podkratę izomorficzną z kratą pięciokąta (rys. 4.3)



Rysunek 4.3

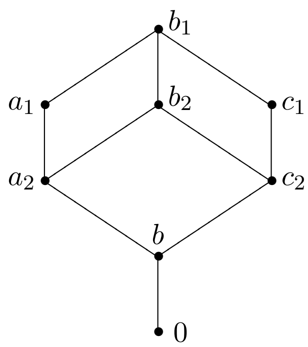
Zatem krata afiniczna zawiera taką podkratę. Jednocześnie wiemy, że krata afiniczna spełnia (W2) (por. 4.12), (Mac) (por. 4.16), (Ms), a zatem z twierdzeń w rozdziale 3. mamy, że krata afiniczna jest półmodularna w każdym sensie. Pokazaliśmy więc, że 3.44 nie może mieć postaci równoważności. □

Dalej zajmiemy się analizą zależności warunku (W2) od pozostałych.

Twierdzenie 4.19. *Jeśli krata spełnia* (M)*, to spełnia również* (W2)*.*

Dowód. Niech L będzie kratą spełniającą (M). Weźmy $a, b \in L$ takie, że $a \wedge b \neq 0$. Skoro L jest modularna, to z 4.9 mamy, że relacja M jest totalna w L. Zatem w szczególności a M b oraz b M a i z 4.10 mamy, że L spełnia (W2). □

Przykład 4.20. Krata spełniająca (Ms), (Mac) i nie spełniająca (W2). Przykładem takiej kraty L jest krata na rysunku 4.4.



Rysunek 4.4

Pokażemy, że L spełnia (Ms). Z 3.8 mamy obie symetryczne pary modularne dla elementów porównywalnych. Teraz bierzemy elementy nieporównywalne ze sobą.

Czy a_1 M b_2 w odcinku $[a_2, b_1]$? Z 1.16 mamy, że odcinek $[a_2, b_1]$ jest podkratą boolowską w L. Z 2.2 mamy a_1 M b_2 w odcinku $[a_2, b_1]$. Zatem z 3.19

mamy, że a_1 M b_2 w L. Podobnie mamy b_2 M a_1 w L. Z 1.16 mamy, że odcinek $[c_2, b_1]$ jest podkratą boolowską w L. Zatem podobnie mamy c_1 M b_2 oraz b_2 M c_1 w L.

Czy a_1 M c_1? Skoro $c_2 < c_1$ oraz

$$c_2 \vee (a_1 \wedge c_1) = c_2 \vee b = c_2 \neq c_1 = b_1 \wedge c_1 = (c_2 \vee a_1) \wedge c_1,$$

to na mocy 3.3 mamy a_1 $\bar{\mathrm{M}}$ c_1. Z symetryczności L mamy c_1 $\bar{\mathrm{M}}$ a_1.

Czy a_2 M c_1 w odcinku $[b, b_1]$? Weźmy $x \in [b, b_1]$ taki, że $x \leqslant c_1$.
1^o Gdy $x = c_1$, wtedy

$$x \vee (a_2 \wedge c_1) = c_1 \vee (a_2 \wedge c_1) = c_1 = (c_1 \vee a_2) \wedge c_1 = (x \vee a_2) \wedge c_1.$$

2^o Gdy $x = c_2 < c_1$, wtedy

$$c_2 \vee (a_2 \wedge c_1) = c_2 \vee b = c_2 = b_2 \wedge c_1 = (c_2 \vee a_2) \wedge c_1.$$

3^o Gdy $x = b < c_1$, wtedy

$$b \vee (a_2 \wedge c_1) = b \vee b = b = a_2 \wedge c_1 = (b \vee a_2) \wedge c_1.$$

Z 1^o, 2^o, 3^o oraz 3.1 mamy a_2 M c_1 w odcinku $[b, b_1]$. Zatem z 3.19 mamy a_2 M c_1 w L. Symetrycznie mamy c_2 M a_1 w L.

Czy c_1 M a_2 w odcinku $[b, b_1]$? Weźmy $x \in [b, b_1]$ taki, że $x \leqslant a_2$.
1^o Gdy $x = a_2$, wtedy

$$x \vee (c_1 \wedge a_2) = a_2 \vee (c_1 \wedge a_2) = a_2 = (a_2 \vee c_1) \wedge a_2 = (x \vee c_1) \wedge a_2.$$

2^o Gdy $x = b < a_2$, wtedy

$$b \vee (c_1 \wedge a_2) = b \vee b = b = c_1 \wedge a_2 = (b \vee c_1) \wedge a_2.$$

Z 1^o, 2^o oraz 3.1 mamy c_1 M a_2 w odcinku $[b, b_1]$. Zatem z 3.19 mamy, że c_1 M a_2 w L. Symetrycznie mamy a_1 M c_2 w L.

Czy a_2 M c_2 w odcinku $[b, b_2]$? Z 1.16 mamy, że odcinek $[b, b_2]$ jest podkratą boolowską w L. Z 2.2 mamy a_2 M c_2 w odcinku $[b, b_2]$. Zatem z 3.19 mamy, że a_2 M c_2 w L. Symetrycznie mamy c_2 M a_2 w L. Zatem L spełnia (Ms). Z rysunku 3.2 na str. 18 wiemy, że odcinek $[b, b_1]$ w L jest podkratą spełniającą (Mac). Zatem L spełnia (Mac), bo 0 w naszej kracie nie wpływa na założenia w (Mac). Skoro $a_1 \wedge c_1 \neq 0$ oraz a_1 $\bar{\mathrm{M}}$ c_1 oraz c_1 $\bar{\mathrm{M}}$ a_1, to z 4.10 mamy, że L nie spełnia (W2).

Zauważmy, że zbiór $\{b, c_2, c_1, b_1, a_1\}$ jest podkratą izomorficzną z kratą pięciokąta. $\square$

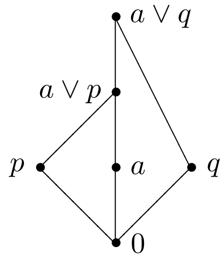
Przykład 4.21. Krata spełniająca (W2) i nie spełniająca (M), (Ms), (Ms0), (Mac), (Mac1), (Sm), (UCC), (C), (Bi).
Przykładem takiej kraty L jest krata na rysunku 1.1 str. 5.

Każda para elementów, których kres dolny jest różny od 0, jest parą porównywalną. Z 3.8 mamy, że te elementy tworzą obie symetryczne pary modularne. Zatem z 4.10 mamy, że L spełnia ($\mathsf{W2}$).

Wystarczy pokazać, że L nie spełnia (C), bo wtedy z prawa kontrapozycji warunki ($\mathsf{Ms0}$), (Ms), (Sm), (UCC), (Mac), ($\mathsf{Mac1}$), (M) również nie są spełnione. Wyjątkiem jest tylko (Bi), bo jest on niezależny od (C).

Weźmy q jako atom w warunku (C). Wtedy $p \wedge q = 0$ oraz $p \not\prec p \vee q$. Zatem z 3.10 mamy, że L nie spełnia (C). Skoro $p \wedge q \prec p, q$ oraz $p \not\prec p \vee q$, to z 3.34 mamy, że L nie spełnia (Bi). $\square$

Przykład 4.22. Krata spełniająca ($\mathsf{W2}$) i nie spełniająca (EP).
Przykładem takiej kraty L jest krata na rysunku 4.5.



Rysunek 4.5

Wszystkie pary elementów o kresie dolnym różnym od 0 są porównywalne. Z 3.8 mamy zatem obie symetryczne pary modularne dla takich par elementów. Z 4.10 mamy, że L spełnia ($\mathsf{W2}$). Skoro p, q są atomami oraz $a \wedge p = 0$ oraz $p \leqslant a \vee q$ oraz $q \nleqslant a \vee p$, to z 3.39 mamy, że L nie spełnia (EP).

Zauważmy, że zbiór $\{0, q, a \vee q, a \vee p, a\}$ jest podkratą izomorficzną z kratą pięciokąta. $\square$

Okazuje się, że ($\mathsf{W2}$) jest niezależny od wcześniej rozważanych warunków z wyjątkiem (M), który implikuje ($\mathsf{W2}$).

Skorowidz symboli

Skorowidz

Bibliografia

[1] Bennett M.K., *Affine geometry: a lattice characterization*, Proc. Math. Soc. **88** (1983), 21–26.

[2] Bennett M.K., *Affine and projective geometry*, Wiley Interscience, 1995.

[3] Bienias A., *Pary modularne w teorii krat i geometrii*, Praca magisterska, Uniwersytet w Białymstoku, 2009.

[4] Birkhoff G., *Lattice theory*, American Mathematical Society, Providence, 1967.

[5] Frink O., *Complemented modular lattices and projective spaces of infinite dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc, 60 (1946) 452-467.

[6] Grätzer G., *General lattice theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, 1978.

[7] Stern M., *Semimodular lattices*, Cambridge University Press 1999.

[8] Wilcox L.R., *Modularity in the theory of lattices*, Ann. of Math. 40 (1939) 490-505.